RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali
Estratto dal vol. XVI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 9°. — Seduta del 3 novembre 1907

SULLE
EQUAZIONI INTEGRALI

NOTA

EUGENIO ELIA LEVI

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI
1907

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Il risultato fondamentale della bella teoria delle equazioni integrali della forma

$$\varphi(x) + \int_a^b k(xy)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{1}$$

è stato stabilito dal Fredholm (¹) nell'ipotesi che la funzione caratteristica $k(xy)$ restasse sempre finita nel campo $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, od anche divenisse infinita nei punti $x \equiv y$ di ordine $\leq \dfrac{1}{(x-y)^\alpha}$, dove α indica un

(¹) I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Math. 27.

numero < 1. Nè le acute indagini dello Hilbert [1], dello Schmidt [2], del Korn [3] sopra l'equazione integrale (1) hanno finora permesso di allargare il campo delle funzioni caratteristiche, per cui vale la teoria del Fredholm. Però in una recente Memoria pubblicata nei Mathematische Annalen, lo Schmidt [4] ha dato di questi risultati una nuova dimostrazione, che mi pare si presti, con poche modificazioni, ad estendere alquanto il campo delle funzioni caratteristiche, che è legittimo considerare. Io mi propongo di indicare qui come ciò possa farsi.

2. Supporrò che *per x variabile nell'intervallo $a \dots b$ l'integrale $\int_a^b |k(xy)|\, dy$ esista e sia uniformemente convergente* [5]: assegnato un numero ε piccolo a piacere sarà possibile trovare un polinomio $P(xy)$ tale che si abbia

$$(2) \qquad \int_a^b |k(xy) - P(xy)|\, dy < \varepsilon .$$

Infatti si considerino le variabili x ed y come coordinate in un piano: esse varieranno in un rettangolo R i cui vertici sono nei punti $(a\,a)$ $(a\,b)$ $(b\,a)$ $(b\,b)$. Fissato un numero η, si escludano da questo rettangolo i punti e le linee in cui $k(xy)$ cresce oltre ogni limite in valore assoluto oppure è discontinua, mediante intorni τ_i tanto piccoli che se $l_1, l_2, l_3, \dots$ sono i segmenti di una qualunque parallela all'asse delle y interni ad essi si abbia, per ogni x,

$$(3) \qquad \sum \int_{l_i} |k(xy)|\, dy < \eta ;$$

[1] D. Hilbert, *Grundlagen einer allg. Theorie* etc., Göttinger Nachr, 1904-1906.

[2] E. Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Functionen* etc., Diss Gött. 1905, riprodotta con aggiunte in Math. Ann. Bd. 63 col titolo: *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen*. I Theil.

[3] Korn, *Sur l'équation fonctionnelle de M. Fredholm*, C. R. 1° semestre 1907.

[4] E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen*, Zweiter Theil. Math. Ann. Bd 64. In questa Memoria lo Schmidt dimostra il teorema fondamentale nell'ipotesi che la funzione $k(xy)$ sia tale che $\int_a^b k(xy)^2 dy$ per $a \leq x \leq b$ e $\int_a^b k(xy)^2 dx$ per $a \leq x \leq b$ siano finiti. Cfr. l'osservazione finale della Memoria ed il § 16 della prima parte (già citata) della Memoria medesima pubblicata nel vol. 63.

[5] Dire che l'integrale $\int_a^b |k(xy)|\, dy$ è uniformemente convergente per $a \leq x \leq b$ significa che, preso un ε piccolo a piacere, si può trovare un δ così piccolo che per ogni coppia di valori di y e di x compresi fra a e b, sia

$$\int_{y-\delta}^{y} |k(xy)|\, dy < \varepsilon , \quad \int_{y}^{y+\delta} |k(y.x)|\, dy < \varepsilon ;$$

cfr. La Vallée Poussin, *Sur la convergence des intégrales définies*, n. 61. Journal de Liouville, 1892, IV serie, vol. 8.

ciò potrà farsi in base alla supposta convergenza uniforme degli integrali $\int_a^b |k(xy)|\,dy$. Si potrà allora trovare una funzione $\bar{k}(xy)$ che in tutti i punti di R esterni ai campi τ_i coincida con $k(xy)$, e nei campi τ_i sia tale che si abbia ancora

$$(4) \qquad \sum \int_{l_i} |\bar{k}(xy)|\,dy < \eta \ (^1).$$

Si costruisca un polinomio $P(xy)$ tale che in tutto R si abbia $|\bar{k}(xy) - P(xy)| < \eta$, cosa che per il noto teorema di Weierstrass è sempre possibile. Si avrà allora evidentemente, qualunque sia x, ricordando (3) (4),

$$(5) \qquad \begin{gathered} \int_a^b |k(xy) - P(xy)|\,dy \leq \int_a^b |\bar{k}(xy) - P(xy)|\,dy + \\ + \sum \int_{l_i} |k(xy)|\,dy + \sum \int_{l_i} |\bar{k}(xy)|\,dy \leq \eta\,[(b-a)+2]. \end{gathered}$$

Basterà quindi prendere $\eta \leq \dfrac{\varepsilon}{(b-a)+2}$ perchè la (2) sia soddisfatta.

Osserviamo, per completare, che *se si suppone che la $k(xy)$ soddisfaccia ancora alla condizione che per y variabile nell'intervallo $a \ldots b$ esista l'integrale $\int_a^b |k(xy)|\,dx$ e sia uniformemente convergente* (²), si potrà prendere $P(xy)$ in modo che insieme colla (2) si abbia pure

$$(2)_1 \qquad \int_a^b |k(xy) - P(xy)|\,dx < \varepsilon .$$

(¹) Ciò è evidente e del resto si dimostra come segue. Si può supporre che la lunghezza d_i dei segmenti l_i interni a τ_i sia funzione continua dell'ascissa x. Ciò posto sia K il massimo valore di $|k(xy)|$ in $R - \Sigma\tau_i$; sia m il massimo numero dei segmenti l_i che sono sopra una $x = \text{cost}$. Si prenda in ogni campo τ_i una curva γ_i tale che, detta τ_i' l'area racchiusa da γ_i, i segmenti di una qualunque parallela all'asse delle y interna a $\tau_i - \tau_i'$ abbiano somma $< \frac{\eta}{K}$. Per costruire γ_i basterà in ogni segmento l_i la cui lunghezza sia $> \frac{\eta}{Km}$ segnare i due punti che distano dagli estremi di esso di $\frac{\eta}{2Km}$: si chiami γ_i' il luogo di questi punti: risulterà esso di archi accoppiati in modo che quelli di una stessa coppia sono compresi fra le stesse parallele all'asse delle y: a questi archi si aggiungano i segmenti di queste parallele all'asse delle y fra essi compresi, e si prendano quali γ_i le curve chiuse (o sistemi di curve chiuse) così ottenute. Si costruisca una funzione continua che sul contorno di τ_i sia uguale a $k(xy)$, su γ_i e in τ'_i sia zero, e in $\tau_i - \tau_i'$ sia in modulo sempre $\leq K$.

(²) In particolare quindi $k(xy)$ non potrà divenire infinita sopra tutto un tratto di parallela all'asse delle x, cosa che le ipotesi del principio di questo numero non escludevano minimamente.

per ogni valore di y compreso fra a e b. Infatti si potrà allora prendere gli intorni τ_i dei punti di infinito o di discontinuità di $k(xy)$ tanto piccoli che, detti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ i segmenti di una parallela all'asse delle x interni a questi campi τ_i, si abbia insieme colla (3) anche la disuguaglianza

$$(3)_1 \qquad \sum \int_{\lambda_i} k(xy)\, dx < \iota \,;$$

e scegliere quindi la $\bar{k}(xy)$ in modo che, insieme colla (4) si abbia

$$(4)_1 \qquad \sum \int_{\lambda_i} \bar{k}(xy)\, dx < \iota \,.$$

Se noi osserviamo ora che un polinomio si può certamente scrivere nella forma $\sum^{\mu} \alpha_\nu(x)\, \beta_\nu(y)$, dove $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_\mu(x)$ e $\beta_1(y), \beta_2(y), \ldots, \beta_\mu(y)$ sono polinomi nelle variabili x ed y che si possono supporre linearmente indipendenti, il teorema precedente ci dimostra in particolare che: *se la funzione $k(xy)$ è tale che per x variabile nell'intervallo $a \ldots b$ esista l'integrale $\int_a^b |k(xy)|\, dy$ e sia uniformemente convergente (e per y variabile nell'intervallo $a \ldots b$ esista l'integrale $\int_a^b |k(xy)|\, dx$ e sia uniformemente convergente) si possono sempre trovare, per μ sufficientemente grande, μ coppie di funzioni $\alpha_\nu(x), \beta_\nu(y)$ delle variabili x ed y rispettivamente, finite e continue per $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ e linearmente indipendenti, tali che si abbia*

$$\int_a^b \left| k(xy) - \sum_1^{\mu} \alpha_\nu(x)\, \beta_\nu(y) \right| dy < 1$$

$$\left(e \int_a^b \left| k(xy) - \sum_1^{\mu} \alpha_\nu(x)\, \beta_\nu(y) \right| dx < 1 \right).$$

Questo teorema farà l'ufficio del teorema invocato dallo Schmidt nel principio del § 3 della Memoria citata (II Th.) e dimostrato nella I Th. della Memoria pubblicata nel vol. 63 dei Math. Ann.

3. Premesso ciò, perchè la dimostrazione dello Schmidt si possa applicare nelle condizioni più generali in cui qui ci poniamo, basterà mostrare che, *se in un'equazione integrale* (1) *la funzione $k(xy)$ è assolutamente integrabile rapporto ad y e soddisfa alla condizione*

$$(7) \qquad \int_a^b |k(xy)|\, dy < \mathrm{K} < 1 \qquad (a \leq x \leq b),$$

l'equazione ammette soluzione, tosto che la funzione $f(x)$ è atta all'integrazione e finita (numericamente inferiore ad un numero F). Invero in queste ipotesi si avrà

$$|f(x)| < \mathrm{F}$$
$$\left|\int_a^b k(xy)\, f(y)\, dy\right| < \mathrm{F}\int_a^b |k(xy)|\, dy < \mathrm{FK}$$
$$\left|\int_a^b k(xy_1)\, dy_1 \int_a^b k(y_1\, y)\, f(y)\, dy\right| < \mathrm{FK}\int_a^b |k(x\,,y_1)|\, dy_1 < \mathrm{FK}^2$$

. . . .

Quindi la serie di Neumann

$$(8)\qquad \varphi(x) = f(x) - \int_a^b k(xy)\, f(y)\, dy + \int_a^b k(xy_1)\, dy_1 \int_a^b k(y_1\, y)\, f(y)\, dy - \cdots$$

converge in ugual grado fra a e b, e rappresenta quindi una funzione atta all'integrazione la quale soddisfa all'equazione (1).

Si noti che non è necessario ammettere che sia $f(x) < \mathrm{F}$; basta supporre che $f(x)$ *sia tale che esistano tutti i termini successivi della serie* (8) *e che uno di essi sia limitato.*

Osservazione I. — Se $f(x) = 0$ la serie (8) dà la soluzione evidente $\varphi(x) = 0$. Ma si può osservare che quando è soddisfatta la condizione (7), l'equazione omogenea

$$(9)\qquad \varphi(x) + \int_a^b k(xy)\, \varphi(y)\, dy = 0$$

non ammette alcuna soluzione limitata tra a e b diversa da zero: poichè, se Φ è il massimo modulo di una soluzione $\varphi(x)$ di (9), il massimo valore assoluto di $\int_a^b k(xy)\, \varphi(y)\, dy$ sarà $\leq \Phi\mathrm{K}$, e quindi sarà $< \Phi$, tranne quando $\Phi = 0$. Quindi ancora possiamo dire che, *se è soddisfatta* (7) *e $f(x)$ è finita, l'unica soluzione finita di* (1) *è data* (8).

Di più, se supponiamo che $k(xy)$, oltre a soddisfare a (7), *sia pure assolutamente integrabile rapporto ad x e l'integrale converga uniformemente rapporto ai varî valori di y e soddisfaccia alla limitazione*

$$(10)\qquad \int_a^b |k(xy)|\, dx = \chi(y) \leq \mathrm{K}_1 < 1\,,$$

noi possiamo dire che *la* (9) *non ammette nessuna soluzione assolutamente integrabile diversa da zero.* Si osservi perciò che se è verificata la (10) e $\varphi(x)$ è assolutamente integrabile, esisterà l'integrale

$$\int_a^b |\varphi(y)|\, dy \int_a^b |k(xy)|\, dx = \int_a^b \chi(y)\, |\varphi(y)|\, dy < \mathrm{K}_1 \int_a^b |\varphi(y)|\, dy.$$

Ma di più siccome $\int_a^b |k(xy)| dx$ è per ipotesi uniformemente convergente, esiste l'integrale superficiale $\int\int_R |\varphi(y)| \, . \, k(xy) \, dx \, dy$ e si ha

$$\int\int_R |\varphi(y) \, . \, k(xy)| \, dx \, dy = \int_a^b |\varphi(y)| \, dy \int_a^b |k(xy)| \, dx \text{ [1]} .$$

D'altro canto si ha, se si suppone che $\varphi(x)$ soddisfaccia all'equazione (9), in virtù della (9) e della (10) [2]

$$\int_a^b |\varphi(x)| \, dx \leq \int\int_R |\varphi(y) \, k(xy)| \, dx \, dy =$$
$$= \int_a^b |\varphi(y)| \, dy \int_a^b |k(xy)| \, dx \leq \mathrm{K}_1 \int_a^b |\varphi(y)| \, dy < \int_a^b |\varphi(y)| \, dy,$$

e tale relazione è assurda tranne quando sia $\int_a^b |\varphi(x)| \, dx = 0$ ossia $\varphi(x) = 0$.

Osservazione II. — Osserviamo ancora che nelle condizioni generali qui supposte, non si può parlare di *risolvente* dell'equazione (1), e cioè di una funzione $\chi(x \, , x_1)$ tale che

$$\chi(x \, x_1) + \int_a^b k(xy) \, \chi(yx_1) \, dy = k(xx_1) \, ;$$

poichè la funzione $k(xx_1)$ non soddisferà, in generale, alle ipotesi fatte per $f(x)$, e noi non potremo neppure assicurare che abbia senso l'integrale

$$\int_a^b k(xy) \, k(yx_1) \, dy .$$

[1] Invero perchè esista $\int\int_R |f(xy)| \, dx \, dy$ e sia $= \int_a^b dy \int_a^b |f(xy)| \, dx$ basta che $\int_a^b |f(xy)| \, dx$ sia uniformemente convergente tranne che nei punti di un insieme di *misura nulla nel senso di Jordan*: nel nostro caso sono questi i punti di infinito di $\varphi(y)$. Cfr. La Vallée Poussin, Journal de Liouville, 1892, tomo 8, serie IV.

[2] Invero dall'esistenza dell'integrale $\int\int_R |k(xy) \, \varphi(y)| \, dx \, dy$ segue con ragionamenti analoghi a quelli del Pringsheim (Münchener Ber. 28-29, 1898-1899) che esiste $\int_a^b |k(xy) \, \varphi(y)| \, dy$ tranne che nei punti x di un insieme di misura nulla nel senso di Borel-Lebesgue. Ma quando ha senso $\int_a^b |k(xy) \, . \, \varphi(y)| \, dy$, si ha da (9)

$$|\varphi(x)| \leq \int_a^b |k(xy) \, \varphi(y)| \, dy .$$

Onde la disuguaglianza del testo.

4. E dopo ciò la dimostrazione dello Schmidt si potrà riprodurre con ben poche modificazioni. Osserviamo infatti collo Schmidt (§ 2) che, quando la funzione caratteristica è del tipo $k(xy) = \sum_1^{\mu} \alpha_\nu(x)\, \beta_\nu(y)$, la ricerca delle soluzioni di (1) assolutamente integrabili si riduce alla discussione di un sistema di μ equazioni lineari ordinarie: e che si ottiene quindi che o esiste la soluzione di (1) qualunque sia $f(x)$ e tale soluzione è unica, oppure esistono soluzioni della corrispondente equazione omogenea

$$\varphi(x) + \int_a^b k(xy)\, \varphi(y)\, dy = 0 .$$

Presa allora un'equazione (1) qualunque la cui funzione caratteristica soddisfaccia solo alle condizioni imposte al principio del n. 2, si determinino le $\alpha_\nu(x)$, $\beta_\nu(y)$ secondo quanto è indicato in quel numero: e posto

$$k(xy) - \sum_1^{\mu} \alpha_\nu(x)\, \beta_\nu(y) = k_1(xy) ,$$

si costruiscano le serie

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) - \int_a^b k_1(xy)\, f(y)\, dy + \\ &\qquad + \int_a^b k_1(xy_1)\, dy_1 \int_a^b k_1(y_1 y)\, f(y)\, dy + \cdots \\ \mathrm{A}_\nu(x) &= \alpha_\nu(x) - \int_a^b k_1(xy)\, \alpha_\nu(y)\, dy + \\ &\qquad + \int_a^b k_1(xy_1)\, dy_1 \int_a^b k(y_1 y)\, \alpha_\nu(y)\, dy + \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

le quali per le considerazioni del numero precedente quando $f(x)$ sia finita convergono e rappresentano funzioni finite che risolvono le equazioni

$$\begin{aligned} f_1(x) + \int_a^b k_1(xy)\, f_1(y)\, dy &= f(x) \\ \mathrm{A}_\nu(x) + \int_a^b k_1(xy)\, \mathrm{A}_\nu(y)\, dy &= \alpha_\nu(x) . \end{aligned} \tag{12}$$

Ma la (1) si può scrivere

$$\varphi(x) + \int_a^b k_1(xy)\, \varphi(y)\, dy + \sum_1^{\mu} \alpha_\nu(x) \int_a^b \beta_\nu(y)\, \varphi(y)\, dy - f(x) = 0 .$$

Sostituendo in questa i valori di $\alpha_\nu(x)$ e $f(x)$ dati da (12) si avrà

$$\begin{aligned} &\left[\varphi(x) + \sum \mathrm{A}_\nu(x) \int_a^b \beta_\nu(y)\, \varphi(y)\, dy - f_1(x)\right] + \\ &+ \int_a^b k_1(xy) \left[\varphi(y) + \sum \mathrm{A}_\nu(y) \int_a^b \beta_\nu(y_1)\, \varphi(y_1)\, dy_1 - f_1(y)\right] dy = 0 . \end{aligned} \tag{13}$$

Si ponga

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \sum A_\nu(x) \int_a^b \beta_\nu(y)\,\varphi(y)\,dy - f_1(x)\,;$$

la (13) diverrà

$$\Phi(x) + \int_a^b k_1(xy)\,\Phi(y)\,dy = 0\,.$$

Ma se si suppone che $f(x)$ e $\varphi(x)$ siano finite, $\Phi(x)$ sarà pure finita: e ciò, perchè $\Phi(x)$ soddisfa all'equazione precedente e per l'osservazione I del n. 3, non può essere se non è $\Phi(x) = 0$; quindi affinchè la funzione $\varphi(x)$ supposta finita, soddisfaccia all'equazione (1) è necessario che

$$(14) \qquad \varphi(x) + \int_a^b \left(\sum A_\nu(x)\,\beta_\nu(y)\right) \varphi(y)\,dy = f_1(x).$$

Ed inversamente se $\varphi(x)$ soddisfa la (14), essa è soluzione di (1) in virtù di (13) e di (12).

Ma l'equazione (14) ha per funzione caratteristica la somma di un numero finito di prodotti di funzioni della sola x per funzioni della sola y, onde, come dicemmo in principio di questo numero, essa si riduce alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari ordinarie. E potremo conchiudere:

Se si suppone che la funzione $k(xy)$ sia assolutamente ed uniformemente integrabile rapporto ad y per x compreso fra a e b, possono aversi per l'equazione (1) *due casi:*

1°. *Non esiste soluzione finita e diversa da zero dell'equazione omogenea*

$$(15) \qquad \varphi(x) + \int_a^b k(xy)\,\varphi(y)\,dy = 0\,;$$

l'equazione (1) *è allora risolubile appena si supponga che $f(x)$ sia finita; ed allora essa ammette una sola soluzione finita.*

2°. *Esiste una soluzione finita dell'equazione* (15). *Non si può allora assicurare che esista una soluzione di* (1) *per qualunque funzione $f(x)$: quando ne esiste una, ne esistono parecchie differenti fra loro per una soluzione di* (15).

Basta osservare che se non esiste soluzione finita di (15), non esiste neppure soluzione finita dell'equazione omogenea

$$\varphi(x) + \int_a^b \left(\sum A_\nu(x)\,\beta_\nu(y)\right) \varphi(y)\,dy = 0$$

corrispondente a (14) e inversamente.

Questi risultati si completano quando si suppone che $k(xy)$ soddisfaccia alla seconda condizione del n. 2, cioè quando si suppone che $k(xy)$ *sia* *anche integrabile assolutamente ed uniformemente rapporto ad x.* Fondandosi allora sul teorema dimostrato in tal caso nel n. 2 e sull'osservazione 1 del n. 3 si deduce che $\Phi(x)$ non può essere assolutamente integrabile e $\neq 0$, o in altri termini che ogni soluzione assolutamente integrabile di (1) soddisfa a (14): quindi *basta sapere che l'equazione* (15) *non ammette soluzioni assolutamente integrabili per essere certi che ci troviamo nel primo caso.* E inoltre *perchè allora esista la soluzione di* (1) *non è necessario supporre $f(x)$ finita, ma basta supporre che sia assolutamente integrabile e che parimenti esistano gli integrali*

$$\int_a^b k(xy)\, f(y)\, dy\,,\quad \int_a^b k(xy_1)\, dy_1 \int_a^b k(y_1 y)\, f(y)\, dy \ldots$$

e che uno di essi sia finito.

Ma in queste ipotesi viene facile completare anche ulteriormente i risultati relativi al secondo caso; poichè seguendo i ragionamenti dello Schmidt si vede che *per l'equazione*

$$(1)_1 \qquad \varphi(y) + \int_a^b k(xy)\, \varphi(x)\, dx = f(y)$$

si potrà sviluppare una teoria affatto analoga a quella svolta per la (1): *e per questa equazione si presenta il primo od il secondo caso a seconda che si ha il primo od il secondo caso per la* (1). *Quando si presenta il secondo caso, esiste un numero finito di soluzioni $\varphi_1(x) \ldots \varphi_m(x)$ dell'equazione omogenea*

$$\varphi(y) + \int_a^b k(xy)\, \varphi(x)\, dx = 0\,;$$

e condizione necessaria e sufficiente perchè il secondo membro di (1) *sia tale che* (1) *ammetta soluzione è che si abbia*

$$\int_a^b \varphi_i(y)\, f(y)\, dy = 0 \qquad (i = 1 \ldots m)\,.$$

È immediata l'estensione delle considerazioni precedenti al caso delle funzioni di 2 o più variabili.

Offerto dall' Autore.

ESTRATTO

DAGLI *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.*

Sull'equazione del calore.

(*Del* Dott. EUGENIO ELIA LEVI, *a Pisa.*)

1. La teoria delle equazioni del secondo ordine di tipo parabolico è assai più arretrata della teoria delle equazioni ellittiche ed iperboliche, specialmente dal punto di vista delle funzioni di variabile reale. L'equazione della propagazione del calore in una sbarra omogenea è forse l'unica equazione di tipo parabolico che sia stata studiata fin qui: ed anche per questa le nostre cognizioni sono ancora assai limitate: poichè non furono studiati che quei particolari problemi al contorno che hanno interesse per la Fisica: e mentre tali problemi nel caso delle equazioni ellittiche ed iperboliche rappresentano un tipo assai generale, sia per quanto riguarda la natura dei dati imposti al contorno, sia per quanto si riferisce alla forma del contorno medesimo, nel caso dell'equazione del calore essi sono al tutto particolari.

Io mi sono proposto di costruire per le equazioni paraboliche una teoria analoga alla teoria delle equazioni ellittiche: ed in questo lavoro mi occupo della più semplice delle equazioni paraboliche: dell'equazione del calore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x\,y) \text{ (*)}. \tag{1}$$

È noto (**) che non esistono due soluzioni di (1) che nei punti di una curva aperta, i cui estremi si trovino in una medesima caratteristica $y =$ cost.

(*) È evidente che con una semplice trasformazione delle variabili si può sempre ridurre a questa forma l'equazione più generale della propagazione del calore in una sbarra omogenea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\frac{\partial u}{\partial y} = f(x\,y).$$

(**) Cfr. E. W. HOBSON, Art. *Wärmeleitung* nell'*Encyclopädie der Math. Wiss.* Bd. V, 1. pag. 174. E più in generale V. VOLTERRA, *Leçons sur l'intégration des équations diff. etc., professées à Stockholm*, 1906, pag. 64-65.

e giaccia tutta al disotto della caratteristica medesima, prendano i medesimi valori. Scopo principale della presente Memoria è l'invertire questa proposizione dimostrando che, data sopra una tale curva s una qualunque catena continua di valori, esiste sempre una soluzione di (I), la quale prende sul contorno i valori assegnati. Nel corso del lavoro mi occorse però di notare alcune proprietà delle soluzioni dell'equazione (I) che non mi paiono del tutto prive di interesse.

Nel primo paragrafo richiamo la dimostrazione del teorema di unicità precedentemente citato, onde precisare le condizioni in cui è applicabile e dedurne alcune notevoli proprietà circa i massimi ed i minimi delle soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{II}$$

affatto analoghe a quelle delle funzioni armoniche, ed i teoremi sulle serie di soluzioni di (II) corrispondenti ai teoremi dell'Harnack. Precisate nel § 2 le condizioni che si possono intendere soddisfatte per il contorno, mi accingo alla dimostrazione del teorema di esistenza per l'equazione (II). Indico a tale scopo due metodi: del primo, analogo al metodo del Neumann tratto a lungo e, spero, completamente nei § 3-6: esso è fondato su una formola analoga a quella dei potenziali di doppio strato che deduco dalla formula di Green nei § 3-4; e ci permette di ottenere la soluzione cercata sotto forma di una serie che si presta assai bene allo studio della soluzione medesima: ad esempio alla derivazione (*).

Per il secondo metodo mi limito ad una trattazione più sommaria, tracciando nel § 7 per sommi capi la via da seguirsi: esso si fonda sul principio delle immagini, che nella forma generale datagli dal prof. Volterra (**) permette di risolvere agevolmente il problema nel caso del contorno poligonale: io mostro come si possa ottenere il caso generale considerando una curva come limite dei poligoni inscritti in essa.

Il § 8 è dedicato alla dimostrazione di una formola analoga a quella di Poisson che permette di ricondurre il problema relativo alla equazione (I) a quello relativo all'equazione (II).

(*) In altri termini riduco il problema alla risoluzione di una equazione integrale di Fredholm: noterò però esplicitamente che in quanto segue *non è mai necessario* conoscere la teoria delle equazioni integrali.

(**) Volterra, l. c., pag. 67-69.

Nel § 9 dimostro che le soluzioni dell'equazione (I) sono funzioni analitiche della x, tosto che si suppone che la funzione $f(x\,y)$ sia funzione analitica di x (*). Infine nel § 10 estendo tutti i precedenti risultati all'equazione del calore più generale

$$\Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1\,x_2 \ldots x_n\,y)\ (^{**}) \quad \left(\Delta_2 u = \sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right). \tag{III}$$

Il massimo interesse di questo studio è dal punto di vista dell'analisi. Dal punto di vista della Fisica Matematica il teorema di esistenza dimostrato nel presente lavoro non ha una interpretazione semplice che nel caso in cui al contorno si attribuiscano forme particolari: per es.: quando si suppone che esso sia formato da una porzione di varietà caratteristica (per es., della $y=0$) e del cilindro a generatrici parallele all'asse delle y projettante il contorno della varietà medesima. In tal caso la soluzione che prende valori assegnati su questo contorno dà la distribuzione delle temperature in un corpo omogeneo ad 1, 2,..., n dimensioni, quando si suppone nota la temperatura iniziale in tutti i punti del corpo, e quella nei punti del contorno per i successivi valori del tempo. Quando l'equazione data è la (III) (o la (I)), si suppone inoltre che in ogni punto del corpo vi sia una sorgente di calore di intensità nota variabile da punto a punto e col variare del tempo: quando $f(x_1\,x_2 \ldots x_n\,y) = 0$ non vi è allora sorgente di calore all'interno.

Il problema fisico così proposto era già stato risoluto fin dal Fourier per il caso dell'equazione (II): per l'equazione (III) in più variabili esso fu in sostanza risolto nei recenti studi del Le Roy, dello Stekloff, dello Zaremba, del Lauricella (***) mediante sviluppi in serie di funzioni armoniche del Poincaré. La sua soluzione sarà compresa come caso particolarissimo

(*) Tale risultato fu da me dimostrato per l'equazione (II) nella Nota: *Sul problema di Cauchy* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XVI, serie 5.ª, 1907, 2.° semestre, pag. 105 e sg). Cfr. anche la Memoria di E. Holmgren, *Om Cauchy's problem vid de lineära*, etc. (Archiv för Matematik Astronomi och Fysik, Stockholm, Vol. II, (1906)).

(**) Valgono relativamente a questa equazione le osservazioni fatte relativamente all'equazione (I) in una Nota precedente a pag. 187.

(***) Questi lavori si ispirano tutti ai metodi della celebre Memoria del Poincaré: *Sur les équations de la Physique Mathématique* (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1894). Per le indicazioni bibliografiche cfr. la Memoria del Lauricella, *Applicazioni della teoria di Fredholm al problema del raffreddamento dei corpi*, a pag. 143 e sg. del presente volume degli *Annali*.

nella soluzione del problema proposto in questo lavoro: ed il metodo che qui propongo fornirà, spero, della funzione cercata una forma forse più maneggevole e perspicua (*).

§ 1. Il teorema di unicità e le sue conseguenze.

2. Consideriamo una curva c, tutta al finito, la quale ammetta generalmente tangente e sia incontrata dalle parallele agli assi delle x e delle y in un numero finito di punti: e sia C il campo da esso racchiuso. Sia u una funzione che nel campo C, il contorno c inchiuso, soddisfaccia alle condizioni seguenti:

1.° u *e* $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ *sono finite e continue*,

2.° $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *e* $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ *sono linearmente integrabili rapporto ad x ed y rispettivamente e sono tali che*

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, d\,x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \int \frac{\partial u}{\partial y}\, d\,y = u.$$

Si ha allora coi soliti processi di integrazione per parti

$$\iint_C u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] d\,x\,d\,y = -\iint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\,x\,d\,y + \int_c u\left[\frac{\partial u}{\partial x}\, d\,y + \frac{1}{2}\, u\, d\,x\right], \qquad (1)$$

dove nel secondo integrale c devesi intendere percorso nel senso positivo

---

(*) I risultati del presente lavoro furono già riassunti in una Nota pubblicata nei *Rend. della R. Acc. dei Lincei* (tomo XVI, serie 5.ª, 6 ottobre 1907) portante lo stesso titolo di questa Memoria. Recentemente, quando già questo lavoro era in bozze seppi che qualcuno di questi risultati era già stato ottenuto per altra via dal sig. E. Holmgren, *Sur une application de l'équation intégrale de M. Volterra*, Archiv för Mat. (9 aprile 1907); precisamente l'H. dimostra il teorema di esistenza per i contorni che nel lavoro sono detti di seconda specie. Vedi anche E. Holmgren, C. R. 30 dicembre 1907, E. E. Levi, C. R. 27 gennaio 1908. Ed anche vedi S. Bernstein, C. R. gennaio 1905. Gli stessi metodi usati in questa Memoria ho applicato a risolvere altri problemi analoghi nella Nota: *Sul problema di Fourier*, pubblicata negli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino (1907-1908).

rapporto all'area interna C, e, detto in questa ipotesi dc il differenziale dell'arco di c, è $dx = \frac{dx}{dc}\,dc$, $dy = \frac{dy}{dc}\,dc$.

È facile dedurre di qui un notevole teorema di unicità per le soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x\,y). \tag{I}$$

Sia s una curva aperta la quale goda delle proprietà pur ora ammesse per c, ed i cui estremi $A\,B$ siano su una medesima caratteristica $y = y_0$ dell'equazione (I), mentre gli altri punti di s stanno tutti al disotto di questa caratteristica (abbiano sempre ordinata $< y_0$): porremo $A \equiv (a, y_0)$, $B \equiv (b, y_0)$, $a < b$. Potremo allora asserire che *esiste non più di una soluzione di* (I) *che su s prenda assegnati valori e soddisfaccia in S (s ed $A\,B$ inchiusi) alle condizioni 1.ª e 2.ª sopra stabilite per u.*

Ed invero siano, se possibile, z_1 e z_2 due tali soluzioni, la funzione $u = z_1 - z_2$ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{II}$$

e si annulla su s. Si applichi la (1) prendendo come campo C il campo S, — il che per le nostre ipotesi è legittimo — : il primo membro di (1) diviene identicamente nullo in forza di (II), nel secondo membro l'integrale curvilineo si riduce, poichè su s è $u = 0$ e su $A\,B$ è $d\,y = 0$, a

$$\frac{1}{2}\int_b^a u^2\,d\,x = -\frac{1}{2}\int_a^b u^2\,d\,x$$

(si ricordi che per percorrere il tratto $A\,B$ del contorno nel verso positivo rapporto all'area S che si trova al disotto di essa lo si deve percorrere nel verso delle x decrescenti): onde da (1) si dedurrà

$$0 = -\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\,x\,d\,y - \frac{1}{2}\int_a^b u^2\,d\,x. \tag{2}$$

E di qui osservando che i due integrali del secondo membro sono essenzialmente positivi, tranne quando è $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ in S, ed $u = 0$ su $A\,B$, si deduce senz'altro, ricordando che su s è $u = 0$, che u è nullo in tutto S, e quindi il nostro enunciato.

Ma il teorema di unicità sopra enunciato si può ancora estendere (e ciò importa a noi per le deduzioni del numero seguente): in quanto che si può allargare alquanto la classe dei campi S che si possono considerare. Si prenda invero come campo S un insieme di punti, tutti interni al rettangolo R compreso fra le rette $y=0$, $x=0$, $y=y_0$, $x=x_0$, il quale sia tale che, preso un punto dell'insieme, si possa sempre costruire un piccolo rettangolo di cui esso sia il centro e che sia formato tutto di punti interni ad S: e si chiami contorno di S l'insieme dei punti limiti di S non appartenenti ad S. Supporremo che al contorno di S appartengano uno o più tratti $A_i B_i$ [$A_i \equiv (a_i\, y_0)$ $B_i \equiv (b_i\, y_0)$ $a_i < b_i$] della caratteristica $y=y_0$; diremo s l'insieme dei punti residui del contorno. Ogni retta $x=\xi$, od $y=\eta$ $(0 \leqq \xi \leqq x_0)$ $0 \leqq \eta \leqq y_0)$ ha comuni con S i punti di un insieme numerabile (finito od infinito) di segmenti, gli estremi dei quali appartengono ad s oppure agli $A_i B_i$.

Con tali significati di S ed s si può dimostrare che, se due soluzioni z_1 e z_2 di (1), finite e continue nei punti di S e di s insieme colle loro derivate $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, sono uguali nei punti di s, esse sono uguali in tutti i punti di S. Si ponga invero $z_1 - z_2 = u$, e si consideri la funzione v definita in tutti i punti di R la quale nei punti di S è uguale a $u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \frac{\partial u}{\partial y}$, e nei punti di s e fuori di S è nulla. È questa una funzione continua in tutto R, esisteranno quindi gli integrali $\iint_R v\, dx\, dy$, $\int_0^{y_0} v(x\,y)\, dy$, $\int_0^{x_0} v(x\,y)\, dx$ e si avrà

$$\iint_R v(x\,y)\, dx\, dy = \int_0^{x_0} dx \int_0^{y_0} v(x\,y)\, dy = \int_0^{y_0} dy \int_0^{x_0} v(x\,y)\, dx.$$

Ma si osservi che, presa una parallela all'asse delle x, o una parallela all'asse delle y, i soli punti in cui $v \neq 0$ sono i punti dei segmenti $s_i(y)$, o $\sigma_i(x)$, che quella ha interni ad S. Quindi sarà $\int_0^{y_0} v(x\,y)\, dy = \Sigma_i \int_{\sigma_i(x)} v(x\,y)\, dy$, $\int_0^{x_0} v(x\,y)\, dx = \Sigma_i \int_{s_i(y)} v(x\,y)\, dx$. Ora, preso un qualunque integrale $\int_{s_i(y)} v(x\,y)\, dx$, si ha, poichè in esso $v(x\,y) = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e negli estremi è $u = 0$,

$$\int\limits_{s_i(y)} v(x\,y)\,d\,x = -\int\limits_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\,x.$$

Analogamente preso un qualunque integrale $\int\limits_{\sigma_i(x)} v(x\,y)\,d\,y$ si avrà che esso è zero, tranne quando $\sigma_i(x)$ è l'intervallo $\sigma_1(x)$ il quale ha un estremo su uno dei tratti $A_i B_i$, nel qual caso è

$$\int\limits_{\sigma_1(x)} v(x\,y)\,d\,x = \frac{1}{2}\,u^2(x\,y_0).$$

Abbiamo quindi l'uguaglianza

$$\frac{1}{2}\,\Sigma_i \int\limits_{a_i}^{b_i} u^2(x\,y_0)\,d\,x + \int\limits_0^{y_0} \left(\Sigma_i \int\limits_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\,x\right) d\,y = 0\ (*).$$

Questo non può essere se non è

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} u^2(x\,y_0)\,d\,x = 0, \quad \int\limits_0^{y_0} \left(\Sigma_i \int\limits_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\,x\right) d\,y = 0.$$

Siccome $u^2(x\,y_0)$ è una funzione continua di x, sarà quindi $u^2(x\,y_0) = 0$. Lo stesso non si può dire senza ulteriori ragionamenti per l'altro integrale, perchè non possiamo asserire che $\Sigma_i \int\limits_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\,x$ sia continua, ma tuttavia noi sappiamo che $\Sigma_i \int\limits_{s_i(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\,x = 0$, fatta eccezione per un aggregato di valori di y di misura nulla nel senso di Borel; e quindi ancora su ogni retta $y =$ cost. non appartenente a questo aggregato sarà $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, tranne che nei punti di un insieme di misura nulla. Ma $\frac{\partial u}{\partial x}$ è continua in ogni punto interno ad S, quindi sarà in tutto S, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ed infine $u = 0$. c. v. d.

(*) Si noti il significato dell'ultimo integrale, il quale non rappresenta senz'altro un integrale di area: per quanto sarebbe agevole ridurci ad un vero e proprio integrale di area.

3. Dal teorema precedente segue una importante proprietà delle soluzioni di (II), fondamentale per le considerazioni che seguiranno.

Data una funzione $z(x\,y)$ soddisfacente all'equazione (II) *in un campo S come quelli del numero precedente, finita e continua in S e sul contorno s, con derivate prime finite e continue nei punti interni ad S, il massimo (minimo) valore che essa assume su s è maggiore od uguale (minore od uguale) dei valori che assume entro S.*

Ove infatti ciò non fosse, esisterebbe un punto M interno ad S in cui $z(x\,y)$ avrebbe un valore Z maggiore del massimo valore ζ che essa assume su s. Consideriamo la caratteristica r per M, e sia S' la parte di S che si trova al disotto di r. Fissato un numero ε arbitrario, ma tale che $\zeta + \varepsilon < Z$, si consideri in S' l'insieme dei punti in cui è $z(x\,y) > Z - \varepsilon$ e che si possono congiungere con M mediante cammini in cui sia sempre $z(x\,y) > Z - \varepsilon$. Otterremo così un insieme S_1 di punti tutti *interni* ad S — e quindi tali che in essi esistono e sono finite anche le derivate di z — ed affatto analogo a quello di cui si è parlato nel numero precedente: ogni punto dell'insieme potrà considerarsi quale centro di un piccolo rettangolo tutto interno all'insieme medesimo: ed il contorno di esso è formato da uno o più segmenti di r e da un insieme s_1 di punti ancora tutti *interni* ad S, in cui è $z = Z - \varepsilon$. Ma una soluzione di (II) che nei punti di s_1 assume i valori $Z - \varepsilon$ è la costante $Z - \varepsilon$ medesima; e con questa deve quindi coincidere per il teorema del n. 2 la funzione da cui eravamo partiti. Quindi z deve prendere in M il valore $Z - \varepsilon$, il che è contro l'ipotesi che in M sia $z = Z > Z - \varepsilon$. Onde l'enunciato.

4. Il teorema precedente ci permette di estendere alle soluzioni dell'equazione (I) il seguente teorema relativo alle funzioni armoniche.

Se una serie di funzioni soddisfacenti all'equazione (II) *converge uniformemente nei punti di un contorno s come quelli dei numeri precedenti,*

1.° *la serie converge uniformemente in S;*

2.° *la serie rappresenta in S una soluzione di* (II).

Invero la somma dei termini della serie compresi fra l'n-esimo e l'$(n+p)$esimo è ancora una soluzione di (II) che sul contorno s è in valore assoluto inferiore ad una quantità ε_n tendente a zero col crescere di n: e quindi pel teorema precedente è anche all'interno numericamente minore di ε_n: onde risulta intanto la prima parte del nostro enunciato.

Per dimostrare la seconda parte, preso un punto $M \equiv (x_1\,y_1)$ di S si consideri una curva s_1 formata da un segmento di caratteristica $y = y_1 - \delta$ e dai due tratti delle parallele all'asse delle x: $x = x_1 - \delta$, $x = x_1 + \delta$ compresi fra le caratteristiche $y = y_1 - \delta$ ed $y = y_1$: δ si potrà prendere così piccolo che s_1 sia tutto interno ad S; s_1 limita quindi colla $y = y_1$ un campo S_1 in cui la serie converge uniformemente.

I valori assunti da una soluzione z di (II) in S_1 sono pienamente determinati da quelli assunti su s_1: ma in questo caso è ben noto che di più essi possono esprimersi in funzione dei valori di z su s_1 mediante la formula (*)

$$
\begin{aligned}
z(x\,y) = {} & \frac{1}{\delta}\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} z(x', y_1-\delta)\left[\sum_1^\infty e^{-\frac{n^2\pi^2(y-y_1+\delta)}{4\delta^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi(x'-x_1+\delta)}{2\delta}\operatorname{sen}\frac{n\pi(x-x_1+\delta)}{2\delta}\right] dx' \\
& + \frac{\pi}{2\delta^2}\int_{y_1-\delta}^{y}\left\{ z(x_1-\delta, y')\left[\sum_1^\infty n \operatorname{sen}\frac{n\pi(x-x_1+\delta)}{2\delta}\, e^{-\frac{n^2\pi^2(y-y'+\delta)}{4\delta^2}}\right]\right. \\
& \qquad\qquad \left. - z(x_1+\delta, y')\left[\sum_1^\infty n \operatorname{sen}\frac{n\pi(x-x_1-\delta)}{2\delta}\, e^{-\frac{n^2\pi^2(y-y'+\delta)}{4\delta^2}}\right]\right\} dy'.
\end{aligned} \tag{3}
$$

E viceversa se in questa formula a $z(x_1 - \delta, y')$, $z(x_1 + \delta, y')$, $z(x', y_1 - \delta)$ si danno valori arbitrarii, il secondo membro di (3) rappresenta una funzione che in S_1 è soluzione di (II) e su s_1 prende i valori assegnati.

Applichiamo ai singoli termini della serie la formula (3) ed osserviamo che perchè la serie converge uniformemente su s_1, la serie degli integrali è uguale all'integrale della serie: otterremo la somma della serie espressa per i valori che essa assume su s_1 mediante la (3), onde, per quanto sopra si disse, tale somma rappresenterà una soluzione di (II). c. v. d.

5. Il teorema di unicità del n. 2 si può estendere al caso in cui S non sia tutto al finito. Supporrò però in tal caso che il campo non si estenda all'infinito dalla parte delle y negative, talchè possa intendersi sempre che esso sia interno alla striscia compresa fra le rette $y = 0$, ed $y = y_0$. Mi limiterò ad un caso molto particolare di questi campi tanto per mostrare con un esempio quali mutazioni debbano farsi ai precedenti ragionamenti: e cioè al caso in cui s sia formata da un tratto di curva tutto al finito e da un tratto infinito di caratteristica. E per dimostrare che due fun-

(*) Cfr. E. W. Hobson, l. c., pag. 184. e). Ed anche Riemann-Weber, *Partielle Differentialgleichungen*. Vol. II, § 44-48. È chiaro del resto come l'ufficio di questa formula in questa dimostrazione è del tutto accessorio: cfr. il n. 17 e specialmente la seconda nota a pag. 219 ed il n. 31 e la nota relativa a pag. 263.

zioni z_1 e z_2 soluzioni di (I) le quali su s prendano gli stessi valori sono identicamente uguali in S supporrò di più che, detta R la distanza di un punto dall'origine delle coordinate, le funzioni z_1 e z_2 od almeno la funzione $z = z_1 - z_2$, quando il punto si allontana all'infinito, rimangano finite insieme colla loro derivata rapporto ad x, od almeno divengano infinite di ordine non maggiore di $R^{2-\delta}$, δ essendo un numero arbitrario, ma determinato (*).

Dimostreremo più tardi (n. 11) che una funzione z soluzione di (II) che soddisfaccia a queste ipotesi e si annulli sul tratto infinito della caratteristica $y = 0$ appartenente ad s, necessariamente si annulla insieme colle sue derivate quando il punto si allontana all'infinito.

Ammesso *per ora* questo teorema, è facile completare la discussione precedente. Invero si applichi il ragionamento del n. 2 al campo S' limitato da s e dalla retta $x = a$, a essendo una costante arbitraria che si può fare crescere a piacere. Avremo

$$0 = \iint_{S'} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx\,dy + \int z(x\,y_0)^2\,dx - \int_0^{y_0} \left(z\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(a y)} dy,$$

dove il primo integrale lineare devesi intendere esteso al segmento della $y = y_0$ che appartiene ad S'. Ora per il teorema sopra ricordato, quando la

(*) Sarebbe facile mostrare che quando il campo S sia infinito, lo si potrà sempre spezzare mediante caratteristiche in tanti campi parziali per modo che questi campi parziali o siano di quelli notati nel testo, oppure siano di una delle forme seguenti: 1.º la curva s è assintotica alla caratteristica dei punti di ordinata massima del campo, ogni caratteristica diversa da questa ha un segmento finito in S; 2.º la curva s è assintotica alla caratteristica di ordinata minima $y = 0$ un tratto infinito della quale appartiene ad s, tutte le altre caratteristiche hanno in S un tratto finito; 3.º la curva s è assintotica alla $y = 0$ la quale non ha punti interni al campo, e tutte le caratteristiche $y = y_1 < 0$ hanno un segmento infinito interno ad S. Il caso trattato nel testo si può considerare come un caso particolare di questo ultimo.

Basterà dimostrare il teorema di unicità per questi diversi tipi perchè facilmente lo si deduca per i campi più generali (ragionando come più oltre al n.º 7). Quando siamo nel primo dei casi sopra ricordati il teorema di unicità è immediata conseguenza del teorema del n. 2. Negli altri due casi occorre supporre che z e $\frac{\partial z}{\partial x}$ siano limitate in S; allora nel caso 2.º segue senz'altro con un ragionamento analogo a quello del testo il teorema di unicità; e nel caso 3.º lo stesso teorema segue quando si completi convenientemente il teorema del n. 11 che verrà tosto citato nel testo, come è indicato in quel luogo (nota a pag. 205-6). Bastino questi brevi cenni ad indicare quali diverse condizioni si presentino per il diverso comportarsi del campo rispetto alle caratteristiche: non svolgeremo più a lungo queste considerazioni la cui precisa discussione ci distrarrebbe dallo scopo del presente lavoro più di quanto convenga.

costante a cresce, l'ultimo integrale tende a zero poichè il tratto di integrazione rimane sempre finito ($= y_0$) e l'integrando tende a zero; mentre all'opposto gli altri due integrali crescono, oppure restano fissi. Quindi la precedente equazione non può valere che quando sia, in tutto S, $z = 0$. c. v. d.

Ed è chiaro che queste osservazioni potrebbero ancora avere ulteriori estensioni.

6. Tutti questi risultati valgono ancora per l'equazione del calore in più variabili:

$$\Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1\, x_2 \ldots x_n\, y)\,. \left[\Delta_2 u = \sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right]. \tag{III}$$

Basterà osservare che, indicato con C un campo tutto al finito dello spazio ad $n+1$ dimensioni in cui sono coordinate le $x_1\, x_2 \ldots x_n\, y$ e con c la sua ipersuperficie contorno, se supponiamo che c abbia ovunque piano tangente determinato ed indichiamo con $(\widehat{x_i \nu})$ o $(\widehat{y \nu})$ l'angolo che la normale ν alla superficie e diretta verso l'interno di C fa colla direzione positiva dell'asse delle x_i o delle y, e con $d\sigma$ l'elemento della superficie c medesima: si avrà

$$\int\!\!\int_C\!\cdots\!\int \left(\Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y}\right) u\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, dy = -\int\!\!\int_C\!\cdots\!\int \Delta_1 u\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, dy +$$

$$+ \int\!\!\int_c\!\cdots\!\int u \left[\Sigma \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\widehat{x_i \nu}) + \frac{1}{2}\, u\right] d\sigma.$$

E da questa formola segue il teorema di unicità delle soluzioni di (III): le varietà caratteristiche saranno qui gli iperpiani $y = \text{cost.}$: *e presa una ipersuperficie s posta al finito i cui punti abbiano coordinata $y \leq y_0$ che tagli l'iperpiano $y = y_0$ in una varietà chiusa, una soluzione di* (III) *sarà pienamente determinata nel campo racchiuso S da s e dall'iperpiano $y = y_0$ dai valori che essa prende su s.*

Del pari sarà agevole estendere i ragionamenti della seconda parte del n. 2 e di qui trarre il teorema relativo ai massimi ed ai minimi delle soluzioni dell'equazione (III) per $f(x_1\, x_2 \ldots x_n\, y) = 0$.

Ancora varrà la prima parte del teorema del n. 4: una serie di soluzioni dell'equazione $\Delta_2 u = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ convergente in ugual grado su s, è convergente in ugual grado in S: ma non potremo dire senz'altro che lo stesso valga della seconda parte del teorema medesimo, poichè non abbiamo ancora pel caso di più variabili una formula pienamente analoga alla (3)(*): il teorema è tuttavia vero e ciò risulterà da ragionamenti che faremo più tardi (cf. n. 31).

§ 2. Nuove ipotesi sulla natura del contorno.

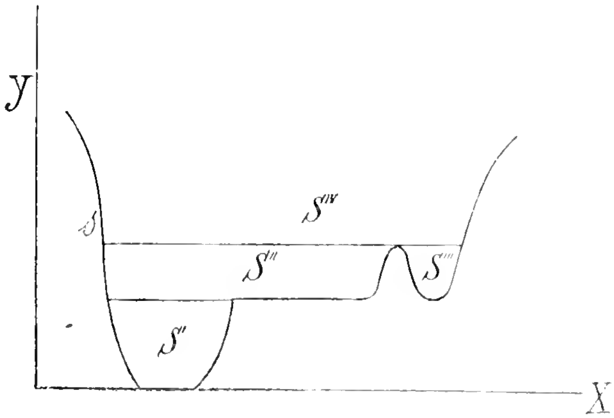
7. Noi ci proponiamo in quanto segue di invertire il *teorema di unicità* stabilito nei numeri precedenti, dimostrando il corrispondente *teorema di esistenza*, dimostrando cioè l'esistenza di una soluzione di (I) che su una curva s prenda valori arbitrariamente assegnati. Conviene perciò premettere lo studio della formula di Green, ma prima ancora è necessario fissare le idee sulla natura del contorno enunciando le ipotesi che potremo o vorremo intendere soddisfatte.

Supporremo che s sia incontrata in uno o due punti soltanto da ogni caratteristica che abbia punti comuni con S: fatta eccezione al più per tutto un segmento di caratteristica che può appartenere ad s medesimo. Supporremo che tale tratto di caratteristica appartenga a quella posta più in basso fra le caratteristiche che hanno punti comuni con S. Queste restrizioni non sono essenziali: perchè ove non fossero soddisfatte si potrà spezzare il campo S mediante caratteristiche in tanti campi parziali S', S'', S''',... che soddisfacciano alle condizioni precedenti e il cui contorno sia formato da pezzi del contorno primitivo e da tratti di caratteristica: questi compariranno ad un tempo quali limitanti superiormente un campo $S^{(i)}$ ed inferiormente un campo $S^{(j)}$ con $j > i$. Una tale decomposizione è indicata nella figura qui annessa. Ed il problema di determinare la funzione nel campo S si ridurrà a quello della *successiva* determinazione di essa nei campi $S'\,S''\,S'''$...: poichè i valori che prende la funzione in quei tratti di caratteristica che appartengono al contorno di $S^{(j)}$ e non appartengono ad s, sono già determinati dai valori che la funzione prende negli $S^{(i)}$ per $i < j$.

Quando il campo si estenda all'infinito, noi supporremo anche qui che

(*) Sarebbe forse possibile dedurla dalle dimostrazioni dei teoremi di esistenza citati in fine dell'introduzione, ma ciò non ci pare opportuno, perchè la deduzione del n. 31 è più consona coi nostri metodi.

esso sia limitato da una curva tutta al finito e da un tratto infinito di caratteristica, o che a questo tipo ci si possa ridurre spezzando convenientemente il campo mediante caratteristiche in modo analogo al precedente: supporremo allora che il tratto di curva al finito sia incontrato dalle rette caratteristiche una sola volta.



Non tratteremo il caso in cui il campo sia un semipiano e cioè sia limitato da una caratteristica intera: la soluzione di esso è ben nota (*).

Per le nostre ipotesi possiamo dunque supporre che il campo sia tutto nel semipiano delle y positive ed anzi che la caratteristica posta più in basso tra quelle aventi punti comuni col campo, sia proprio l'asse delle x: chiameremo il campo di *prima specie*, se non ha che un punto comune all'asse delle x, (se cioè al contorno non appartiene alcun tratto di caratteristica), di ***seconda specie*** se al contorno appartiene un tratto infinito dell'asse delle x, di *terza specie* se il campo è infinito.

Se il contorno è di prima o di seconda specie la curva s si compone di due tratti s_1 ed s_2 compresi fra le caratteristiche $y=0$ ed $y=y_1$ ed eventualmente di un tratto k dell'asse x: su s_1 si avrà $x=\xi_1(y)$, su s_2 $x=\xi_2(y)$, ξ_1 e ξ_2 essendo funzioni finite e continue e ad un solo valore di y, le quali fatta al più eccezione per un numero finito di punti hanno derivata rapporto ad y: supporremo $\xi_1(y)<\xi_2(y)$: in altri termini s_1 è la parte del

(*) Cfr. Riemann-Weber, l. c., Vol. II, § 36; Hobson, l. c., pag. 186-7, *c*); e pel caso di più dimensioni, Hobson, l. c., pag. 195, *d*).

contorno posta a sinistra, s_2 quella posta a destra. Se il contorno è di prima specie si ha $\xi_1(0) = \xi_2(0)$, se di seconda $\xi_1(0) < \xi_2(0)$.

Se il contorno è di terza specie esso è formato da un tratto di curva s_1 su cui $x = \xi_1(y)$ e da un tratto infinito della caratteristica $y = 0$ (*).

Indicheremo con $s(y_1)$, $s_1(y_1)$, $s_2(y_1)$, $S(y_1)$ le parti di s, s_1, s_2, S che si trovano al disotto della caratteristica $y = y_1$: i teoremi dei numeri precedenti ci dicono che i valori di una soluzione di (I) o di (II) in $S(y_1)$ sono determinati dai valori che essa prende su $s_1(y_1)$. Con $s_1(y_1)$ ed $s_2(y_1)$ indicheremo anche talora le lunghezze di $s_1(y_1)$ ed $s_2(y_1)$ a partire dai punti $\xi_1(0)$, $\xi_2(0)$.

Alle condizioni precedenti occorre aggiungere una condizione che avremo da richiamare sovente, per quanto essa non riesca poi essenziale nei risultati finali: la chiameremo *condizione* (α): per essa supporremo che esista un numero positivo H tale che, presi due punti qualunque di s_1 [o di s_2] di coordinate $(\xi_1(y)\, y)$ e $(\xi_1(y_1)\, y_1)$ [$(\xi_2(y)\, y)$ e $(\xi_2(y_1)\, y_1)$] si abbia sempre

$$\left|\frac{\xi_1(y) - \xi_1(y_1)}{y - y_1}\right| < H, \qquad \left|\frac{\xi_2(y) - \xi_2(y_1)}{y - y_1}\right| < H.$$

Risulta di qui che *si avrà pure* $|\xi'_1(y)| < H$, $|\xi'_2(y)| < H$: in particolare le curve s_1 ed s_2 non saranno mai tangenti ad una caratteristica.

§ 3. La formula di Green.

8. Premesso ciò, prima di procedere occorre richiamare una notevole formula che nella presente teoria compie l'ufficio della formula di Green per le funzioni armoniche. Si supponga che la $z(x\, y)$ soddisfaccia alla (I) e sia

(*) Se volessimo considerare pure i casi degli altri contorni infiniti della nota al n. 5 dovremmo chiamare di *quarta*, *quinta*, *sesta* specie i campi là osservati: i campi di quarta specie sarebbero come quelli di seconda con questo solo che delle funzioni $\xi_1(y)$ e $\xi_2(y)$ una almeno dovrebbe diventare infinita per $y = y_0$: i campi di quinta specie sarebbero limitati da un tratto k di caratteristica e da due tratti di curva s_1 ed s_2 su cui $x = \xi_1(y)$ e $x = \xi_2(y)$, ma $\xi_1(y)$ e $\xi_2(y)$ diverrebbero, uno almeno, infiniti per $y = 0$; i campi di sesta specie sarebbero limitati da una curva s, per cui $x = \xi_1(y)$ e $\xi_1(0) = -\infty$.

$v(x\,y)$ una soluzione dell'*equazione aggiunta* di (II)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{IV}$$

Si avrà coi soliti processi di integrazione per parti

$$\iint_C v\,f(x\,y)\,d\,x\,d\,y=\int_c\left[v\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial v}{\partial x}\right]d\,y-\int_c v\,z\,d\,x, \tag{1}$$

C e c avendo qui lo stesso significato che al n. 2: e sempre intendendo negli integrali curvilinei del secondo membro, che c sia percorso nel verso positivo rapporto all'area C. Naturalmente occorrerà che v e z soddisfacciano in C e su c alle condizioni 1.° e 2.° del n. 2. E propriamente non sarà neppure strettamente necessario che queste condizioni siano soddisfatte ovunque su c: potranno fare eccezione alcuni punti del contorno: purchè avvenga che gli integrali del secondo membro conservino sempre un senso determinato.

E questa formola vale ancora quando C sia infinito ma, come supponiamo sempre, compreso fra due caratteristiche $y=0$, $y=y_0$, purchè v e z siano tali che col tendere di x all'infinito $v\,f(x\,y)$ e $v\,z$ tendano a zero di ordine $>\frac{1}{R}$, e $v\frac{\partial z}{\partial x}$, $z\frac{\partial v}{\partial x}$, tendano semplicemente a zero.

9. Assumeremo quale funzione $v(x\,y)$ la funzione definita da

$$\left.\begin{aligned} v(x\,y;\,x'\,y') &= \frac{1}{\sqrt{y'-y}}\,e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}} && \text{per}\quad y'>y \\ v(x\,y;\,x'\,y') &= 0 && \text{per}\quad y'<y. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Questa funzione soddisfa evidentemente a (IV) considerata come funzione di x ed y, a (II) considerata come funzione di $(x'\,y')$: si ha $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x'}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y'}$.

Essa ha un punto singolare in $(x\,y)\equiv(x'\,y')$: studiamo un poco più davvicino questa singolarità. Anzi più in generale consideriamo la funzione

$$h_{\alpha\beta}(x\,y;\,x'\,y')=\frac{(x'-x)^\alpha}{(y'-y)^\beta}\,e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\quad(y'\geq y). \tag{3}$$

di cui $r(xy;\ x'y')$ è un caso particolare corrispondente ad $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$.

Queste funzioni sono tutte finite nei punti in cui $(xy) \neq (x'y')$, e nei punti in cui $y = y'$ ma $x \neq x'$ esse si annullano insieme con tutte le loro derivate. Nell'intorno dei punti in cui $(xy) = (x'y')$ esse assumono (almeno quando $2\beta - \alpha > 0$) sia valori grandi a piacere, sia valori piccoli a piacere: invero, se con r indichiamo la distanza del punto (xy) dal punto $(x'y')$, esistono curve passanti per $(x'y')$ e tali che, quando (xy) si avvicina ad $(x'y')$ lungo di esse, $h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y')$ cresce dell'ordine di $\frac{1}{r^{2\beta-\alpha}}$ — tali sono ad esempio le parabole $(x - x')^2 = k(y' - y)$, k essendo una costante positiva finita arbitraria —, mentre esistono curve — quali la retta $y = y'$ od anche le parabole di ordine superiore al secondo $(x - x')^m = k(y' - y)$ $(m > 2)$, od infine se $\alpha > 0$ la retta $x = x'$, — su cui la funzione è sempre nulla o tende allo zero quando (xy) tende ad $(x'y')$. Ci importa però di osservare che, quando il punto (xy) tende al punto $(x'y')$ muovendo su una linea che soddisfi alla condizione (a) del n. 7, $h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y')$ resterà sempre inferiore ad una quantità della forma $H \frac{1}{(y' - y)^{\beta-\alpha}}$.

Dimostreremo più tardi (*) che la funzione $h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y')$ è assolutamente integrabile quando $\alpha + 1 > 0$, $3 + \alpha - 2\beta > 0$; ora ci basti osservare che essa è assolutamente integrabile quando $\alpha > 0$, $2 + \alpha - 2\beta > 0$, poichè si ha, osservando che $r > |x' - x|$,

$$h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y') < \frac{r^{\alpha}}{(y' - y)^{\beta}}\, e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)} + \frac{y'-y}{4}} =$$

$$= \frac{1}{r^{2\beta-\alpha}}\, e^{\frac{y'-y}{4}} \left|\left(\frac{r^2}{y' - y}\right)^{\beta} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}\right| \leq \frac{l}{r^{2\beta-\alpha}},$$

l indicando una costante finita.

Si noti infine che quando il punto (xy) si allontana all'infinito restando sempre entro la striscia compresa fra $y = 0$ ed $y = y_0$ (quando cioè x cresce all'infinito) $h_{\alpha\beta}(xy;\ x'y')$ tende a zero di ordine $> \frac{1}{R^{\delta}}$, R essendo la distanza di (xy) dall'origine e δ essendo un numero arbitrario, ma fissato. E lo

(*) Cfr. n. 22. Ed anche per ulteriori studii analoghi cfr. n. 27.

stesso vale per le derivate di $h_{\alpha\beta}(x\,y;\;x'\,y')$, poichè basta osservare che le derivate di $h_{\alpha\beta}(x\,y;\;x'\,y')$ sono somme di funzioni dello stesso tipo di $h_{\alpha\beta}(x\,y;\;x'\,y')$.

10. Applichiamo dunque la (1) del n. 8 assumendo quale funzione $v(x\,y)$ la $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')$, e quale campo C il campo $S(y'-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$: in $S(y'-\varepsilon)$ la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')$ è regolare.

Osservando che

$$\frac{\partial h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')}{\partial x}=\frac{1}{2}\,h_{1\frac{3}{2}}(x\,y;\;x'\,y')=h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')\,\frac{x'-x}{2(y'-y)}\,,$$

avremo

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\xi_1(y'-\varepsilon)}^{\xi_2(y'-\varepsilon)} z(x\,y'-\varepsilon)\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\varepsilon}}\,d\,x=\\&\qquad=\int_{s(y'-\varepsilon)}\left|h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')\,\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{2}\,h_{1\frac{3}{2}}(x\,y;\;x'\,y')\,z\right|d\,y\\&\qquad+\int_{s(y'-\varepsilon)}h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')\,z\,d\,x-\iint_{S(y'-\varepsilon)}h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')\,f(x\,y)\,d\,x\,d\,y.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

dove il contorno s devesi intendere percorso nel senso positivo rapporto ad S.

E per l'osservazione finale del n. 9, la formula precedente sarà ancora valida quando il campo sia di terza specie, purchè, quando x cresce all'infinito, la funzione z e le sue derivate rimangano finite od almeno crescano di ordine $< R^{\delta}$, dove δ è un numero arbitrariamente grande, ma determinato.

Facciamo tendere ε a zero. Per una osservazione del n. 9 la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')$ è assolutamente integrabile: quindi l'integrale di area del secondo membro di (4) ha per limite l'integrale medesimo esteso ad $S(y')$. Quanto agli integrali curvilinei del secondo membro essi hanno pure per limite gli integrali medesimi estesi ad $s(y')$. Ciò è chiaro quando il punto $(x'\,y')$ non appartiene ad s poichè allora l'integrando è sempre finito. Quando il punto $(x'\,y')$ appartiene ad s occorre invece supporre che la curva medesima soddisfaccia alla condizione (α), poichè in tali ipotesi per le osservazioni del n. 9 sarà

$$\left| h_{0\,\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{y'-y}} \leq H^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x'-x}} \qquad \left| h_{1\,\frac{3}{2}}(x\,y;\,x'\,y') \right| \leq \frac{H}{\sqrt{y'-y}} \, .$$

e quindi entrambe le funzioni sotto il segno di integrale negli integrali curvilinei del secondo membro di (4) rimangono integrabili sia rapporto ad x che rapporto ad y anche nel punto $(x\,y) = (x'\,y')$. Non resta quindi che da cercare il limite dell'integrale del primo membro. È noto come esso si ottenga: si introduca una nuova variabile $t = \frac{x'-x}{2\sqrt{\varepsilon}}$: esso diviene

$$2 \int_{\frac{x'-\xi_2(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{x'-\xi_1(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}}} z(x'-2t\sqrt{\varepsilon},\; y'-\varepsilon)\, e^{-t^2}\, dt. \tag{6}$$

Quando ε tende a zero, questo integrale ha per limite $2\sqrt{\pi}\, z(x'\,y')$ se x' è interno all'intervallo $\xi_1(y') \ldots \xi_2(y')$, poichè allora $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_1(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} = -\infty$ e $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_2(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} = \infty$: ha per limite 0 se $(x'\,y')$ è esterno all'intervallo $\xi_1(y') \ldots \xi_2(y')$, poichè allora $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_1(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} = \lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_2(y'-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} = \pm\infty$: ed infine, se $(x'\,y')$ è sulla curva s e se questa soddisfa nell'intorno di $(x'\,y')$ alla condizione (α), esso tende a $\sqrt{\pi}\, z(x'\,y')$, perchè, se ad esempio $(x'\,y') = (\xi_1(y')\,y')$ si avrà in virtù della condizione (α) $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_1(y'-\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = 0$ e $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{x'-\xi_2(y'-\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = \infty$ (*).

(*) Tale proposizione è notissima. Cfr. ad es. Riemann-Weber, l. c., Vol. II, § 36. Del resto più oltre io ho dimostrato per disteso il teorema analogo per il caso di 2 variabili: ed i ragionamenti là usati si possono ripetere in questo luogo. Cfr. la nota al n. 26.

Riassumendo, da quanto precede otterremo:

$$\left.\begin{array}{ll} (7)_1 & 2\sqrt{\pi}\, z\,(x'\,y') \\ (7)_2 & \sqrt{\pi}\, z\,(x'\,y') \\ (7)_3 & 0 \end{array}\right\} = \int\limits_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y') \left\{ \left[\frac{\partial z}{\partial x} - z\,\frac{x - x'}{2\,(y' - y)}\right] d\,y - z\,d\,x \right\} + \iint\limits_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\, f\,(x\,y)\, d\,x\, d\,y\,;$$

e la formula $(7)_1$ vale se $(x'\,y')$ è in S, la $(7)_2$ quando $(x'\,y')$ è su s ed s soddisfa alla condizione (α), la formula $(7)_3$ quando $(x'\,y')$ è fuori di S.

Si noti ancora che la formula (4) ha senso, e vale tutta la deduzione successiva, solo quando $y' > 0$: tuttavia potremo dire che quando $(x'\,y')$ tende al punto $(x'_1\,0)$ dell'asse delle x il valore del secondo membro di (4) è $2\sqrt{\pi}\, z\,(x'_1\,0)$, se $(x'\,y')$ tende a $(x'_1\,0)$ restando sempre entro S; a $\sqrt{\pi}\, z\,(\xi_1\,(0)\,0)$ o a $\sqrt{\pi}\, z\,(\xi_2\,(0)\,0)$, se il punto $(x'\,y')$ muove su s_1, o su s_2: a 0 se $(x'\,y')$ resta sempre fuori di S.

Ed infine si osservi che anche le formole (7), così come già si osservò per la (4) valgono ancora se il campo è di terza specie, purchè z e le sue derivate restino finite oppure crescano di ordine $< R^{\delta}$ quando x cresce indefinitamente.

11. La formula (7) ci permette di completare un punto che al n. 5 avevamo lasciato in sospeso; poichè da essa immediatamente risulta che una soluzione $z\,(x\,y)$ di (II) che in un campo di terza specie si annulli sulla caratteristica che limita inferiormente il campo, e di cui si supponga solo che all'infinito cresca di ordine minore di R^{δ}, necessariamente si annulla all'infinito. Infatti si chiami, come si disse, s_1 il tratto di s, tutto al finito, che non appartiene alla caratteristica $y = 0$: applicando alla nostra funzione la $(7)_1$ avremo, ricordando che su s è $z = 0$ e sulla caratteristica $y = 0$ è $d\,y = 0$, $z = 0$

$$z\,(x'\,y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{s_1(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\, \frac{\partial z}{\partial x}\, d\,y.$$

Ora, se ricordiamo che quando, $(x\,y)$ restando al finito (per es.: su $s_1\,(y')$), $(x'\,y')$ si allontana indefinitamente $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')$ tende a zero di ordine $> \dfrac{1}{R^{\delta_1}}$ dove δ_1 è un numero arbitrario, evidentemente dalla formula precedente segue l'asserto (*).

(*) Come abbiamo già accennato al n. 5, quando il campo sia di sesta specie si ha un teorema analogo. Allora s è asintotica all'asse delle x: e si può affermare che, tosto che

12. Ma la formula (7) ci permette di trovare altre conseguenze notevoli.

Applichiamola ponendo per $z(x'y)$ una costante qualunque: ad es.: ponendo $z(xy) = 1$: si avrà una formula analoga a quella di Gauss:

$$
\begin{array}{ll}
(8) & 2\sqrt{\pi} \\
(8)_{-} & \sqrt{\pi} \\
(8) & 0
\end{array}
\left\{ \quad = \int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') \left[\frac{x' - x}{2(y' - y)}\, dy - dx \right] . \right.
$$

si suppone che z e le sue derivate siano finite anche all'infinito e che z sia nulla su s, presi due numeri σ ed η positivi piccoli a piacere, si può trovare un numero x_0 tale che per $y \geqq \eta$, $x > x_0$ sia $z(xy) < \sigma$. Invero da (7) segue ancora che si ha

$$z(x'y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') \frac{\partial z}{\partial x}\, dy .$$

Ora si indichi con m il massimo valore di $\frac{\partial z}{\partial x}$; essendo s asintotica ad $y = 0$ si potrà trovare un valore a tanto grande che pel tratto $\bar{s}$ di s a destra della $x = a$ sia $y < \eta$ e

$$\left| \int_{\bar{s}} \frac{1}{\sqrt{\eta - y}}\, dy \right| < \frac{\sqrt{\pi}\,\sigma}{m} .$$

Si spezzi allora s in due parti: $\bar{s}$ ed $s - \bar{s}$; osservando che, se $y' \geqq \eta$ e se (xy) è su $\bar{s}$, si ha

$$|h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')| < \frac{1}{\sqrt{y' - y}} < \frac{1}{\sqrt{\eta - y}} ,$$

si ottiene per $y' \geqq \eta$, qualunque sia x'

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\bar{s}} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') \frac{\partial z}{\partial x}\, dx < m \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\bar{s}} \frac{1}{\sqrt{\eta - y}}\, dy < \frac{\sigma}{2} .$$

Resta allora a considerarsi $\int_{s-\bar{s}} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') \frac{\partial z}{\partial x}\, dy$; ma siccome $s(y') - \bar{s}$ è tutto al finito è chiaro che si può prendere x_0 tanto grande che per $x' \geqq x_0$ sia

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s-\bar{s}} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') \frac{\partial z}{\partial x}\, dy < \frac{\sigma}{2} .$$

Sommando queste due disuguaglianze si dedurrà dalla formula precedente $z(x'y') < \sigma$, tosto che $y' \geqq \eta$ $x' \geqq x_0$. E questo teorema serve facilmente a dimostrare il teorema di unicità pei campi di sesta specie.

Spezziamo $s(y')$ nelle tre parti $s_1(y')$, k, $s_2(y')$ (*), ed osserviamo che le funzioni

$$\int\limits_{s_1(y')} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')\left[\frac{x' - \xi_1(y)}{2(y' - y)}\, d\, y - d\, x\right],\quad \int\limits_{s_2(y')} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_2(y)\, y;\ x'\, y')\left[\frac{x' - \xi_2(y)}{2(y' - y)}\, d\, y - d\, x\right],$$

$$\int\limits_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} h_{0\frac{1}{2}}(x\, 0;\ x'\, y')\, d\, x,$$

sono finite e continue in tutti i punti $(x'\, y')$ che non sono rispettivamente punti di $s_1(y')$, $s_2(y')$, k; si deduce allora da (8):

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{y'=y_1 \\ x'=\xi_1(y_1)\pm 0}} \int\limits_0^{y'} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')\left[\frac{x' - \xi_1(y)}{2(y' - y)} - \xi'_1(y)\right] d\, y \\ &= \pm\sqrt{\pi} + \int\limits_0^{y_1} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\, y;\ \xi_1(y_1)\, y_1)\left[\frac{\xi_1(y_1) - \xi_1(y)}{2(y_1 - y)} - \xi'_1(y)\right] d\, y \text{ (**)}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

purchè si supponga $y_1 > 0$. Su questa formula debbono prendersi contemporaneamente i segni superiori od inferiori. Ed una formula analoga si ha quando si sostituisca $\xi_2(y)$ a $\xi_1(y)$. La convergenza al limite è superficialmente uniforme.

Ma possiamo dire di più. Si osservi che la funzione

$$\int\limits_0^{y'} h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')\, \xi'_1(y)\, d\, y.$$

è anche essa finita e continua ovunque, anche su s_1: basti osservare che l'integrando è sempre in modo inferiore ad $\frac{H}{\sqrt{y' - y}}$. Si potrà quindi sem-

---

(*) È chiaro che quando il campo sia di prima o terza specie (o quarta o quinta o sesta specie) qualcuno di questi integrali può mancare.

(**) Col simbolo $\lim\limits_{\substack{y=y_1 \\ x'=\xi_1(y_1)\pm 0}}$ intendo che il limite indicato è preso, quando il punto $(x'\, y')$ tende al punto $(\xi_1(y_1)\, y_1)$ per modo che per ogni valore di y' sia $\xi_1(y') < x'$ oppure $\xi_1(y') > x'$.

plificare la (9) e scrivere:

$$\lim_{\substack{y'=y_1 \\ x'=\xi_1(y_1)\pm 0}} \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\, y;\, x'\, y')\, d\, y = \pm 2\sqrt{\pi} + \int_0^{y_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\, y;\, \xi_1(y_1)\, y_1)\, d\, y. \qquad (10)$$

13. Terminiamo questo paragrafo con alcune osservazioni circa la possibilità per definire una funzione analoga a quella di Green: quello che segue non è essenziale pel seguito: solo mi pare possa utilmente servire ad illuminare il problema. Se nella (I) del n. 8 ponessimo per v in luogo di $h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\, x'\, y')$ una funzione della forma $h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\, x'\, y') + \psi(x\, y;\, x'\, y')$, dove $\psi(x\, y;\, x'\, y')$ fosse una soluzione di (IV) nulla essa pure su tutta la $y = y'$, si potrebbe dedurre una formula analoga a (7). E si è indotti a pensare se non è possibile usufruire dell'arbitrario che si ha in $\psi(x\, y;\, x'\, y')$ per fare in modo che nella (7) scompaiano i termini in $\dfrac{\partial z}{\partial x}$: la (7) ci permetterebbe allora di esprimere la funzione $z(x\, y)$ in S per mezzo dei valori che prende su s: ed il teorema di esistenza si ridurrebbe a studiare se inversamente la funzione ottenuta, ponendo delle funzioni arbitrarie per i valori di z su s soddisfa realmente entro S ad (I) e prende su s i valori assegnati.

A tale scopo occorrerebbe scegliere ψ per modo che su s_1 ed s_2 prenda i valori $-h_{0\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\, y;\, x'\, y')$ e $-h_{0\frac{1}{2}}(\xi_2(y)\, y;\, x'\, y')$. Applichiamo a (IV) i risultati del § 1: noi vediamo che queste condizioni insieme con quella che ψ sia nulla su $y = y'$ determinano la ψ. Ma vi è qualcosa di più: se il contorno è di terza o di seconda specie la determinazione di ψ è un problema affatto analogo a quello che ci proponiamo: ma se il contorno è di prima specie le condizioni imposte a ψ sono in certo modo *sovrabbondanti* poichè ne sono assegnati i valori sopra un contorno *chiuso*. Ed è a prevedere che tali condizioni ci porteranno in generale ad una funzione ψ la quale ha un punto singolare nel punto comune all'asse delle x ed al contorno. Come osservammo al n. 8 non perciò la formula (I) cesserà necessariamente di essere applicabile: tuttavia si richiederanno speciali considerazioni. Questa osservazione vale a farci intuire la ragione intima della maggiore difficoltà che presentano i contorni di prima specie in confronto di quelli di terza e di seconda specie: e giustificano fin d'ora la distinzione da noi introdotta (*).

(*) Cfr. ancora a proposito della funzione di Green il § 7.

§ 4. Teoremi preliminari.

14. È opportuno riassumere ora brevemente il concetto che seguiremo nella nostra ricerca. Consideriamo la formola (7) del paragrafo precedente: l'integrale curvilineo è funzione che soddisfa l'equazione (II) mentre il primo membro soddisfa l'equazione (I). È quindi da prevedere che l'integrale di area che compare in essa è soluzione dell'equazione (I): noi dimostreremo più tardi (§ 8) questa affermazione: ammettendo ciò per il momento è chiaro che la ricerca della soluzione di (I) che abbia dati valori al contorno si riduce alla ricerca analoga per l'equazione (II).

Limitiamoci a questo caso: supponiamo che i valori assegnati per z al contorno formino una catena continua: indichiamo con $\varphi_1(y)$, $\varphi(x)$, $\varphi_2(y)$ i valori dati su s_1, k, s_2: sarà $\varphi_1(0) = \varphi(\xi_1(0))$, $\varphi_2(0) = \varphi(\xi_2(0))$. Naturalmente una di queste funzioni mancherà se il contorno è di terza o di prima specie.

Possiamo ancora semplificare le condizioni del problema: possiamo cioè supporre $\varphi(x) = 0$. Poichè, ove ciò non fosse, sia $\Phi(x)$ una funzione definita sull'asse delle x tra $-\infty$ e $+\infty$ finita e continua che su k coincida con $\varphi(x)$: la formula

$$\zeta(x'y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_{0\frac{1}{2}}(x\,0;\; x'y')\,\Phi(x)\,dx.$$

definisce una funzione in tutto il semipiano delle y' positive, soluzione di (II), la quale si riduce sull'asse delle x alla funzione $\Phi(x)$. La ricerca della funzione $z(x'y')$ si può quindi ridurre alla ricerca della funzione $\bar{z}(x'y') = \zeta(x'y') - z(x'y')$ che su s_1, k, s_2 si riduce rispettivamente a $\bar{\varphi}_1(y) = \zeta(\xi_1(y)\,y) - \varphi_1(y)$, 0, $\bar{\varphi}_2(y) = \zeta(\xi_2(y)\,y) - \varphi_2(y)$ (*). Quindi si può sempre supporre che sia $\varphi(x) = 0$ e che $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$ si annullino per $y = 0$.

(*) Si noti che se $|\varphi(x)| < M$, $|\varphi_1(y)| < M$, $|\varphi_2(y)| < M$, anche dopo questa trasformazione del problema è $|\bar{\varphi}_1| < 2M$, $|\bar{\varphi}_2| < 2M$. Invero si può supporre che sia $|\Phi(x)| < M$ e allora per il teorema del n. 2 sarà $|\zeta| < M$ onde l'asserto. — Analogamente se esistono $\varphi'_1(y)$ e $\varphi'_2(y)$ e si ha $|\varphi'_1(y)| < M_1$ e $|\varphi'_2(y)| < M_1$ si avrà che anche le funzioni $\bar{\varphi}'_1(y)$, $\bar{\varphi}'_2(y)$ esistono e sono finite anche in prossimità di $y = 0$ purchè si supponga che nell'intorno dei punti $(\xi_1(0)\,0)$ e $(\xi_2(0)\,0)$ la funzione $\varphi(x)$ abbia derivate prime e seconde finite. Invero si potrà supporre che

Ciò posto, noi cercheremo di porre la funzione sotto la forma

$$z(x'y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y : x'y')\,\psi_1(y)\,dy \right. \qquad \qquad (1)$$

$$\left. - \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y : x'y')\,\psi_2(y)\,dy\right\}.$$

$\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ essendo funzioni da determinarsi convenientemente. Questa formula rappresenta una funzione soluzione di (II) che in ogni punto dell'asse delle x diverso da $(\xi_1(0)\,0)$ $(\xi_2(0)\,0)$ è, certo nulla.

D'altra parte la formula (10) del n. 12 ci fa prevedere che gli integrali che qui compaiono godono delle proprietà degli integrali di doppio strato: e che, quindi, in modo analogo a quanto avviene nel metodo di Neumann, quando si cerchi di esprimere l'unica condizione che ancora deve soddisfare la $z(x\,y)$ e cioè che su s_1 ed s_2 si riduca a $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$, saremo portati ad una equazione integrale del tipo di Fredholm.

Nel presente paragrafo io mi propongo di studiare più davvicino gli integrali che compaiono in (1) per confermare in modo rigoroso le presunzioni qui esposte.

15. Considériamo dunque l'integrale

$$\int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y : x'y')\,\psi_1(y)\,dy. \qquad (2)$$

Ricordiamo anzitutto che come già si vide al n. 10, questo integrale ha un senso anche quando il punto $(x'y')$ è su s_1, purchè s_1 soddisfaccia alla condizione (α). Ed anzi se il massimo modulo di ψ_1 è M poichè

$$\left| h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y')\,y')\right| \leq \frac{H}{\sqrt{y'-y}} \qquad (3)$$

anche la $\Phi(x)$ soddisfaccia a queste condizioni, ed allora sarà facile vedere che la ζ ammette su tutto s_1 ed s_2 derivate prime e seconde rapporto ad x finite, e quindi per la (II) anche derivata rapporto ad y finita: onde ricordando che s_1 ed s_2 hanno tangente, otterremo che anche $\varphi'_1(y)$ e $\varphi'_2(y)$ sono finite. E per simile via in generale è facile vedere quali limitazioni porti alle primitive funzioni $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ e $\varphi(x)$ il fare determinate ipotesi sulle $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$.

si avrà evidentemente

$$\left| \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\, y;\ \xi_1(y')\, y')\, \psi_1(y)\, d\,y \right| < 2\, M\, H \sqrt{y}\,. \tag{4}$$

Supponiamo ora che la $\psi_1(y)$ sia anche continua, vogliamo mostrare che allora

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{y'=y'_1 \\ x'=\xi_1(y'_1)\pm 0}} & \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')\, \psi_1(y)\, d\,y = \\ & = \pm 2 \sqrt{\pi}\, \psi_1(y'_1) + \int_0^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\, y;\ \xi_1(y'_1)\, y'_1)\, \psi_1(y)\, d\,y. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Quando la funzione $\psi_1(y)$ sia una costante la (5) non è che una conseguenza evidente della (10) § 3 e quindi è già stata dimostrata: in particolare quindi noi già sappiamo che

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{y'=y'_1 \\ x'=\xi_1(y'_1)\pm 0}} & \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')\, \psi_1(y'_1)\, d\,y = \\ & = \pm 2 \sqrt{\pi}\, \psi_1(y'_1) + \int_0^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\, y;\ \xi_1(y'_1)\, y'_1)\, \psi_1(y'_1)\, d\,y. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Sottraendo (6) da (5), noi vediamo che basta dimostrare la (5) per la funzione $\psi_1(y) - \psi_1(y'_1)$: in altri termini che si può supporre $\psi_1(y'_1) = 0$, nel qual caso essa si riduce a

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{y'=y'_1 \\ x'=\xi_1(y'_1)\pm 0}} & \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\, y;\ x'\, y')\, \psi_1(y)\, d\,y = \\ & = \int_0^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}} (\xi_1(y)\, y;\ \xi_1(y'_1)\, y'_1)\, \psi_1(y)\, d\,y. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

4

Sia σ un numero arbitrario: si prenda un intervallo $y'_1 - \delta \dots y'_1 + \delta$ tale che, se y è interno ad esso, sia

$$\psi_1(y) < \sigma, \tag{8}$$

e che inoltre quando y' è fra $y'_1 - \delta$ ed $y'_1 + \delta$ sia

$$\int_{y'_1-\delta}^{y'} \frac{1}{\sqrt{y'-y}}\, d\, y = 2\Big[\sqrt{y'-y}\Big]_{y'}^{y'_1-\delta} \leq 2\sqrt{2\delta} < \sigma. \tag{9}$$

Si supponga infine che $(x'\,y')$ sia tanto prossimo a $(\xi_1(y'_1)\,y'_1)$ che y' sia compreso fra $y'_1 - \delta$ e $y'_1 + \delta$ e che si abbia:

1.° quando y è nell'intervallo $0 \dots y'_1 - \delta$

$$\left| h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y') - h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y'_1)\,y'_1)\right| < \frac{\sigma}{y'_1}\cdot \tag{10}$$

ciò si può fare poichè quando y è in tale intervallo $h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')$ è funzione continua di y' nell'intorno di $(\xi_1(y'_1)\,y'_1)$:

$$2.° \quad \left|\int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y')\, d\, y - \int_0^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y'_1)\,y'_1) \mp 2\sqrt{\pi}\right| < \sigma, \tag{11}$$

anche questa disuguaglianza si può soddisfare quando $(x'\,y')$ sia convenientemente vicino a $(\xi_1(y'_1)\,y'_1)$, perchè vale la (10) del § 3.

Spezziamo gli integrali del primo e del secondo membro di (7) in due parti, l'una estesa da 0 a $y'_1 - \delta$, l'altra da $y'_1 - \delta$ a y' od a y'_1 rispettivamente. Per (10) si avrà

$$\int_0^{y'_1-\delta}\left| h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ x'\,y') - h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y'_1)\,y'_1)\right| \psi_1(y)\, d\, y < \sigma M \tag{12}$$

M essendo il massimo modulo di $\psi_1(y)$. In secondo luogo si ha per (3), (8) e (9)

$$\left|\int_{y'_1-\delta}^{y'_1} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y'_1)\,y'_1)\,\psi_1(y)\, d\, y\right| < \sigma H \int_{y'_1-\delta}^{y'_1} \frac{1}{\sqrt{y'_1-y}}\, d\, y \leq \sigma^2 H. \tag{13}$$

Non resta quindi che ad esaminare il secondo degli integrali in cui fu spezzato il primo membro di (7): si ha per esso

$$\left.\begin{aligned}&\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y-(x'-\xi_1(y'))\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y\\&\qquad+\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\,\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,\frac{\xi_1(y')-\xi_1(y)}{y'-y}\,\psi_1(y)\,d\,y.\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Ma per la solita condizione (α), da (8) e (9) si ottiene:

$$\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\,\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,\frac{\xi_1(y')-\xi_1(y)}{y'-y}\,\psi_1(y)\,d\,y<H\,\sigma\int_{y'_1-\delta}^{y'}\frac{1}{\sqrt{y'-y}}\,d\,y<H\,\sigma.\quad(15)$$

Resta il primo integrale del secondo membro di (14): osserviamo che $h_{0\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')$ è essenzialmente positiva; dedurremo allora per (8):

$$\left.\begin{aligned}&(x'-\xi_1(y'))\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y\leq\\&\leq\sigma\,|x'-\xi_1(y')|\int_{y'_1-\delta}^{y'} h_{0\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)y;\,x'y')\,d\,y\leq\sigma\,|x'-\xi_1(y')|\int_0^{y'} h_{0\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,d\,y.\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

D'altro canto operando sul primo integrale di (11) allo stesso modo che sull'integrale (14), si ha.

$$\left.\begin{aligned}&[x'-\xi_1(y')]\int_0^{y'} h_{0\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,d\,y+\\&+\int_0^{y'} h_{0\,\frac{1}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,\frac{\xi_1(y')-\xi_1(y)}{y'-y}\,d\,y-\int_0^{y'_1} h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)y;\,\xi_1(y'_1)\,y'_1)\,dy\mp2\sqrt{\pi}<\sigma\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

e quindi, poichè $y'<y'_1+\delta$,

$$|x'-\xi_1(y')|\int_0^{y'} h_{0\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,d\,y\leq\sigma+2\sqrt{\pi}+2\,H\,(y'_1+\delta).\quad(18)$$

Quindi infine da (14) (15) (16) e (18) si deduce

$$\int_{y'-\delta}^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y \leq [2\,H\,(y'_1-\delta)+H\,\sigma+2\sqrt{\pi}\,\sigma]\,\sigma. \qquad (19)$$

E da (12) (13) (19) segue immediatamente la (7), e quindi la (5) tosto che si osservi che σ può prendersi arbitrariamente piccolo.

Oss. — Abbiamo supposto $y'_1 > 0$. Ove il punto $(x'\,y')$ tendesse al punto $(\xi_1(0)\,0)$, il limite di (2) è diverso a seconda delle diverse direzioni secondo cui tendiamo ad esso punto. Però se $\psi_1(y)$ è continua nel punto zero e si ha $\psi_1(0)=0$, sarà sempre:

$$\lim_{\substack{y'=0\\ x'=\xi_1(0)}} \int_0^{y'} h_{1\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\,x'\,y')\,\psi_1(y)\,d\,y = 0. \qquad (20)$$

I ragionamenti che servono a dimostrare questa formola sono perfettamente analoghi a quelli usati per dedurre la (19).

§ 5. Il teorema di esistenza per l'equazione (II).

16. Possiamo ora accingerci alla dimostrazione del teorema di esistenza. Supporremo il contorno di seconda o di terza specie: per fissare le idee supporremo, ad esempio, che sia di seconda specie, — l'altro caso è per taluni riguardi ancora più semplice. — Supporremo che s_1 ed s_2 soddisfacciano alla condizione (a) del n. 7: ed inoltre, come sempre si può fare dividendo, ove occorra, il campo nello stesso modo che al § 2, che la differenza tra le ascisse di un punto di s_1 e di un punto di s_2 sia maggiore di un numero finito. Segue allora che, se $(x\,y)$ è su s_1 ed $(x'\,y')$ su s_2, (o viceversa) si può scrivere

$$h_{1\frac{3}{2}}(x\,y;\,x'\,y') < \alpha\,H\,\frac{1}{\sqrt{y'-y}}, \qquad (1)$$

α essendo una conveniente costante: mentre quando $(x\,y)$ ed $(x'\,y')$ sono entrambi su s_1 o su s_2 noi sappiamo che vale la (3) del n. 15 (§ 4).

Ciò posto, seguendo i concetti esposti nel n. 14, cerchiamo a quali condizioni debbano soddisfare le $\psi_1(y), \psi_2(y)$, perchè la funzione z data dalla formula (1) del n. 14, prenda su s_1 ed s_2 i valori assegnati $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$. *Ammesso che le funzioni $\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ siano finite e continue, dal n. 15* (form. (5)) *segue che, affinchè la z prenda su s_1 ed s_2 per $y > 0$ i valori assegnati, è necessario e sufficiente che*

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1(y_1) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{y_1} h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y_1)\,y_1)\,\psi_1(y)\,dy\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \int_0^{y_1} h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y;\ \xi_1(y_1)\,y_1)\,\psi_2(y)\,dy\right] = \varphi_1(y_1)\\
&\psi_2(y_1) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{y_1} h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_2(y_1)\,y_1)\,\psi_1(y)\,dy\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \int_0^{y_1} h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y;\ \xi_2(y_1)\,y_1)\,\psi_2(y)\,dy\right] = \varphi_2(y_1).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ma ora, ammesso che le funzioni $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ siano soluzioni di (2) finite e continue, noi vediamo che anche quando il punto $(x'\,y')$ tende al punto $(\xi_1(0)\,0)$ o $(\xi_2(0)\,0)$ la funzione $z(x'\,y')$ data da (1) del n. 14 è regolare: ricordiamo invero che per le nostre ipotesi $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ e che per la (4) del n. 15, se le $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ sono finite, gli integrali che compaiono in (2) tendono a zero per $y_1 = 0$, seguirà allora da (2) che si ha pure $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$; e quindi dall'osservazione finale del n. 14 che nei punti $(\xi_1(0)\,0)$ e $(\xi_2(0)\,0)$ la funzione (1) del n. 14 tende a zero uniformemente.

Poniamo per abbreviare

$$f(y_1) = \psi_1(y_1) \qquad f(-y_1) = \psi_2(y_1) \qquad (0 \leq y_1 \leq y_0) \tag{3_1}$$

$$F(y_1) = \varphi_1(y_1) \qquad F(-y_1) = \varphi_2(y_1) \tag{3_2}$$

$$\left.\begin{aligned}
2\sqrt{\pi}\,\chi(y;\ y_1) &= h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_1(y_1)\,y_1)\\
2\sqrt{\pi}\,\chi(-y;\ y_1) &= -h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y;\ \xi_1(y_1)\,y_1)\\
2\sqrt{\pi}\,\chi(y;\ -y_1) &= -h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_1(y)\,y;\ \xi_2(y_1)\,y_1)\\
2\sqrt{\pi}\,\chi(-y;\ -y_1) &= h_{1\,\frac{3}{2}}(\xi_2(y)\,y;\ \xi_2(y_1)\,y_1)
\end{aligned}\right\} \tag{3_3}$$

Le equazioni (2) si riassumeranno nella

$$f(y_1) - \int_{-y_1}^{y_1} \chi(y; y_1) f(y)\, d\, y = F(y_1). \tag{4}$$

È questa una equazione del tipo del FREDHOLM: e ad essa si potrebbe applicare la teoria del FREDHOLM, poichè $\chi(y; y_1)$ diviene infinita in $y = y_1$, ma di ordine $\leq \frac{1}{2} < 1$ (*). Quindi ove il determinante non sia nullo, esiste una soluzione di (4) finita e continua, poichè la $F(y)$ è finita e continua; e per quanto precede tale funzione risolve certamente il problema.

Non rimane che la domanda: il determinante di (4) è o non è diverso da zero?

17. Potremmo dimostrare che il determinante di (4) è certo $\neq 0$ per via analoga a quella che si tiene ordinariamente nel metodo di NEUMANN, mostrando che (4) non può avere soluzione omogenea (**) diversa da zero.

(*) Cfr. FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* Acta Math. 27, § 16. Del resto nella Nota: *Sulle equazioni integrali* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1907, 2.° sem., Vol. XVI, serie 3.a) ho dimostrato che perchè si possano applicare i teoremi del FREDHOLM è sufficiente che la funzione caratteristica sia assolutamente ed uniformemente integrabile sia rapporto ad y che ad y_1.

(**) Invero se $f(y)$ fosse una soluzione di questa equazione omogenea e $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, i valori corrispondenti delle $\psi(y)$, sostituiti questi valori in (1) del n. 14, questa darebbe per il teorema di unicità una funzione $z(x\,y)$ nulla in tutto il campo S. Ora si supponga ad es.: il campo S di seconda specie, e si considerino i campi di terza specie S_1 ed S_2 laterali (i quali si trovano a sinistra di s_1 ed a destra di s_2): la (1) del n. 14 rappresenta anche in S_1 ed S_2 una funzione soluzione di (II) nulla su $y = 0$: e se chiamiamo z_1 e z_2 i valori limiti di (1) quando $(x'\,y')$ tende ad un punto di s_1 o di s_2 restando in S_1 od in S_2, i teoremi precedenti ci dicono che $\psi_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z_1$, $\psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z_2$. Si cerchi la $\frac{\partial z}{\partial x}$ in S, S_1, S_2: facili calcoli mostrano che i limiti di questa funzione quando $(x\,y)$ tende ad s_1 o ad s_2 sono uguali, sia quando $(x\,y)$ è in S che in S_1 o in S_2: siccome in S è $z = 0$, la derivata $\frac{\partial z}{\partial x}$ in S_1 ed in S_2 tenderà anche a zero quando il punto tende ad un punto di s_1 o ad un punto di s_2: quindi, poichè anche

Però ci pare più opportuno seguire altra via; mostreremo direttamente che la serie che si ottiene sviluppando la soluzione di (4) in serie di NEUMANN è convergente; e per tal modo la nostra dimostrazione sarà indipendente dalla teoria di FREDHOLM. Anzi dimostreremo più in generale che l'equazione

$$f(y_1) + \lambda \int_{-y_1}^{y_1} \chi(y;\ y_1)\, f(y)\, dy = F(y_1) \tag{5}$$

ammette soluzione qualunque sia la costante λ (*), e che questa è data da

$$f(y) = F(y) - \lambda F_1(y) + \lambda^2 F_2(y) - \cdots + (-1)^r \lambda^r F_r(y) + \cdots \tag{6}$$

dove

$$F_r(y) = \int_{-y}^{y} \chi(y_1;\ y)\, F_{r-1}(y_1)\, dy_1 \qquad F_0(y) = F(y)\ (**). \tag{7}$$

Si ricordi invero che per la definizione di $F(y)$ $[(3)_2$ del n. precedente$]$ è $|F(y)| < M$ (M indicando il massimo valore assoluto di $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$): inoltre in forza della (1) del n. 16 e della (3) del n. 15 per la definizione $(3)_1$ della funzione $\chi(y;\ y_1)$ esiste una costante α_1 tale che

$$|\chi(y_1;\ y)| < \alpha_1 H \frac{1}{\sqrt{y - y_1}} < \alpha_1 H \frac{1}{\sqrt{|y| - |y_1|}} \tag{8}$$

(si ricordi che qui si considerano solo i valori per cui $|y| > |y_1|$). Si ri-

---

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ è una soluzione di (11) in S_1 ed S_2 e si annulla evidentemente su $x = 0$, sarà ancora per il teorema di unicità del n. 5, nulla in tutto S_1 ed S_2. Ma allora sarà ancora nulla in tutto S_1 ed S_2 la funzione z; e quindi si avrà $z_1 = 0$ e $z_2 = 0$, e per quanto precede sarà $\psi_1 = \psi_2 = 0$ c. v. d.

(*) In altri termini dimostreremo che il determinante di (5) non è *mai* nullo per nessun valore di λ.

(**) La ragione di ciò sta nel fatto che i limiti dell'integrale in (5) sono variabili: l'equazione (5) risulta così perfettamente analoga a quelle studiate dal VOLTERRA nelle note Memorie degli *Annali di Matematica*, (vol. XXV serie 2ª 1897. *Sopra alcune questioni di inversione degli integrali definiti*) e degli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1896). 4 Note. *Sulla inversione degli integrali definiti.*

chiami inoltre la formula (valida per $\alpha + 1 > 0$)

$$\left.\begin{aligned} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y - y_1}}\, y_1^\alpha \, d\, y_1 &= y^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_0^1 (1 - t)^{-\frac{1}{2}} t^\alpha \, d\, t = y^{\alpha+\frac{1}{2}} B\left(\alpha + 1, \frac{1}{2}\right) = \\ &= y^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}\ ^{(*)} . \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Si avrà allora facilmente:

$$\left.\begin{aligned} F_0(y) &\leq M. \\ F_1(y) &< \alpha_1 H . M \int_{-y}^{y} \frac{1}{\sqrt{y - y_1}}\, d\, y_1 = 2\, \alpha_1 H . M \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y - y_1}}\, d\, y_1 = \\ &= 2\, \alpha_1 H . M \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\, y^{\frac{1}{2}}. \\ F_2(y) &< \left[2\, \alpha_1 H . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] . M \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} . \alpha_1 H \int_{-y}^{y} \frac{y_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y - y_1}}\, d\, y_1 \leq \\ &< \left[2\, \alpha_1 H . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] . 2\, \alpha_1 H . M \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^y \frac{y_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y - y_1}}\, d\, y_1 = \\ &= \left[2\, \alpha_1 H\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 . M \frac{1}{\Gamma(2)}\, y \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(y) &< \left[2\, \alpha_1 H\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n . M \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}\, y^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Onde, ricordando che

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(\frac{2h}{2}\right) = \Gamma(h) = (h - 1)! \qquad \Gamma\left(\frac{2h + 1}{2}\right) > (h - 1)! \qquad (10)$$

(*) $B(a, b)$, $\Gamma(a)$ indicando le ben note funzioni Euleriane.

si dedurrà

$$
\left.
\begin{array}{ll}
F_0(y) \leq M & F_1(y) \leq 2\alpha_1 H\sqrt{\pi}\,.\,M\,y^{\frac{1}{2}} \\[2ex]
F_2(y) \leq M \cdot \dfrac{(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,y}{1\,!} & F_3(y) \leq 2\alpha_1 H\sqrt{\pi}\,.\,M\,y^{\frac{1}{2}}\,.\,\dfrac{(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,y}{1\,!} \\[2ex]
F_4(y) \leq M \cdot \dfrac{[(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,y]^2}{2\,!} & F_5(y) \leq 2\alpha_1 H\sqrt{\pi}\,.\,M\,y^{\frac{1}{2}}\,.\,\dfrac{[(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,y]^2}{2\,!} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
F_{2n}(y) \leq M \cdot \dfrac{[(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,y]^n}{n\,!} & F_{2n+1}(y) \leq 2\alpha_1 H\sqrt{\pi}\,.\,M\,y^{\frac{1}{2}}\,.\,\dfrac{[(2\alpha_1 H\sqrt{\pi})^2\,y]^n}{n\,!}\,.
\end{array}
\right\} \tag{11}
$$

Dalla formola (11) si deduce che la serie (6) è convergente come una serie esponenziale, e precisamente si ha

$$
f(y) \leq M\,[1 + 2\sqrt{\pi}\,\alpha_1 H\sqrt{y_0}]\,e^{(2\alpha_1 H\lambda)^2\pi y_0}. \tag{12}
$$

Ed è così perfettamente dimostrato il nostro teorema (*) (**).

(*) Si noti la differenza che passa tra il problema qui trattato ed il problema di Dirichlet trattato col metodo di Neumann. In ambi i casi si giunge ad una equazione integrale, ma nel caso delle funzioni armoniche la funzione caratteristica dell'equazione integrale ammette valori eccezionali e funzioni eccezionali, che, assunte quali momenti di doppi strati, dànno luogo a *funzioni fondamentali* del Poincaré. È noto l'importanza di queste funzioni nella teoria delle funzioni armoniche. Nulla di simile nel caso presente: l'equazione integrale non ha mai valori eccezionali, e quindi almeno per questa via non si ottiene nulla di simile alle funzioni fondamentali.

(**) La forma in cui si ottiene la funzione è assai comoda allo studio delle proprietà della funzione medesima. Se noi sostituissimo lo sviluppo (6) nella (1) del n. 14 otterremmo facilmente la nostra funzione sotto forma di un integrale o meglio di una somma di integrali affatto analoghi a quelli della formula (3) del n. 4, che vale pel caso in cui s sia formato da un tratto di caratteristica e di due pezzi di parallela all'asse della y: e in quella dimostrazione potremmo fare uso di questa formula invece che della (3). — Ancora: si vogliano, ad es.: studiare le derivate della funzione nei punti del contorno. È facile vedere che se la funzione $f(y)$ è derivabile, esistono anche le derivate prime rapporto ad y ed x e la derivata seconda rapporto ad x. Ed è facile vedere che se le funzioni $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ e quindi la $F(y)$, ammettono derivate, anche le successive funzioni $F_i(y)$ hanno derivate, e, con ragionamenti analoghi a quelli di questo numero, che la serie formata con le derivate converge. Non entriamo in discussioni più minute a questo proposito perchè esse ci allontanerebbero dal preciso scopo di questo lavoro.

§ 6. Continua sul teorema di esistenza.

18. Dai due numeri precedenti il teorema di esistenza risulta dimostrato sotto alcune ipotesi relative al contorno; precisamente si suppone che il contorno soddisfaccia alla condizione (α) del n. 7 e non sia di prima specie. Ove il contorno abbia generalmente tangente che muova con continuità, esso soddisferà alla condizione (α) quando si escludano gli intorni dei punti in cui la tangente abbia una discontinuità, o sia parallela all'asse delle x; coll'impiccolire di questi intorni la costante H che compare nella condizione (α) andrà indefinitamente crescendo. Però ove si supponga che questi punti eccezionali siano in numero finito noi potremo condurre le caratteristiche per essi e così analogamente a quanto si fece al n. 7 dividere il campo in tanti campi parziali per i quali i punti eccezionali del contorno corrispondano al valore massimo od al valore minimo dell'ordinata. Cosicchè noi potremo limitarci a considerare quì tre specie di contorni, secondochè:

1.° la condizione (α) è soddisfatta su s_1 ed s_2 quando si escludano con intorni comunque piccoli i punti di ordinata massima y_0.

2.° la condizione (α) è soddisfatta quando si escludano gli intorni dei punti di s_1 e di s_2 appartenenti all'asse delle x.

3.° il contorno è prima specie: tolto l'intorno del punto appartenente all'asse delle x esso soddisfa ovunque alla condizione (α) (*).

Cominciamo dal primo caso. In queste ipotesi i nostri studii precedenti ci dimostrano che in ogni campo $S(y_0 - \varepsilon)$ dove ε è piccolo a piacere si può determinare una funzione che prenda i valori assegnati al contorno: quindi preso un qualunque punto (x_0, y_0) la funzione è determinata in tutti i punti di un intorno di esso che hanno l'ordinata inferiore a y_0; si tratta di vedere se i valori che la funzione prende nei punti di questi intorni hanno un limite nel punto (x_0, y_0). Useremo perciò di un ragionamento analogo ad uno usato nel n. 4.

Si osservi anzitutto che la funzione determinata in ogni campo $S(y_0 - \varepsilon)$ è sempre limitata, poichè pel n. 3 è sempre, qualunque sia ε, inferiore in

(*) Analogamente si potrebbe anche considerare i contorni di quarta, quinta, sesta specie. I ragionamenti del presente n. servono anche per contorni di quarta specie, quelli del numero seguente servono anche per quelli di 5.^{a} e 6.^{a} specie.

modulo al massimo tra i valori assegnati sul contorno s. Preso un punto $(x_0\, y_0)$ interno al campo, si consideri, come al n. 4, la spezzata formata dalle rette $x = x_0 - \delta$ ed $x = x_0 + \delta$ e dal segmento della retta $y = y_0$ è compreso fra quelle, δ essendo scelto per modo che questa spezzata sia tutta interna a S. Questa spezzata si può considerare come una curva s: su di essa, tolto che nei punti $(x_0 - \delta,\ y_0)$ $(x_0 + \delta,\ y_0)$, i valori della funzione z sono pienamente noti, e, come abbiamo già osservato, sono limitati. Noi potremo quindi esprimere i valori di z all'interno del campo S limitato da s corrispondenti a valori inferiori ad y_0 dell'ordinata mediante la formula (3) del n. 4. Ma questa formula rappresenta una funzione finita e continua in tutto il campo S, pienamente determinata anche nei punti della caratteristica $y = y_0$ che sono a distanza non infinitesima dai punti $(x_0 - \delta,\ y_0)$ $(x_0 + \delta,\ y_0)$ (poichè l'indeterminazione del valore di $z\,(x_0 - \delta,\ y_0)$, $z\,(x_0 + \delta,\ y_0)$ non toglie che gli integrali di (3) abbiano un valore determinato anche in questi punti). Concludiamo dunque che per continuità si può determinare la funzione z anche nei punti della caratteristica $y = y_0$ (*).

19. Restano a studiarsi gli altri due casi: li tratteremo con metodo unico.

Ricordiamo che si può supporre che nei punti comuni all'asse delle x ed alla curva si abbia $\varphi\,(x) = 0$; sarà allora $\varphi_1\,(0) = \varphi_2\,(0) = 0$. Per la continuità delle funzioni $\varphi_1\,(y)$ e $\varphi_2\,(y)$, fissata una successione di numeri positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \ldots$ decrescenti e tendenti a zero, potremo trovare un'altra successione di numeri $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \ldots$ pure positivi, decrescenti e tendenti a zero, tali che nei punti di $s\,(\eta_i)$ i valori assegnati di $\varphi_1\,(y)$ e $\varphi_2\,(y)$ siano inferiori in modulo ad ε_i. Le rette $y = \eta_i$ incontrano ciascuna s_1 ed s_2 in due punti $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$: chiamiamo $s_1^{(i)}$ ed $s_2^{(i)}$ i tratti di s_1 ed s_2 che si trovano al disopra di $y = \eta_i$. Chiamiamo $s^{(i)}$ il contorno formato da $s_1^{(i)}$, dal segmento $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$ e da $s_2^{(i)}$, e sia $S^{(i)}$ il campo da questo racchiuso. Ad $S^{(i)}$ potremo applicare gli studi dei n. 16 e 17; e si potrà pertanto determinare una funzione $z^{(i)}$ soluzione di (11) che su $s_1^{(i)}$ ed $s_2^{(i)}$ si riduca ai valori assegnati, e su $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$ si riduca ad es.: alla catena dei valori che si ottiene interpolando linearmente tra i valori assegnati in $A_1^{(i)}$ ed in $A_2^{(i)}$. Io dico che le funzioni z

---

(*) Valga anche qui l'osservazione fatta al n. 4. e alla seconda nota della pagina 219, che l'uso della formula (3) (n. 4) e del contorno rettangolare è accessorio e che ad essa si potrebbe benissimo sostituire la formula analoga più generale data dalla (1) n. 14 e (6) del n. 17.

hanno un limite determinato e finito in ogni punto interno ad S. Perciò si osservi che la funzione $z^{(j)} - z^{(i)}$ è per $j > i$ sempre $< 2\varepsilon_i$. Invero la funzione $z^{(j)}$ sul contorno formato dagli archi $A_1^{(i)} A_1^{(j)}$ e $A_2^{(i)} A_2^{(j)}$ e dal segmento di caratteristica $A_1^{(j)} A_2^{(j)}$ è sempre inferiore a ε_i, quindi pel teorema del n. 3 è ancora inferiore a ε_i nei punti del segmento di caratteristica $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$. Cosicchè la funzione $z^{(j)} - z^{(i)}$ è definita in $S^{(i)}$ e si annulla su $s_1^{(i)}$ e su $s_2^{(i)}$ mentre sul tratto $A_1^{(i)} A_2^{(i)}$ prende valori inferiori in modulo a $2\varepsilon_i$. Segue di qui, applicando ancora il teorema del n. 3, che $z^{(j)} - z^{(i)}$ è in tutto $S^{(i)}$ inferiore a $2\varepsilon_i$.

Quindi in ogni campo $S^{(i)}$ le funzioni $z^{(j)}$ $(j > i)$ convergono uniformemente ad una funzione z la quale prenderà come le $z^{(j)}$ su $s_1^{(j)}$ e $s_2^{(j)}$ i valori assegnati $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$. E questa funzione limite z esisterà sempre in tutto S e per il teorema del n. 4 vi soddisfa all'equazione (II). Essa è dunque la funzione cercata.

§ 7. Altra dimostrazione del teorema di esistenza.

20. In questo paragrafo vogliamo mostrare come si potrebbe giungere per altra via alla dimostrazione dei teoremi di esistenza: noi ci limiteremo però ad esporre la dimostrazione nelle sue linee essenziali, senza entrare nei particolari.

Riprendiamo la formola $(7)_1$ del n. 10 che nel caso dell'equazione (II) possiamo scrivere

$$z(x', y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x, y; x', y') \left\{ \left[\frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{x' - x}{2(y' - y)} \right] dy + z\, dx \right\}. \qquad (1)$$

In ogni tratto del contorno $s(y')$ che appartenga ad una caratteristica, non compaiono, come abbiamo notato di già, i valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$. Ma si può osservare come, usando di un principio analogo al principio delle immagini di Lord Kelvin, si possano in questa formola eliminare i valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$ su un tratto di s, il quale appartenga ad una retta che lasci S tutto da una banda (*).

(*) Volterra, *Leçons*, pag. 67-68.

Sia infatti CD un tratto del contorno appartenente ad una retta di coefficiente angolare α: e sia $E \equiv (a\, y')$ il punto in cui CD incontra la caratteristica $y = y'$: E sarà un punto esterno al segmento $(\xi_1(y')\, y') \ldots (\xi_2(y')\, y')$ della caratteristica $y = y'$ che appartiene al campo S, od al più coinciderà con uno degli estremi del segmento medesimo. Il punto M' simmetrico di $M \equiv (x'\, y')$ rapporto ad E avrà le coordinate $(2a - x',\, y')$ e sarà come E esterno al segmento $(\xi_1(y')y') \ldots (\xi_2(y')y')$: lo diremo col Volterra *immagine* del punto $(x'y')$ rapporto a CD. Quindi la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, 2a - x'\, y')$ sarà regolare in $S(y')$ ed in virtù della $(7)_a$ del n. 10 si avrà

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, 2a - x'\, y') \left\{ \left[\frac{\partial z}{\partial x} - z\, \frac{2a - x' - x}{2(y' - y)} \right] dy + z\, dx \right\}. \qquad (2)$$

Moltiplicando (2) per $e^{\alpha(a - x')}$ e sottraendo da (1) si avrà quindi

$$\left.\begin{aligned} z(x'y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Bigg\{ & \int_{s(y')} \frac{\partial z}{\partial x} \left[h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') - e^{\alpha(a-x')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, 2a - x'\, y') \right] dy - \\ & - \int_{s(y')} z \Bigg[h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y) \left(\frac{x' - x}{2(y' - y)}\, dy - dx \right) - \\ & \qquad - e^{\alpha(a-x')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, 2a - x'\, y') \left(\frac{2a - x' - x}{2(y' - y)}\, dy - dx \right) \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ma si osservi che quando (xy) è un punto della retta CD e quindi tale che per esso $x = a + \alpha(y - y')$ si ha

$$h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y') - e^{\alpha(a-x')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, 2a - x'\, y) = 0, \qquad (4)$$

come immediatamente si vede sostituendo ad $h_{0\frac{1}{2}}$ il suo valore. La formula (3) ci dà quindi un'espressione di z in cui non compaiono i valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$ su CD.

Indicheremo per brevità in quanto segue la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$ con $h(M)$ e la funzione $e^{\alpha(a-x')}$ con $l_\alpha(M)$: la (4) dice che le funzioni $h(M)$ e $l_\alpha(M)\,.\,h(M')$ sono uguali su CD.

È chiaro intanto che se il campo è di terza specie e limitato da un tratto s_1 appartenente ad una retta di coefficiente angolare α e da una caratteristica, le considerazioni precedenti risolvono il problema di esistenza: se usiamo delle notazioni del § 2 possiamo dire che *la funzione di* Green *per questo contorno* è data da

$$e^{\alpha(\xi_1(y')-x')}h_{n-\frac{1}{2}}(x\,y;\;2\xi_1(y)-x'\,y')=h_{n-\frac{1}{2}}(x\,y;\;x'\,y')\,e^{-\frac{1}{y'-y}(\xi_1(y')-x')(\xi_1(y)-x)}. \qquad (5)$$

Supponiamo ora che il contorno sia di prima o di seconda specie e che s_1 ed s_2 siano segmenti di retta, i cui coefficienti angolari chiamiamo α_1 ed α_2 (*). Indichiamo con M'_1 ed M'_2 i punti immagine di $M\equiv(x'\,y')$ rapporto ad s_1 ed s_2; con M''_1 ed M''_2 le immagini di M'_2 ed M'_1 rapporto ad s_1 ed s_2 rispettivamente...., con $M_1^{(i)}$ ed $M_2^{(i)}$ le immagini di $M_2^{(i-1)}$, $M_1^{(i-1)}$ rapporto ad s_1 ed s_2. Useremo di queste successive immagini in modo analogo a quello tenuto precedentemente. Poniamo $k'_1(x\,y;\,x'\,y')=l_{\alpha_1}(M)$, $k'_2=l_{\alpha_2}(M)$; $k''_1=l_{\alpha_1}(M'_2)\,.\,l_{\alpha_2}(M)=k'_2\,.\,l_{\alpha_1}(M'_2)$, $k''_2=k'_1\,l_{\alpha_2}(M'_1)$; ...; $k_1^{(i)}=k_2^{(i-1)}\,.\,l_{\alpha_1}(M_2^{(i-1)})$ $k_2^{(i)}=k_1^{(i-1)}\,.\,l_{\alpha_2}(M_1^{(i-1)})$. Se consideriamo le funzioni

$$h(M)-h(M'_1)k'_1=h(M)-h(M'_1)l_{\alpha_1}(M)$$

$$h(M)-h(M'_2)k'_2=h(M)-h(M'_2)l_{\alpha_2}(M)$$

$$h(M)-h(M'_1)k'_1-h(M'_2)k'_2+h(M''_1)k''_1=h(M)-h(M'_1)l_{\alpha_1}(M)+l_{\alpha_2}(M)[h(M'_2)-h(M''_1)l_{\alpha_1}(M'_2)]$$

$$h(M)-h(M'_1)k'_1-h(M'_2)k'_2+h(M''_2)k''_2=h(M)-h(M'_2)l_{\alpha_2}(M)+l_{\alpha_1}(M)[h(M'_1)-h(M''_2)l_{\alpha_2}(M'_1)]$$

. . . .

$$h(M)-h(M'_1)k'_1-h(M'_2)k'_2+\cdots+(-1)^{i-1}[h(M_1^{(i-1)})k_1^{(i-1)}+h(M_2^{(i-1)})k_2^{(i-1)}]+(-1)^i h(M_1^{(i)})k_1^{(i)}$$

$$h(M)-h(M'_1)k'_1-h(M'_2)k'_2+\cdots+(-1)^{i-1}[h(M_1^{(i-1)})k_1^{(i-1)}+h(M_2^{(i-1)})k_2^{(i-1)}]+(-1)^i h(M_2^{(i)})k_2^{(i)}$$

. . . .

si vede immediatamente applicando ripetutamente la (4) che quelle di

(*) Volterra, l. c., pag. 69.

posto pari sono nulle su s_1, quelle di posto dispari sono nulle su s (*). È facile vedere che, *fissato un punto* $(x'y')$, *queste funzioni convergono tutte uniformemente verso una medesima funzione limite — somma delle serie* $h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y') + \sum_1^\infty (-1)^i [h(M_1^{(i)})k_1^{(i)} - h(M_2^{(i)})k_2^{(i)}]$ — *per i valori di* (xy), *per cui* $y \leq y'$ *e che sono interni ad uno qualunque dei trapezii limitati dalle rette* s_1, s_2, $y = y'$ *e da una qualunque caratteristica* $y = y_1$ *corrispondente ad un valore* $y_1 < y'$, *e che giace insieme con* $y = y'$ *da una stessa parte rispetto al punto di intersezione delle rette cui appartengono* s_1 *ed* s_2 *(escluso naturalmente un piccolo intorno di* $(x'y')$ *in cui il primo termine della serie è singolare)* (**). Questa funzione limite si annulla su s_1 ed s_2: ed è facile vedere che nel campo precedentemente descritto ammette derivate le quali si possono ottenere derivando termine a termine la serie medesima, e soddisfa all'equazione (II). Onde intanto possiamo conchiudere di qui che *la funzione*

$$-\sum_1^\infty (-1)^i [h(M_1^{(i)})k_1^{(i)} + h(M_2^{(i)})k_2^{(i)}] \tag{6}$$

(*) Si può calcolare l'effettiva espressione di queste funzioni: si trova

$$h(M^{(2i-1)})k_1^{(2i-1)} = h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y') \times$$
$$\times e^{-\frac{1}{y'-y}\{(i+1)i(\xi_1(y')-\xi_2(y'))(\xi_1(y)-\xi_2(y))+i(\xi_1(y')-\xi_2(y'))(\xi_1(y)-x)+i(\xi_1(y)-\xi_2(y))(\xi_1(y')-x')+(\xi_1(y')-x')(\xi_1(y)-x)\}}$$

$$h(M_1^{(2i)})k_1^{(2i)} = h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y') \times$$
$$\times e^{-\frac{1}{y'-y}\{i^2(\xi_1(y')-\xi_2(y'))(\xi_1(y)-\xi_2(y))+i(\xi_1(y')-\xi_2(y'))(\xi_1(y)-x)-i(\xi_1(y')-x')(\xi_1(y)-\xi_2(y))\}}.$$

E si ottengono facilmente le espressioni analoghe per $h(M_2^{(2i-1)})k_2^{(2i-1)}$ e $h(M_2^{(2i)})k_2^{(2i)}$ scambiando nella formula precedente ξ_1 con ξ_2.

(**) Che la serie scritta sopra converga per tali valori di (xy) e di $(x'y')$ risulta facilmente dalle formule della nota precedente. Infatti queste indicano che per valori fissi di (xy) ed $(x'y')$ ad es. le funzioni $h(M_1^{(2i)})k_1^{(2i)}$ sono del tipo $h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y')e^{i^2r_1+ir_2+r_3}$, r_1, r_2, r_3 essendo funzioni fisse di (xy) ed $(x'y')$ (indipendenti da i): di più r_1 è certamente negativa e si annulla solo quando sia $\xi_1(y) = \xi_2(y)$ così quando il punto (xy) sia il punto di incontro delle rette s_1 ed s_2. Lo stesso vale per le altre funzioni $h(M_2^{(2i)})k_2^{(2i)}$, $h(M_1^{(2i+1)})k_1^{(2i+1)}$, $h(M_2^{(2i+1)})k_2^{(2i+1)}$. Quindi la serie converge certamente.

rappresenta la funzione di Green *per un campo di seconda specie in cui le curve s_1 ed s_2 siano due segmenti rettilinei.*

Si osservi però che quando il campo è di prima specie — esso avrà allora una forma triangolare, un vertice essendo il punto di incontro V di s_1 ed s_2 — la serie (6) convergerà ancora evidentemente in ogni punto fatta eccezione per il vertice V: il limite cui tende la somma della serie (6) quando, $(x\, y)$ rimanendo fisso, il punto $(x\, y)$ tende verso V, è diverso a seconda del diverso cammino percorso: cosicchè la funzione (6) non è più regolare in V. E ciò se rammentiamo le considerazioni del n. 13, era ben da prevedersi. Tuttavia *alla funzione* (6) *per quanto sia singolare in un punto del campo possono ancora applicarsi i ragionamenti del* § 3*: e quindi può essere presa quale funzione di* Green *per il campo di prima specie limitato da due segmenti di retta uscenti da un punto.*

Abbiamo così trovata la funzione di Green per tutte e tre le specie di contorni quando le curve s_1 ed s_2 siano segmenti rettilinei, mediante essa potremo trovare una formula che esprima i valori di una soluzione di (I) per i valori che essa prende al contorno. Ed è facile verificare che la formula così trovata dà una funzione che prende realmente i valori assegnati al contorno; e quindi permette di stabilire i teoremi di esistenza: basterà perciò applicarla anzitutto al caso particolare che i valori assegnati siano costanti, nella qual ipotesi noi sappiamo che la soluzione di (I) esiste ed è uguale alla costante medesima: indi usare di ragionamenti analoghi a quelli del n. 15.

Stabilito il teorema di esistenza in questo caso particolare, esso si dimostrerà facilmente *per un contorno poligonale arbitrario:* poichè dividendo il campo con caratteristiche condotte pei vertici del poligono potremo ridurre questo problema alla risoluzione successiva di problemi del tipo precedente. In particolare *si potrà ottenere la funzione di* Green *per un contorno poligonale qualunque; e se il contorno poligonale è di seconda o di terza specie questa funzione sarà ovunque regolare, mentre avrà un punto singolare nel vertice posto più in basso, se il contorno è di prima specie.*

21. Quando si voglia stabilire il teorema di esistenza per un qualunque contorno s si considererà questo come limite di una successione di poligoni $p_1\, p_2 \ldots p_n \ldots$ inscritti, di cui cresca indefinitamente il numero dei lati. È questo il metodo tenuto dall'Harnack per la risoluzione del problema di Di-

RICHLET (*). Supporremo che ogni poligono sia interno a tutti i successivi: io mi limiterò a dimostrare che le funzioni di GREEN relative a questi poligoni hanno un limite, sarà questo la funzione di GREEN per il contorno s.

Dimostrerò perciò anzitutto la seguente proposizione fondamentale: siano $s^*(y')$ ed $s^{**}(y')$ due contorni che colla retta $y = y'$ determinano due campi $S^*(y')$ ed $S^{**}(y')$, di cui il primo sia tutto interno al secondo od abbia al più punti del contorno comuni col contorno del secondo: sia $(x'\, y')$ un punto interno a $S^*(y')$; $g^*(x\,y)$ e $g^{**}(x\,y)$ siano le funzioni di GREEN relative al punto $(x'\,y')$ ed ai campi $S^*(y')$ ed $S^{**}(y')$ rispettivamente: e supponiamo che $s^*(y')$ ed $s^{**}(y')$ siano tali che queste funzioni $g^*(x\,y)$, $g^{**}(x\,y)$ siano ovunque regolari (e cioè, per quanto si è visto, che s^* ed s^{**} non siano di prima specie). Io dico che $g^*(x\,y) \leqq g^{**}(x\,y)$.

Infatti $g^*(x\,y)$ e $g^{**}(x\,y)$ sono soluzioni dell'equazione (IV) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, che rispettivamente su $s^*_1(y')$ e $s^*_2(y')$ e su $s^{**}_1(y')$ e $s^{**}_2(y')$ prendono i valori di $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ e sulla retta $y = y'$ si annullano. Ora si osservi che all'interno di $S^{**}(y')$ è $g^{**}(x\,y) < h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$. Invero, descritto in $S^{**}(y')$ un piccolo semicerchio c col centro nel punto $(x'\,y')$, dall'espressione di $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')$ segue che il valore che questa funzione prende in un punto di c è certamente superiore al valore che essa prende nei punti di $s^{**}(y')$ di uguale ordinata. Invece, se applichiamo il teorema del n. 3 all'equazione (IV) noi vediamo che $g^{**}(x\,y)$ prende in quei punti valori minori od uguali di quelli che prende nei punti di $s^{**}(y')$ di uguale o maggiore ordinata: pertanto $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y') - g^{**}(x\,y)$ sarà una funzione soluzione di (IV) regolare in tutto il campo $S^{**}(y')$ esterno al semicerchio c, e che si annulla su $s^{**}_1(y')$, su $s^{**}_2(y')$ e sulla retta $y = y'$ mentre sul semicerchio c è positiva: onde pel teorema del n. 3 applicato alla equazione (IV) essa sarà positiva o nulla in ogni punto di $S^{**}(y')$ esterno a c. Ma c può essere preso piccolo a piacere: sarà quindi in ogni punto di $S^{**}(y')$, diverso da $(x'\,y')$, $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y') \geqq g^{**}(x\,y)$. In particolare questa disuguaglianza varrà

(*) A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales, etc.* Leipzig Teubner, 1887. Cap. 4, pag. 116 e sg.

sulle curve $s^*_1(y')$ ed $s^*_2(y')$ che per ipotesi sono interne a $S^{**}(y')$: e poichè su $s^*_1(y')$ ed $s^*_2(y')$ si ha $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y') = g^*(x\,y)$, le due funzioni $g^*(x\,y)$ $g^{**}(x\,y)$ saranno in $S^*(y')$ soluzioni di (IV) nulle su $y = y'$ e tali che su $s^*_1(y')$ e $s^*_2(y')$ la prima è maggiore od uguale alla seconda; onde sarà in tutto $S^*(y')$:

$$g^{**}(x\,y) \leqq g^*(x\,y). \qquad \text{c. v. d.}$$

Se quindi si considera una successione di poligoni $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ l'uno interno all'altro e tutti interni a $S(y')$, i cui contorni al crescere di n tendano ad $s(y)$, e siano tutti, come si può sempre supporre, di seconda specie, e si costruiscono le funzioni di Green $g_1(x\,y)$, $g_2(x\,y), \ldots$ $g_n(x\,y), \ldots$ ad essi relative, pel teorema precedente si avrà

$$g_1(x\,y) \geqq g_2(x\,y) \geqq g_3(x\,y) \geqq \cdots \geqq g_n(x\,y) \geqq \cdots$$

Se osserviamo d'altro canto che le funzioni g_i sono sempre positive o nulle, noi concludiamo che le funzioni $g_i(x\,y)$ hanno un limite determinato e finito $g(x\,y)$ in ogni punto interno ad $S(y')$, e a questo limite tendono uniformemente in qualunque campo interno a $S(y')$: la $g(x\,y)$ rappresenta quindi per il teorema del n. 4 una soluzione dell'equazione (IV).

Per mostrare che $g(x\,y)$ prende al contorno i valori assegnati, (o più propriamente che quando, essendo $(x'\,y')$ un punto interno ad $S(y')$, $(x\,y)$ tende ad un punto di s_1 o di s_2, $g(x\,y)$ tende a $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')$), si osservi intanto che, preso un punto $M \equiv (x_1\,y_1)$ del contorno, e fissato un numero positivo ε piccolo a piacere, si può trovare un intorno di M così piccolo che in esso sia $g(x\,y) \geqq h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x\,y') - \varepsilon$. Invero sia Q un poligono il cui contorno passi per M il quale contenga $S(y)$ e quindi anche tutti i poligoni p_i: $g_Q(x\,y)$ la funzione di Green ad esso relativa: sarà, qualunque sia i, $g_Q(x\,y) \leqq g_i(x\,y)$, e quindi $g_Q(x\,y) \leqq g(x\,y)$. Ma in M è $g_Q(x_1\,y_1) = h_{0\frac{1}{2}}(x_1\,y_1;\,x'\,y')$: e per la continuità di $g_Q(x\,y)$ e di $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x\,y')$, fissato un numero ε piccolo a piacere, si può sempre prendere un intorno di M tale che in esso $g_Q(x\,y) \geqq h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y') - \varepsilon$: quindi a più forte ragione sarà in questo intorno $g(x\,y) \geqq h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y') - \varepsilon$.

D'altro canto, preso un punto qualunque dell'intorno medesimo, esiste un poligono p_n a cui esso è interno, ed in cui la funzione $g_n(x y)$ è inferiore a $h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')$: quindi in questo punto sarà $g(x y) \leqq g_n(x y) < h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')$.

Segue che, preso un ε piccolo a piacere, esiste un intorno di M, tale che in tutti i punti $(x y)$ di esso interni ad $S(y')$ si ha $h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y') \geqq g(x y) \geqq h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y') - \varepsilon$.

Quindi $g(x y)$ avrà un valore limite anche in M e precisamente esso sarà uguale a $h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')$. La $g(x y)$ è quindi realmente la funzione di Green cercata.

§ 8. La funzione $\iint\limits_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')\, f(x y)\, d\,x\, d\,y$.

22. Riprendiamo ora una questione che al n. 14 avevamo lasciato in sospeso.

La funzione definita da

$$z(x' y') = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x y;\, x' y')\, f(x y)\, d\,x\, d\,y \tag{I}$$

è soluzione di (I)? E prima ancora: ammette essa le derivate prime rapporto ad x ed y, la derivata seconda rapporto ad x? Solo dopo avere risposto a queste domande potremo dire che il teorema di esistenza per (I) è equivalente all'analogo teorema per (II).

Per studiare facilmente la funzione (I) e le sue derivate occorre premettere qualche considerazione sopra gli integrali

$$\iint\limits_{(S y_1)} h_{\alpha\beta}(x y;\, x' y')\, d\,x\, d\,y, \qquad \iint\limits_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x y;\, x' y')\, f(x y)\, d\,x\, d\,y; \tag{2}$$

studiare per quali valori di α e β hanno senso, se essi sono limitati, ecc.

Questo studio noi avevamo già iniziato al n. 9; avevamo trovato in quel luogo che, se $2 + \alpha - 2\beta > 0$, $\alpha > 0$, gli integrali (2) esistono: ma qui vogliamo trovare condizioni meno restrittive.

Possiamo limitarci a studiare gli integrali del tipo

$$\iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x\, y;\ x'\, y')\ d\,x\, d\,y. \tag{3}$$

Quando questo esista, esisteranno pure certamente gli integrali (2), almeno quando $f(x\,y)$ sia finita o non abbia punti di infinito nell'intorno di $(x'\,y')$ e sia integrabile nel campo residuo.

Per studiare l'integrale (3) occorre calcolare l'integrale escludendo dal campo una piccola area τ contenente il punto $(x'\,y')$ indi fare tendere a zero τ e vedere se l'integrale ha un limite. Però quando si vogliano ammettere per α valori negativi, occorrerà essere certi che nei punti in cui $x = x'$, $y = y'$ la funzione sia integrabile, e quindi occorrerà supporre $\alpha > -1$.

Potremmo limitarci al considerare l'integrale esteso ad un piccolo campo contenente $(x'\,y')$; però noi vogliamo anche trovare un limite superiore per (3) quando $S(y')$ è tutto contenuto nel semipiano delle y positive (o più generalmente è tutto al disopra della caratteristica $y = y_1$): prenderemo quindi, poichè $h_{\alpha\beta}(x\,y;\ x'\,y')$ è sempre positiva, per $S(y')$ il massimo di questi campi, e cioè tutta la striscia compresa fra le caratteristiche $y = 0$ ed $y = y'$. Però se consideriamo che $h_{\alpha\beta}(x\,y;\ x'\,y')$ è funzione pari di $(x'-x)$ possiamo anche semplicemente supporre che $S(y')$ sia la metà di questa striscia, e cioè la regione compresa tra le rette $y = 0$, $y = y'$, $x = x'$; il valore dell'integrale esteso a tutta la striscia sarà il doppio del valore dell'integrale esteso a questa regione.

Per quanto riguarda il campo che dovremo escludere da $S(y')$ per poi passare al limite, osserveremo che potremo anche per nostro comodo attribuirgli una forma arbitrariamente determinata: infatti, ove per una tale forma esista un limite, questo esisterà per qualunque altra forma del campo, ed avrà il valore trovato per quella, poichè $h_{\alpha\beta}(x\,y;\ x'\,y')$ è sempre positivo. E perciò potremo prendere per tale campo quello compreso fra le rette $x = x'$, $y = y'$, $y = y' - \sigma$; e fare poi tendere a zero la σ. Avremo quindi da calcolare

$$\int_{x'}^{\infty}\int_{0}^{y'-\sigma} h_{\alpha\beta}(x\, y;\ x'\, y')\ d\,x\, d\,y,$$

e da trovarne il limite per $\sigma = 0$. Poniamo:

$$p = \frac{(x'-x)^2}{4\,(y'-y)}\qquad q = y' - y; \tag{4}$$

tale cambiamento di variabili sarà regolare ogni volta che nel campo di integrazione non è compreso alcun punto per cui $y' = y$. Quindi avremo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y'-\sigma} h_{\alpha\beta}(x\,y;\,x'\,y')\,d\,x\,d\,y = 2^{\alpha}\int_{0}^{\infty} e^{-p}\,p^{\frac{\alpha-1}{2}}\,d\,p\,.\int_{\sigma}^{y'} q^{\frac{\alpha+1-2\beta}{2}}\,d\,q. \tag{5}$$

Abbiamo così spezzato il nostro integrale nel prodotto di due altri: il primo esisterà certamente in virtù dell'ipotesi $\alpha + 1 > 0$; anzi esso è un integrale Euleriano

$$\int_{0}^{\infty} e^{-p}\,p^{\frac{\alpha-1}{2}}\,d\,p = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right). \tag{6}$$

Quanto al secondo esso esisterà per ogni valore di σ diverso da zero qualunque siano α e β, ed avrà per $\sigma = 0$ un limite finito tosto che sia $\frac{\alpha+1-2\beta}{2} > -1$ ossia $3+\alpha-2\beta > 0$. Deduciamo quindi che condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale (5) abbia senso è che $\alpha > -1$ $3+\alpha-2\beta > 0$.

Ma di più, se poniamo $3+\alpha-2\beta = \delta$ ed osserviamo che

$$\int_{\sigma}^{y'} q^{\frac{\alpha+1-2\beta}{2}}\,d\,q = \int_{\sigma}^{y'} q^{\frac{\delta}{2}-1}\,d\,q = \frac{2}{\delta}\left(y'^{\frac{\delta}{2}} - \sigma^{\frac{\delta}{2}}\right),$$

e ricordiamo le osservazioni fatte sopra, otterremo che, qualunque sia il campo $S(y')$, si ha la disuguaglianza

$$\iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x\,y;\,x'\,y')\,d\,x\,d\,y < L_{\alpha\beta}\,y'^{\frac{\delta}{2}}$$

$$L_{\alpha\beta} = \frac{2^{\alpha+2}}{\delta}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

E si potrà quindi conchiudere:

L'integrale (3), *e con esso gli integrali* (2), *hanno senso allora ed allora soltanto che* $\alpha+1>0$ *e* $3+\alpha-2\beta>0$. *Se si pone* $3+\alpha-2\beta=\delta$, *l'integrale* (3) *esteso ad un qualunque campo posto al disotto della retta* $y=y'$ *nel semipiano delle* y *positive (oppure più generalmente al disopra della retta*

$y - y_1$) *soddisfa alla limitazione*

$$\iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x\,y;\,x'\,y')\,dx\,dy \le L_{\alpha\beta}\, y'^{\frac{\delta}{2}}. \tag{7}$$

(*oppure* $\le L_{\alpha\beta}(y - y_1)^{\frac{\delta}{2}}$) *dove*

$$L_{\alpha\beta} = \frac{2^{\alpha-2}}{\delta}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Ci importa però pel seguito aggiungere un'osservazione, per il caso che si abbia a considerare *un integrale* (2) *in cui* $f(x\,y)$ *soddisfaccia ad una limitazione della forma*

$$f(x\,y) \le N\,y^{\gamma}, \tag{8}$$

N essendo una costante finita e $\gamma > -1$. Sarà allora

$$\iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x\,y;\,x'\,y')\,f(x\,y)\,dx\,dy \le 2N\int_{x'}^{\infty}\int_0^{y'} h_{\alpha\beta}(x\,y;\,x'\,y')\,y^{\gamma}\,dx\,dy;$$

e con la trasformazione (4)

$$\iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x\,y;\,x'\,y')\,f(x\,y)\,dx\,dy \le 2^{\alpha-1}N\int_0^{\infty} e^{-p}\,p^{\frac{\alpha-1}{2}}\,dp\int_0^{y'} q^{\frac{\alpha+1-2\beta}{2}}(y'-q)^{\gamma}\,dq =$$

$$2^{\alpha-1}N\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)y'^{\gamma+\frac{\delta}{2}}\int_0^1 q^{\frac{\alpha+1-2\beta}{2}}(1-q)^{\gamma}\,dq = 2^{\alpha-1}N\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)B\left(\frac{\delta}{2},\,\gamma+1\right)y'^{\gamma+\frac{\delta}{2}}.$$

E quindi infine, poichè $B\left(\frac{\delta}{2},\,\gamma+1\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma+1+\frac{\delta}{2}\right)}$, avremo la *notevole formula:*

$$\iint_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x\,y;\,x'\,y')\,f(x\,y)\,dx\,dy \le N\,L^{(1)}_{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma+1+\frac{\delta}{2}\right)}\,y'^{\gamma+\frac{\delta}{2}}. \tag{9}$$

dove $L^{(1)}_{\alpha\beta}$ è una costante *dipendente soltanto da* α *e* β:

$$L^{(1)}_{\alpha\beta} = 2^{\alpha-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Osservazione I. Il teorema precedente si presta a varie generalizzazioni. Anzitutto supponiamo che invece di due sole variabili x ed y si abbiano $n+1$ variabili $x_1\,x_2\ldots x_n\,y$: e posto $(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2+\cdots+(x_n-x'_n)^2=r^2$, si consideri la funzione

$$h_{\alpha\beta}(x_1\,x_2\ldots x_n\,y;\,x'_1\,x'_2\ldots x'_n\,y') = \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta}\,e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}. \tag{10}$$

e l'integrale

$$\int\!\!\int\cdots\int_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x_1\,x_2\ldots x_n\,y;\,x'_1\,x'_2\ldots x'_n\,y')\;d\,x_1\,d\,x_2\ldots d\,x_n\,d\,y. \tag{11}$$

$S(y')$ indicando un campo ad $n+1$ dimensioni compreso fra gli iperpiani $y=y'$ ed $y=0$: si avrà allora che *quando* $\alpha+1>0$, $\alpha+n+2-2\beta>0$, *ed allora soltanto, l'integrale* (11) *esiste*. Basta invero riferire lo spazio al nuovo sistema di coordinate che si ottiene non mutando la coordinata y e prendendo nell'iperpiano $y=0$ le coordinate polari invece delle cartesiane $x_1\,x_2\ldots x_n$. L'elemento di volume del nostro spazio sarà allora rappresentato da $\rho^{n-1}\,d\,\rho\,d\,\omega\,d\,y$, — dove $d\,\omega$ indica l'elemento della ipersfera di raggio 1 nello spazio di n dimensioni. E sarà

$$\int\!\!\int\cdots\int_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x_1\,x_2\ldots x_n\,y;\;x'_1\,x'_2\ldots x'_n\,y')\;d\,x_1\,d\,x_2\ldots d\,x_n\,d\,y =$$

$$= \int\cdots\int d\,\omega\int\!\!\int h_{\alpha+n-1,\beta}(\rho\,y;\;0\,y')\,d\,\rho\,d\,y,$$

onde si deduce immediatamente il nostro enunciato. E similmente si può osservare che, posto $\alpha+n+2-2\beta=\delta$ *esisterà un numero* $L'_{\alpha\beta}$ *dipendente solo da* α *e* β *e da* n *tale che*

$$\int\!\!\int\cdots\int_{S(y')} h_{\alpha\beta}(x_1\,x_2\ldots x_n\,y;\,x'_1\,x'_2\ldots x'_n\,y')\;d\,x_1\,d\,x_2\ldots d\,x_n\,d\,y < L'_{\alpha\beta}\,y'^{\frac{\delta}{2}}. \tag{12}$$

E se la funzione $f(x_1\,x_2\ldots x_n\,y)$ soddisfa ad una limitazione della forma

$$|f(x_1\,x_2\ldots x_n\,y)| \leq N\,y^\gamma.$$

dove N è una costante finita e $\gamma - 1 > 0$, si ha

$$\left.\begin{aligned}&\int\int\cdots\int_{S_{y'}} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 \ldots x_n\, y;\, x'_1 x'_2 \ldots x'_n\, y')\, f(x_1 x_2 \ldots x_n\, y)\, d x_1\, d x_2 \ldots d x_n\, d y \leq \\ &\qquad\qquad \leq N\, L^{(n)}_{\alpha\beta}\, \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma\left(\gamma + 1 + \frac{\delta}{2}\right)}\, y'^{\,\gamma + \frac{\delta}{2}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Osservazione II. Analoghi risultati si hanno quando in luogo di $h_{\alpha\beta}(x\, y;\, x'\, y')$ si considerino funzioni analoghe: per es.: una funzione

$$h^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(x\, y;\, x'\, y') = e^{-\frac{\lambda(x'-x)}{4(y'-y)}}\, \frac{(x'-x)^{\alpha}}{(y'-y)^{\beta}}\,,$$

λ essendo > 0. Infatti posto $y = \frac{\bar{y}}{\lambda}$, si ha $h^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(x\, y;\, x'\, y') = \frac{1}{\lambda^{\beta}}\, h_{\alpha\beta}(x\, \bar{y};\, x'\, \bar{y}')$. Onde l'asserto.

23. Premesse queste considerazioni non è difficile studiare le derivate delle funzioni (I)

$$z(x'\, y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\, x'\, y')\, f(x\, y)\, d x\, d y. \tag{I}$$

Intanto, se osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial x'}\, h_{0\frac{1}{2}}(x\, y;\, x'\, y') = -\frac{1}{2}\, h_{1\frac{3}{2}}(x\, y;\, x'\, y'), \tag{14}$$

e che per il teorema precedente, quando $f(x\, y)$ è finita nell'intorno del punto $(x\, y) = (x'\, y')$, ha senso ed è finito l'integrale

$$\int\int_{S_{y'}} h_{1\frac{3}{2}}(x\, y;\, x'\, y')\, f(x\, y)\, d x\, d y$$

e converge uniformemente pei varii valori di x, deduciamo immediatamente (*)

(*) Se $f(x\, y;\, \rho)$ e $\varphi(x\, y;\, \rho)$ sono due funzioni dipendenti da un parametro ρ e tali che $\frac{\partial \varphi(x\, y;\, \rho)}{\partial \rho} = f(x\, y;\, \rho)$, e se in un campo C del piano $x\, y$ esiste l'integrale $\int\int_C f(x\, y;\, \rho)\, d x\, d y$

che esiste la derivata di (1) rapporto ad x' e che è data da

$$\frac{\partial z(x'\,y')}{\partial x'} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int\!\!\int_{S(y')} h_{1,\frac{3}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\, f(x\,y)\, dx\, dy. \tag{15}$$

Meno semplice è lo studio delle derivate $\frac{\partial z(x'\,y')}{\partial y'}$, $\frac{\partial^2 z(x'\,y')}{\partial x'^2}$. Supporremo per queste che $f(x\,y)$ abbia in un intorno τ del punto $(x'\,y')$ rapporti incrementali finiti, od almeno che esistano dei numeri positivi N_1 ed α tali che, se $(x\,y)$ è un punto di τ, si abbia $\left| \frac{f(x\,y) - f(x'\,y')}{\left[(x'-x)^2 + (y'-y)^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right| < N_1$, e quindi anche $\left| \frac{f(x\,y) - f(x'\,y')}{|x'-x|^{\alpha} + |y'-y|^{\alpha}} \right| < N$ dove $N \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} N_1$ (*). Indicheremo con $\tau(y_1)$ la parte di τ posta al disotto della caratteristica $y = y_1$.

Cominciamo dal caso più semplice in cui $f(x\,y)$ è una qualunque costante, ad es. l'unità.

La funzione $\psi(x\,y) = x^2 + y$ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1;$$

---

e converge uniformemente per i varii valori di ρ si ha notoriamente

$$\int d\rho \int\!\!\int_C f(x\,y;\,\rho)\, dx\, dy = \int\!\!\int_C dx\, dy \int f(x\,y;\,\rho)\, d\rho = \int\!\!\int_C \varphi(x\,y;\,\rho)\, dx\, dy.$$

E quindi esiste la derivata dell'integrale $\int\!\!\int_C \varphi(x\,y;\,\rho)\, dx\, dy$ ed è data da $\int\!\!\int_C f(x\,y;\,\rho)\, dx\, dy$.

(*) Basta osservare che, se a e b sono positivi, ed α è qualunque > 0, si ha sempre $(a+b)^{\alpha} < 2^{\alpha}(a^{\alpha} + b^{\alpha})$. Invero sia ad es. $a \geq b$; sarà

$$\frac{b}{a} \leq 1, \qquad \frac{1 + \frac{b}{a}}{2} \leq 1, \qquad \left(\frac{1 + \frac{b}{a}}{2}\right)^{\alpha} \leq 1 < 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}.$$

Quindi sarà pure

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\alpha} < 2^{\alpha}\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\right) \quad \text{e} \quad (a+b)^{\alpha} < 2^{\alpha}(a^{\alpha} + b^{\alpha}). \qquad \text{c. v. d.}$$

quindi applicando al campo $S(y')$ la $(7)_1$ del n. 10 otterremo

$$\left.\begin{aligned} x'^2 - y' &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y') \left\{ \left[2x - (x^2 - y)\frac{x' - x}{2(y' - y)}\right] dy + (x^2 - y)\, dx \right\} \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y')\, dx\, dy = \chi(x'y') + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y')\, dx\, dy; \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$\chi(x'y')$ indicando una funzione regolare colle sue derivate all'interno di $S(y')$, soluzione di (11). Si avrà quindi che in questo caso particolare esiste la derivata di (1) rapporto ad x', e precisamente è

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y')\, dx\, dy\right] = 1 - \frac{\partial \chi}{\partial y'}.$$

Quando $f(xy)$ non sia costante si ponga $\varphi(xy) = f(xy) - f(x'y')$: per le nostre ipotesi si avrà in σ: $|\varphi(xy)| < N\{|x' - x|^{\alpha} + |y' - y|^{\alpha}\}$. Per (16) si potrà scrivere, ponendo $f(x'y') = f'$,

$$z(x'y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y')\, \varphi(xy)\, dx\, dy + f'\chi(x'y') - f'(x'^2 - y'). \quad (17)$$

Gli ultimi due termini di (17) ammettono evidentemente derivata rapporto ad y' poichè l'ammettono $\chi(x'y')$ ed $x'^2 + y'$, ed f' è costante. Non rimane che ad esaminare il primo termine. Si ha, ricordando il significato sopra assegnato a σ ed a $\sigma(y_1)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\Delta y' = 0} \frac{1}{\Delta y'}\left[\iint_{S(y' + \Delta y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y' + \Delta y')\, \varphi(xy)\, dx\, dy - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \iint_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y')\, \varphi(xy)\, dx\, dy\right] = \\ &= \lim_{\Delta y' = 0} \frac{1}{\Delta y'}\left\{\left[\iint_{S(y' + \Delta y') - \sigma(y' + \Delta y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y' + \Delta y')\, \varphi(xy)\, dx\, dy - \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \iint_{S(y') - \sigma(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y')\, \varphi(xy)\, dx\, dy\right] + \\ &\qquad + \iint_{\sigma(y')} \left[h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y' + \Delta y') - h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y')\right] \varphi(xy)\, dx\, dy + \\ &\qquad \left. + \iint_{\sigma(y' + \Delta y') - \sigma(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy; x'y' + \Delta y')\, \varphi(xy)\, dx\, dy \right\} = \\ &= \lim_{\Delta y' = 0} \frac{1}{\Delta y'}\left[I_1 + I_2 + I_3\right]. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

È facile esaminare le singole I di (18). Osservando che $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')$ e la sua derivata rapporto ad y'

$$\frac{\partial}{\partial y'} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y') = h_{2\frac{5}{2}}(x\,y;\,x'\,y') - \frac{1}{2}\,h_{0\frac{3}{2}}(x\,y;\,x'\,y') \tag{19}$$

sono regolari in tutto $S(y') - \tau(y')$, e che per $x = x'$, $y = y'$ è $h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y') = 0$ si ottiene

$$\lim_{\Delta y'=0} \frac{1}{\Delta y'}\, I_1 = \iint_{S(y')-\tau(y')} \frac{\partial}{\partial y'}\, h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y. \tag{20}$$

Allo stesso modo per (19) e per l'ipotesi fatta su $\varphi(x\,y)$ quando $(x\,y)$ è in τ, per il teorema precedente l'integrale

$$\iint_{\tau(y')} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\, h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,\bar{y})\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y$$

esiste ed è uniformemente convergente per tutti i valori di $\bar{y} \geqq y$: invero esso è inferiore a

$$N \iint_{\tau(y')} \left| h_{2\frac{5}{2}}(x\,y;\,x'\,\bar{y}) - \frac{1}{2}\,h_{0\frac{3}{2}}(x\,y;\,x'\,\bar{y}) \right| \left[\,|x' - x|^{\alpha} + |y' - y|^{\alpha}\right] d\,x\,d\,y \leqq$$

$$\leqq N \iint_{\tau(\bar{y})} \left| h_{2\frac{5}{2}}(x\,y;\,x'\,\bar{y}) - \frac{1}{2}\,h_{0\frac{3}{2}}(x\,y;\,x'\,\bar{y}) \right| \left[\,|x' - x|^{\alpha} + |\bar{y} - y|^{\alpha}\right] d\,x\,d\,y \leqq$$

$$\leqq N \iint_{\tau(\bar{y})} \Big\{ h_{2\frac{5}{2}}(x\,y;\,x'\,\bar{y}) + h_{2\frac{5-2\alpha}{2}}(x\,y;\,x'\,\bar{y})$$

$$+ \frac{1}{2}\,h_{\alpha\frac{3}{2}}(x\,y;\,x'\,\bar{y}) + \frac{1}{2}\,h_{0\frac{3-2\alpha}{2}}(x\,y;\,x'\,\bar{y}) \Big\}\,d\,x\,d\,y.$$

Il precedente integrale rappresenta quindi la derivata rapporto ad y dell'integrale $\iint_{\tau(y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y)\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y$; quindi si ha che

$$\lim_{\Delta y'=0} \frac{1}{\Delta y'}\, I_2 = \iint_{\tau(y')} \frac{\partial}{\partial y'}\, h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\,x'\,y')\,\varphi(x\,y)\,d\,x\,d\,y. \tag{21}$$

Infine devesi studiare $\lim\limits_{\Delta y'=0} \frac{1}{\Delta y'} I_3$. Si ha facilmente

$$\lim_{\Delta y'=0} \frac{1}{\Delta y'} I_3 = 0. \tag{22}$$

Invero si ricordi la solita condizione cui soddisfa $\varphi(xy)$: si avrà

$$I = \iint_{i(y'+\Delta y')-i(y')} h_{\alpha\frac{1}{2}}(xy;\,x'\,y'+\Delta y')\,\varphi(xy)\,dx\,dy \leq$$

$$\leq N\left\{\iint_{i(y'+\Delta y')-i(y')} h_{\alpha\frac{1}{2}}(xy;\,x'\,y'+\Delta y')\,dx\,dy +\right.$$

$$\left.+\iint_{i(y'+\Delta y')-i(y')} h_{\alpha\frac{1}{2}}(xy;\,x'\,y'+\Delta y')\,|y'-y|^{\alpha}\,dx\,dy\right\}.$$

Ora si ricordi che $i(y'+\Delta y')-i(y')$ è interno ad una striscia di altezza $\Delta y'$ e dal teorema del n. 22 si avrà

$$\iint_{i(y'+\Delta y')-i(y')} h_{\alpha\frac{1}{2}}(xy;\,x'\,y')\,dx\,dy \leq L_{\alpha\frac{1}{2}}(\Delta y')^{1+\frac{\alpha}{2}}.$$

E ancora facendo la sostituzione $y = y' - \eta$, per la (9) del n. 22 si ha

$$\iint_{i(y'+\Delta y')-i(y')} h_{\alpha\frac{1}{2}}(xy;\,x'\,y'+\Delta y')\,|y'-y|^{\alpha}\,dx\,dy \leq$$

$$\leq \iint_{i(y'+\Delta y')-i(y')} h_{\alpha\frac{1}{2}}(x\eta;\,x'\Delta y')\,\eta^{\alpha}\,dx\,d\eta \leq L^{(0)}_{\alpha\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\Delta y'^{\alpha+1} \leq L^{(0)}_{\alpha\frac{1}{2}}\Delta y'^{\alpha+1}.$$

Onde infine

$$I < N\left(L_{\alpha\frac{1}{2}} + L^{(0)}_{\alpha\frac{1}{2}}(\Delta y')^{\frac{\alpha}{2}}\right)(\Delta y')^{1+\frac{\alpha}{2}},$$

e di qui segue la (22).

Riassumendo quindi dalle formole (17) (18) (20) (21) (22) otteniamo che esiste la derivata di $z(x'y')$ rapporto ad y', ed è data dalla formula

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y'} = f(x'y')\left(1 - \frac{\partial L(x'y')}{\partial y'}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint_{S(y')}\frac{\partial}{\partial y'}h_{\alpha\frac{1}{2}}(xy;\,x'y')\,\varphi(xy)\,dx\,dy\\ [\varphi(xy) + f(xy) - f(x'y')].\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Analogamente si trova

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = f(x'y')\left(2 - \frac{\partial L(x'y')}{\partial x'}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint_{S(y')}\frac{\partial}{\partial x'}h_{\alpha\frac{1}{2}}(xy;\,x'y')\,\varphi(xy)\,dx\,dy. \tag{24}$$

E da (23) (24) si deduce evidentemente che *la funzione $z(x'y)$ definita da (1), quando la funzione $f(xy)$ sia integrabile in $S(y')$, finita nell'intorno di $(x'y')$ e tale che esistano due numeri positivi α e N per modo che in questo intorno*

$$\left| \frac{f(xy) - f(x'y)}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right| < N,$$

ammette le due derivate prime e la derivata seconda rapporto ad x; e soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - \frac{\partial z}{\partial y'} = f(x'y'). \qquad (\mathrm{I})$$

Onde ormai si può dire che *abbiamo dimostrato il teorema di esistenza anche per l'equazione* (I).

§ 9. Sull'analiticità rapporto alla variabile x delle soluzioni dell'equazione (I).

24. In una mia Nota (*) ho mostrato che le soluzioni dell'equazione (II) sono sempre funzioni analitiche della variabile x, e cioè della coordinata che varia su ogni caratteristica. Vogliamo ora dimostrare un teorema analogo per le soluzioni della equazione (I):

Se nell'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(xy) \qquad (\mathrm{I})$$

la funzione $f(xy)$ è, nell'intorno del punto $x_0\, y_0$, funzione analitica della variabile x, ogni soluzione z dell'equazione (I) finita e continua insieme colle sue derivate $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, è nell'intorno medesimo funzione analitica della variabile x.

Per dimostrare tale proposizione si applichi alla funzione z la formula $(7)_1$ del n. 10 prendendo quale campo S un campo qualunque contenente $(x_0\, y_0)$ in cui siano soddisfatte le condizioni enunciate sopra per le derivate e per la funzione $f(xy)$: in virtù del teorema relativo all'equazione (II) che ho

(*) E. E. Levi, *Sul problema di Cauchy*. (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1907 2.° semestre) Cfr. pure E. Holmgren, *Om Cauchys problem etc.* (Arkiv för Matematik etc. Vol. II (1906)).

richiamato più sopra, risulterà che gli integrali curvilinei che compaiono nella (7), del n. 10 sono funzioni analitiche di x: onde basterà dimostrare l'analiticità rispetto ad x' della funzione

$$z(x'y') = \int\int_{S(y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')\, f(xy)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Questa formula definisce la $z(x'y')$ per $(x'y')$ reali, ma perde senso quando ad x' si diano valori complessi. Invero studiamo $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$ per i valori complessi di x' e x quando y' e y resti reale. Si ponga $x = \bar{x} + i\bar{\bar{x}}$, e rappresentino le variabili $\bar{x}, \bar{\bar{x}}, y$ le coordinate in uno spazio a 3 dimensioni: diremo in esso *piano reale* quello in cui $\bar{\bar{x}} = 0$. Fissato $x'y'$, la funzione $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$ sarà analitica regolare in tutti i punti in cui $y < y'$ e sarà singolare sopra tutto il piano $y = y'$: ma, mentre quando ci si avvicina per valori di $y < y'$ ad un punto del piano $y = y'$ determinato da un valore di $x = \bar{x} + i\bar{\bar{x}}$ per cui $|\bar{x} - \bar{x}'| > |\bar{\bar{x}} - \bar{\bar{x}}'|$, $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$ tende a zero, quando invece ci si avvicina ad un punto x del piano $y = y'$ per cui $|\bar{x} - \bar{x}'| \leq |\bar{\bar{x}} - \bar{\bar{x}}'|$ il modulo di $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$ cresce all'infinito: ed anzi se nella precedente condizione vale precisamente il segno di disuguaglianza noi siamo sicuri che questo modulo cresce più rapidamente di qualunque potenza dell'inversa della distanza dei punti $x'y'$ ed xy.

Risulta di qui evidente perchè il precedente integrale non ha senso per valori complessi di x: invero il campo $S(y')$ essendo sul piano reale si avrà su esso $\bar{\bar{x}} = 0$, e, tosto che $\bar{\bar{x}}' \neq 0$ in $S(y')$ vi saranno certamente valori di x tali che $|\bar{x} - \bar{x}'| < |\bar{\bar{x}}'|$; e quindi $h_{0\frac{1}{2}}(xy;\, x'y')$ non sarà integrabile nel campo $S(y')$.

Tuttavia può avere senso la domanda: la funzione definita da (1) per valori reali di x' è analitica? e se sì, quali sono i suoi valori per x' complessa? È ciò che noi vogliamo ora esaminare (*).

(*) Il metodo che seguiremo è simile a quello che ho tenuto nel dimostrare il teorema analogo per le soluzioni delle equazioni ellittiche nella Memoria: *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, § 11 (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1907, tomo XXIV). Cfr. anche una Nota collo stesso titolo pubblicata nei *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, 2.° semestre 1907.

25. Si osservi anzitutto che possiamo supporre di assegnare ad $S(y')$ forma e dimensioni arbitrarie; così ad esempio possiamo supporre che $S(y')$ sia un semicerchio con centro sulla $y = y'$ e posto tutto al disotto della caratteristica $y = y'$: per semplicità supporremo, facendo, ove occorra, una traslazione di assi, che esso abbia il centro nel punto $(0\, y')$ e abbia per raggio R: contando su questo l'arco ϑ a partire dal punto in cui il semicerchio incontra la semiretta $y = y'$ contenente valori positivi di x', le coordinate dei punti della semicirconferenza saranno date da $R \cos \vartheta$, $y' + R \operatorname{sen} \vartheta$. Volendo studiare (1) quando x' varia, ma y' ha un valore fisso, possiamo senz'altro indicare $S(y')$ con S.

Supponiamo inoltre che $f(x\, y)$ sia funzione analitica regolare di x in tutto un campo complesso Σ contenente nel suo interno il campo S del piano reale: sia M il suo massimo valore assoluto in Σ.

Infine indichiamo con $P_\gamma\, (\gamma < 1)$ quella parte del piano $y = y'$ in cui $x \leq \gamma\, R - \overline{x'}$. Preso un qualunque punto di P_γ lo si unisca coi punti del contorno di S: supporremo che tutti i punti dei segmenti rettilinei così ottenuti siano in Σ: e ciò sarà sempre possibile se si restringe sufficientemente il campo S impiccolendo R. Indicheremo con P il campo somma di tutti i campi P_γ (corrispondenti ai varii valori di γ): è questo un insieme di punti non chiuso.

Ciò posto, ricorriamo alla definizione medesima dell'integrale (1). Si escluda dal campo S il punto $(x'\, y')$ mediante un intorno $\tau_\varepsilon(x')$ che divenga infinitesimo con ε: sarà per definizione

$$z(x'\, y') = \lim_{\varepsilon = 0} z_\varepsilon(x'\, y'): \tag{2}$$

$$z_\varepsilon(x'\, y') = \iint\limits_{S_{\varepsilon}(x')} h_{\frac{1}{2}}(x\, y;\; x'\, y')\, f(x\, y)\, d\,x\, d\,y \tag{3}$$

dove abbiamo posto $S_\varepsilon(x') = S - \tau_\varepsilon(x')$. Supporremo che $\tau_\varepsilon(x')$ sia la figura omotetica di S con centro di omotetia in $(x'\, y')$ e rapporto di omotetia ε.

Cominciamo dallo studiare $z_\varepsilon(x'\, y')$ considerata quale funzione di x' per valori reali di x' in quanto è definita da (3). Essa dipende da x' in quanto ne dipende l'integrando ed in quanto ne dipende il campo di integrazione: per facilitarne lo studio introduciamo due nuove invariabili ϑ e ρ tali che il campo di integrazione variabile si rappresenti sopra un campo fisso. Perciò preso un punto $(x'\, y')$ attribuiamo ai punti $(x\, y)$ che sono su uno stesso raggio per $(x' y')$ la stessa coordinata ϑ del punto in cui il raggio incontra il contorno semicircolare di S: e su ogni raggio prendiamo come coordinata ρ quel valore che si ottiene interpolando linearmente sul raggio medesimo per modo che al punto $(x y) = (x' y')$ corrisponda il valore $\rho = 0$, al punto in cui il raggio incontra il contorno di S corrisponda $\rho = 1$. Le formule di trasformazione saranno

$$x = x' - \rho (x' - R \cos \vartheta) \quad y = y' - \rho R \operatorname{sen} \vartheta, \tag{4}$$

ed il campo S_ε sarà rappresentato nel piano in cui ρ e ϑ sono coordinate polari, nella semicorona circolare k_ε compresa fra i due archi di raggio ε ed 1 in cui ϑ va da 0 a π, ed il campo S sarà rappresentato nel semicerchio k di raggio 1 in cui ϑ va da 0 e π. E si avrà

$$z_\varepsilon (x' y') = R \int\int_{k_\varepsilon} h_{0\frac{1}{2}} (x y; x' y') f(x y) \rho (R - x' \cos \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta \tag{5}$$

dove per $(x y)$ devonsi intendere i valori dati da (4).

La funzione sotto il segno integrale dipende da $x' y'$, ρ e ϑ; ove per ogni valore di ρ e ϑ in k_ε e per il valore prefissato di y' essa fosse funzione analitica di x', anche $z_\varepsilon (x' y')$ sarebbe funzione analitica di x'. Ma ciò non è poichè nei punti in cui $\vartheta = 0$ o $\vartheta = \pi$ e quindi $y = y'$, noi sappiamo che $h_{0\frac{1}{2}} (x y; x' y')$ non è analitica in x'. Ma si osservi che chiamando $k_{\varepsilon\eta}$ quel settore della corona circolare k_ε il quale è compreso fra i raggi di anomalia η e $\pi - \eta$, e ponendo

$$z_{\varepsilon\eta} (x' y') = R \int\int_{k_{\varepsilon\eta}} h_{0\frac{1}{2}} (x y; x' y') f(x y) \rho (R - x' \cos \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta, \tag{6}$$

si ha

$$z_\varepsilon (x' y') = \lim_{\eta = 0} z_{\varepsilon\eta} (x' y'), \quad z (x' y') = \lim_{\varepsilon = 0} \lim_{\eta = 0} z_{\varepsilon\eta} (x' y'). \tag{7}$$

Se osserviamo che l'integrando dell'integrale (6) è per ogni valore fisso di ρ, ϑ in $k_{\varepsilon\eta}$ funzione analitica di x' nell'intorno di un qualunque punto reale $(x' y')$, otteniamo evidentemente che $z_{\varepsilon\eta} (x' y')$ è funzione analitica di x'. E per (7) risulterà che per valori reali di x', $z_\varepsilon (x' y')$ e $z (x' y')$ sono limiti di una successione di funzioni analitiche $z_{\varepsilon\eta} (x' y')$; onde sarà dimostrato che anche queste funzioni sono analitiche nell'intorno di un punto $(x' y')$ appena si provi che la successione delle $z_{\varepsilon\eta}(x'y')$ converge uniformemente nell'intorno (complesso) del punto medesimo. Cerchiamo a tal fine di determinare il valore di $z_{\varepsilon\eta}(x'y')$ per valori complessi di x'.

Si consideri la superficie conica projettante da $(x'y')$ i punti di S per cui ϑ è compreso fra η e $\pi-\eta$; quando in (4) si dànno valori complessi ad x' il campo $k_{\varepsilon\eta}$ viene rappresentato, nelle variabili (xy) da quei punti che si trovano su questa superficie conica fra il contorno di S e la curva omotetica a questo con centro di omotetia in $(x'y')$ e rapporto di omotetia ε: chiameremo questo campo $\Gamma_{\varepsilon\eta}(x'y')$. Siccome esso è formato da punti in cui $y < y'$, $h_{0\frac{1}{2}}(xy;x'y')$ sarà sempre funzione analitica regolare sia di x che di x': o in altri termini, quando ρ e ϑ sono fissi in $k_{\varepsilon\eta}$, $h_{0\frac{1}{2}}(xy;x'y')$ sarà sempre funzione analitica regolare di x'. Di più, se $x'y'$ è in Σ, anche tutti i punti (xy) di $\Gamma_{\varepsilon\eta}(x'y')$ sono in Σ e quindi la funzione $f(xy)$ è analitica regolare in x e in quei punti: anche qui possiamo dire che fissati ρ e ϑ in $k_{\varepsilon\eta}$ sarà $f(xy)$ funzione analitica regolare di x'. Quindi la funzione $z_{\varepsilon\eta}(x'y')$ è analitica regolare di x' finchè $(x'y')$ è in Σ: essa è data anche per valori complessi dalla (6): possiamo anche dire, introducendo nuovamente le variabili x ed y, che essa è data da

$$z_{\varepsilon\eta}(x'y') = \iint_{\Gamma_{\varepsilon\eta}(x'y')} h_{0\frac{1}{2}}(xy;x'y')\, f(xy)\, dx\, dy. \tag{8}$$

Si prenda ora un numero σ arbitrariamente piccolo, e, fissato γ, si supponga che il punto $(x'y')$ sia in un campo interno a C_γ in cui si abbia $R-|x'|>\sigma$: vogliamo mostrare che in tale campo $z_{\varepsilon\eta}(x'y')$ tende uniformemente ad un limite. Infatti sia γ_1 un numero positivo tale che $\gamma+\gamma_1<1$: noi potremo trovare un angolo H tale che quando ϑ è sempre fra 0 ed H o fra $\pi-H$ e π si abbia $|\overline{x'}| - R\cos\vartheta > (\gamma+\gamma_1)[R-|\overline{x'}|]$. Consideriamo allora la differenza $z_{\varepsilon\eta}-z_{\varepsilon'\eta'}$ supponendo che sia $\varepsilon'<\varepsilon$, $\eta'<\eta<H$. Avremo:

$$\left.\begin{aligned} z_{\varepsilon\eta}-z_{\varepsilon'\eta'} &= \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\int_{H}^{\pi-H} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\,\frac{R-x'\cos\vartheta}{\sqrt{R\rho\operatorname{sen}\vartheta}}\,f(xy)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta \; + \\ &+\left\{\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\int_{\eta}^{H}+\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\int_{\pi-H}^{\pi-\eta}+\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\int_{\eta'}^{\eta}+\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\int_{\pi-\eta}^{\pi-\eta'}\right\} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\,\frac{R-x'\cos\vartheta}{\sqrt{R\rho\operatorname{sen}\vartheta}}\,f(xy)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Si osservi ora che, per la limitazione cui è soggetto x' in P_γ, $R - x'\cos\vartheta < \sqrt{2(1-\gamma^2)}\,R < 2R$, e quindi quando ϑ varia tra H e $\pi - H$ si ha $\dfrac{R - x\cos\vartheta}{\sqrt{R\,\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}} < \dfrac{2\sqrt{R}}{\sqrt{\varrho\,\mathrm{sen}\,H}}$. Inoltre, se con $\Re(\alpha)$ indichiamo la parte reale di α, si ha per questi valori di ϑ: $\Re\left(-\dfrac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}\right) = \varrho\,\dfrac{\bar{\bar{x}}'^2 - (\bar{x}' - R\cos\vartheta)^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} < \varrho\,\dfrac{\bar{x}'^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} < \dfrac{\varrho\gamma'^2[R - \bar{x}']^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} < \dfrac{\varrho\gamma'^2\sigma^2}{4R\,\mathrm{sen}\,H}$. Quindi, ricordando che la funzione $f(x\,y)$ è in modulo $< M$, si avrà intanto per il primo integrale

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\int_{H}^{\pi-H} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\,\frac{R - x\cos\vartheta}{\sqrt{R\,\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}}\,f(x\,y)\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta <\\ &\qquad < \frac{2\pi\sqrt{R}\,M}{\sqrt{\mathrm{sen}\,H}}\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} e^{\frac{\varrho\gamma'^2\sigma^2}{4R\,\mathrm{sen}\,H}}\sqrt{\varrho}\,d\varrho < \frac{4\pi\sqrt{R}\,M}{\sqrt{\mathrm{sen}\,H}}\,e^{\frac{\varepsilon\gamma'^2\sigma^2}{4R\,\mathrm{sen}\,H}}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} - \varepsilon'^{\frac{3}{2}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Quando poi ϑ è minore di H o maggiore di $\pi - H$ si avrà, rammentando che $|\bar{x}' - R\cos\vartheta| > |\bar{x}'| - R\,|\cos\vartheta| > (\gamma - \gamma_1)(R - |\bar{x}'|)$

$$\Re\left(-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}\right) = -\varrho\,\frac{(\bar{x}' - R\cos\vartheta)^2 - \bar{\bar{x}}'^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} < -\varrho\,\frac{\gamma_1^2[R - |\bar{x}'|]^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta} < -\varrho\,\frac{\gamma_1^2\sigma^2}{4R\,\mathrm{sen}\,\vartheta}.$$

Quindi si avrà in questo caso

$$e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\,\frac{R - x'\cos\vartheta}{\sqrt{R\,\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}}\,f(x\,y)\,\varrho < M\,2\sqrt{R}\,e^{-\frac{\gamma_1^2\sigma^2}{4R}\frac{\varrho}{\mathrm{sen}\,\vartheta}}\sqrt{\frac{\varrho}{\mathrm{sen}\,\vartheta}}.$$

Ma il massimo valore assoluto di $e^{-\alpha^2 x^2}x$ è $e^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}\,\alpha}$, quindi avremo ancora

$$e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\,\frac{R - x\cos\vartheta}{\sqrt{R\,\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}}\,f(x\,y)\,\varrho < \frac{\sqrt{8}\,R\,M}{\gamma_1\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}} < \frac{2\,R\,M}{\gamma_1\sigma}.$$

Sostituendo quindi nel secondo gruppo degli integrali di (9) otterremo che la loro somma è inferiore a

$$[(\varepsilon - \varepsilon')\,H + \eta_1 - \eta_1']\,\frac{4\,R\,M}{\gamma_1\sigma}. \tag{11}$$

E quindi da (9) (10) (11) dedurremo che finchè $(x'y')$ è in quella parte di P_γ in cui è $R(x') > \sigma$, si ha

$$z_{\varepsilon\eta} - z_{\varepsilon'\eta'} < A(\varepsilon - \varepsilon') + B(\eta - \eta'),$$

A e B essendo due numeri finiti dipendenti soltanto da σ e da γ. In quella regione $z_{\varepsilon\eta}(x'y')$ tende quindi uniformemente al suo limite $z(x'y')$: quindi $z(x'y')$ sarà funzione regolare analitica di x' in tutti i punti della regione medesima. Siccome γ e σ sono arbitrarii potremo quindi anche conchiudere che *nelle ipotesi fatte la funzione $z(x'y')$ definita da (I) per valori reali di x' rappresenta una funzione analitica regolare di x' nell'intorno di un qualunque punto* **interno** *a P.*

E se ricorriamo alla formula (8) e passiamo al limite per ε ed η tendenti a zero noi potremo ancora dire che *la funzione $z(x'y')$ è rappresentata nei punti interni a P dall'integrale*

$$\iint\limits_{\Gamma(x'y')} h_{0\frac{1}{2}}(x\,y;\ x'\,y')\,f(x\,y)\,dx\,dy,$$

$\Gamma(x'y')$ indicando la superficie conica che projetta da $(x'y')$ il contorno di S (*).

§ 10. Estensione al caso di più variabili.

26. In questo ultimo paragrafo vogliamo brevemente indicare le modificazioni che richiedono i ragionamenti precedenti quando si supponga che le variabili siano più di 2, e che in luogo delle (I) e (II) si abbiano le equazioni

$$\Delta_2 z - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x_1\,x_2\,\dots\,x_n\,y) \quad \left(\Delta_2 z = \sum_1^n \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\right) \tag{III}$$

$$\Delta_2 z - \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{V}$$

Supporremo per semplicità $n = 2$: nessun'altra complicazione fuori che nella notazione porterebbe il trattare il caso generale. Indicheremo con s

(*) È chiaro come queste considerazioni permettono di estendere la formula di Green del § 3 ai valori complessi della variabile x.

una superficie tutta al finito (*), posta nel semispazio delle y positive. Supporremo che ogni piano caratteristico $y = y'$ per cui $0 \leq y \leq y_0$ limiti insieme con s una porzione finita di spazio che indicheremo con $S(y')$ posta tutta al disotto del piano caratteristico medesimo: indicheremo con $s(y')$ la porzione di s che si trova al disotto di $y = y'$, con $c(y')$ la linea in cui s sega $y = y'$, e con $p(y')$ l'area racchiusa da $c(y')$. Supporremo infine che $s(y')$ abbia piano tangente determinato mobile con continuità al variare del punto di contatto fatta al più eccezione per alcune linee o punti eccezionali e soddisfaccia inoltre a qualche minore condizione che porremo più tardi nel corso della discussione: $c(y')$ avrà anche essa tangente nei punti generici: chiameremo n la direzione della normale alla curva $c(y')$ in un suo punto arbitrario volta verso l'interno di $p(y')$.

E ci proporremo di invertire la proposizione del n. 6 e di mostrare che, *assegnata ad arbitrio una funzione finita e continua del punto di s, esiste in S una soluzione di* (III) (*ed una di* (V)) *la quale prende su s i valori assegnati.*

Incominciamo coll'estendere la formula di Green e le considerazioni del § 3: vedremo per tal via quali ipotesi convenga aggiungere sulla natura del contorno. Si consideri l'equazione aggiunta di (V)

$$\Delta_2 v + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{VI}$$

Se $v(x_1 x_2 y)$ è una soluzione di (VI) e $z(x_1 x_2 y)$ una di (III) ed entrambe sono finite e continue in $S(y')$ e su $s(y')$ otterremo facilmente, ricordando che su $p(y')$ è $dy = 0$, la seguente formula analoga alla (1) del § 3:

$$\left.\begin{aligned} \iiint_{S(y')} v f(x_1 x_2 y)\, dx_1\, dx_2\, dy = & -\iint_{s(y')} \left(v \frac{\partial z}{\partial n} - z \frac{\partial v}{\partial n} \right) dc\, dy \\ & + \iint_{s(y')} v z\, dx_1\, dx_2 - \iint_{p(y')} v z\, dx_1\, dx_2 ; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(*) Potremmo anche supporre che S ed s non siano tutte al finito: ma che, restando sempre in uno stato compreso fra i piani caratteristici $y = 0$ ed $y = y_0$, si estendano anche all'infinito. Otterremo così l'analogo dei campi di terza specie: ma al modo stesso che quelli non presentarono negli studii precedenti difficoltà loro proprie e sempre si poterono far rientrare con assai semplici considerazioni nel tipo dei campi ordinari, così avverrà in questo luogo: onde noi in quanto segue non staremo a distinguere questo caso e sottintenderemo questa possibile estensione.

nel primo integrale del secondo membro $d\,c$ indica l'elemento d'arco della curva $c(y)$ percorsa nel verso positivo rapporto a $p(y)$: ed analogamente nel secondo integrale devesi intendere che la faccia positiva del piano tangente sia volta verso l'interno di S.

Applichiamo questa formula al campo $S(y'-\varepsilon)$ prendendo quale funzione $v(x_1\,x_2\,y)$ la

$$h_{01}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y') = e^{-\frac{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2}{4(y'-y)}}\,\frac{1}{y'-y} \tag{2}$$

e facendo poi tendere a zero la ε. Noi otterremo in modo analogo a quanto si vide nel n. 10

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon=0}\iint\limits_{p(y'-\varepsilon)} z(x_1\,x_2\,y'-\varepsilon)\,\frac{1}{\varepsilon}\,e^{-\frac{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2}{4\varepsilon}}\,d\,x_1\,d\,x_2 = \\
&= -\iint\limits_{s(y')}\left\{h_{01}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')\,\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial h_{01}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')}{\partial n}\,z\right\}d\,c\,d\,y \\
&\qquad\qquad - \iint\limits_{p(y')} h_{01}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')\,z\,d\,x_1\,d\,x_2 + \\
&\qquad\qquad + \iiint\limits_{S(y')} h_{01}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')\,f(x_1\,x_2\,y)\,d\,x_1\,d\,x_2\,d\,y
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

poichè, gli integrali del secondo membro hanno senso almeno finchè il punto $(x'_1\,x'_2\,y')$ è *interno* od *esterno* a $p(y')$ (*). Prima di procedere a cercare il limite del primo membro della formula precedente, si osservi che il secondo membro si può scrivere più semplicemente: si noti invero che $h_{01}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')$ dipende da x_1 e x_2 solo in quanto ne dipende da

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2},$$

e che y è indipendente dalla variabile n, talchè si ha

$$\frac{\partial h_{01}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')}{\partial n} = \frac{\partial h_{01}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{2}\,h_{12}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')\cos(\widehat{r\,n}),$$

(*) Invero si ha che esiste l'ultimo integrale di (3) ed è finito e continuo in tutto lo spazio, poichè essendo $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $n = 1$ sarà $\alpha + n + 2 - 2\beta = 2 > 0$ (cfr. n. 22); e gli integrali di superficie che compaiono in (3) esistono pure, perchè quando $(x_1\,x_2\,y)$ è distante da $(x'_1\,x'_2\,y')$ l'integrando è sempre finito.

quando con $\widehat{r\,n}$ si indichi l'angolo della direzione positiva della normale a $c\,(y)$ col raggio vettore $(x'_1\, x'_2) \rightarrow (x_1\, x_2)$.

Quindi la (3) si può scrivere:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon=0} \iint\limits_{p(y'-\varepsilon)} z\,(x_1\, x_2\, y' - \varepsilon)\, \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, d\,x_1\, d\,x_2 = \\
&\qquad = -\iint\limits_{s(y')} h_{01}\,(x_1\, x_2\, y;\ x'_1\, x'_2\, y') \left\{ \frac{\partial z}{\partial n}\, d\,c\, d\,y - z\, d\,x_1\, d\,x_2 \right\} - \\
&\qquad - \frac{1}{2} \iint\limits_{s(y')} h_{12}\,(x_1\, x_2\, y;\ x'_1\, x'_2\, y') \cos(\widehat{r\,n})\, z\, d\,c\, d\,y + \\
&\qquad + \iiint\limits_{S(y')} h_{01}\,(x_1\, x_2\, y;\ x'_1\, x'_2\, y')\, f\,(x_1\, x_2\, y)\, d\,x_1\, d\,x_2\, d\,y.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Esaminiamo ora il primo membro di (4) (o di (3)). Procederemo nel modo seguente (*). Presa la funzione $z\,(x_1\, x_2\, y)$ che per le nostre ipotesi è definita in $p\,(y)$, la estenderemo in tutti i punti del piano caratteristico ponendo nei punti fuori di $p\,(y)$, $z\,(x_1\, x_2\, y) = 0$: essa avrà così una discontinuità solo su $c\,(y)$. Ciò posto introduciamo nel piano $y = y' - \varepsilon$ le coordinate polari r e ϑ di centro in $(x'_1\, x'_2)$ e asse polare parallelo all'asse delle x_1; e si ponga

$$\zeta\,(r\, y' - \varepsilon) = \int_0^{2\pi} z\,(x'_1 - r\cos\vartheta,\ x'_2 + r\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ y' - \varepsilon)\, d\,\vartheta. \tag{5}$$

Sarà $\zeta\,(r\, y' - \varepsilon)$ una funzione sempre finita di r ed $y' - \varepsilon$.

Si avrà allora

$$\iint\limits_{p(y'-\varepsilon)} z\,(x_1\, x_2\, y' - \varepsilon)\, \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, d\,x_1\, d\,x_2 = \int_0^\infty \zeta\,(r\, y' - \varepsilon)\, \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, r\, d\,r$$

ossia facendo il cambiamento di variabile $r^2 = 4\,\varepsilon\,\lambda^2$

$$\iint\limits_{p(y'-\varepsilon)} z\,(x_1\, x_2\, y' - \varepsilon)\, \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, d\,x_1\, d\,x_2 = 4 \int_0^\infty \zeta\,(2\,\lambda \sqrt{\varepsilon},\ y' - \varepsilon)\, e^{-\lambda^2}\, \lambda\, d\,\lambda. \tag{6}$$

(*) Cfr. Riemann-Weber, *Partielle Differentialgleichungen*, Vol. 2, § 50.

Se noi supponiamo che esista il $\lim \zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\, y'-\varepsilon)$ per $\varepsilon = 0$ e sia indipendente da λ ed uniformemente convergente quando λ è compreso in un qualsiasi intervallo $\Lambda_1 \ldots \Lambda_2$ interno all'intervallo $0 \ldots \infty$, e poniamo

$$Z(y') = \lim_{\varepsilon=0} \zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\, y'-\varepsilon), \tag{7}$$

si avrà da (6)

$$\lim_{\varepsilon=0} \int\!\!\int_{p'(y'-\varepsilon)} z(x_1\, x_2\, y'-\varepsilon)\, \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\, d\,x_1\, d\,x_2 = 2\, Z(y')\ (^*). \tag{8}$$

Cerchiamo quindi il limite (7). Se il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ è *interno* a $p(y')$ per la supposta continuità di $z(x_1\, x_2\, y)$ si avrà che $Z(y')$ esiste e che è

$$(7)_1 \qquad Z(y') = 2\,\pi\, z(x'_1\, x'_2\, y')\ (^{**}).$$

(*) Invero sia m il massimo valore di $\zeta(r\, y'-\varepsilon)$ e quindi anche di $Z(y')$. Ricordiamo che $\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}$; fissato un numero σ piccolo a piacere si potrà prendere Λ_1 tanto piccolo e Λ_2 tanto grande che

$$\int_0^{\Lambda_1} e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda < \sigma \quad \text{e} \quad \int_{\Lambda_2}^{\infty} e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda < \sigma.$$

Fissati così Λ_1 e Λ_2, si prenda un numero ε tanto piccolo che, per λ compreso tra Λ_1 e Λ_2, sia $|\,\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\, y'-\varepsilon) - Z(y')\,| < \sigma$, — e ciò potrà farsi per la supposta uniforme convergenza del limite (7), —; si avrà

$$\left| \int_0^\infty \zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\, y'-\varepsilon)\, e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda - \frac{1}{2} Z(y') \right| = \left| \int_0^\infty |\,\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\, y'-\varepsilon) - Z(y')\,|\, e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda \right| \leq$$

$$\leq 2\,m \left[\int_0^{\Lambda_1} + \int_{\Lambda_2}^{\infty} \right] e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda + \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} |\,\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\, y'-\varepsilon) - Z(y')\,|\, e^{-\lambda^2}\lambda\, d\lambda < \sigma\left(4\,m + \frac{1}{2}\right).$$

Donde la (8).

(**) Infatti fissato un δ arbitrariamente piccolo, possiamo trovare un intorno τ di $(x'_1\, x'_2\, y')$ così piccolo che l'oscillazione di z in esso sia inferiore a δ. Fissato poi Λ_2 arbitrariamente grande, potremo trovare un ε_1 così piccolo che per $\varepsilon < \varepsilon_1$, e $0 \leq \lambda \leq \Lambda_2$ il punto $(x'_1 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta,$

Se il punto (x'_1, x'_2, y') è *esterno* a $p(y')$ si avrà similmente

$$Z(y') = 0. \tag{7$_2$}$$

Quindi intanto da (4) (8) $(7)_1$ $(7)_2$ si ottiene

$$\left.\begin{matrix} (9)_1 & 4\pi z(x'_1, x'_2, y') \\ (9)_2 & 0 \end{matrix}\right\} = -\int\!\!\int_{s(y')} h_{01}(x_1 x_2 y; x'_1, x'_2, y') \left\{ \frac{\partial z}{\partial n} de\, dy - z\, dx_1\, dx_2 \right\} -$$

$$-\frac{1}{2} \int\!\!\int_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y; x'_1 x'_2 y') \cos(\widehat{r n}) z\, de\, dy -$$

$$-\int\!\!\int\!\!\int_{S(y')} h_{01}(x_1 x_2 y; x'_1, x'_2 y') f(x_1 x_2 y)\, dx_1\, dx_2\, dy.$$

La prima di queste vale quando $(x'_1\, x'_2\, y')$ è interno, la seconda quando è esterno a $p(y')$.

Se il punto (x'_1, x'_2, y') è su $c(y')$, e cioè se è un punto di s, tali conclusioni non sono valide e noi ancora non conosciamo nè se esiste il limite del primo membro di (4), nè se hanno senso gli integrali del secondo membro, e se rappresentano il limite degli integrali analoghi estesi a $s(y' - \varepsilon)$, $S(y' - \varepsilon)$. Dobbiamo quindi esaminare meglio i due membri di (4).

Incominciando dal primo, basterà per i ragionamenti precedenti esaminare il limite (7). Se noi supponiamo che la superficie s abbia in un intorno di $(x'_1\, x'_2\, y')$ piano tangente non mai parallelo al piano $y = 0$ e mobile con continuità nell'intorno del punto medesimo, si avrà

$$\lim_{\varepsilon=0} \zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y' - \varepsilon) = Z(y') = \pi z(x'_1, x'_2\, y')\ (^*); \tag{7$_3$}$$

$x'_2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}$ sen ϑ, $y' - \varepsilon)$ sia in τ. Allora da (5) si ha per tali valori di λ e di ε

$$\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y' - \varepsilon) - 2\pi z(x'_1 x'_2 y') \leq$$

$$\leq \int_0^{2\tau} |z(x'_1 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon} \cos\vartheta,\ x'_2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon} \operatorname{sen}\vartheta,\ y' - \varepsilon) - z(x'_1 x'_2 y')|\, d\vartheta < 2\pi\tau.$$

Donde segue che vale la formula $(7)_1$; e che la convergenza è uniforme pei valori di λ compresi fra 0 e un numero Λ_2 grande a piacere. In modo analogo si dimostra la $(7)_2$.

(*) Infatti in virtù dell'ipotesi fatta relativamente al piano tangente, la distanza del punto $(x'_1\, x'_2\, y' - \varepsilon)$ da $c(y' - \varepsilon)$ è dell'ordine infinitesimale di ε; onde l'ampiezza γ_ε dell'arco del cerchio di centro $(x'_1\, x'_2\, y' - \varepsilon)$ e raggio $2\lambda\sqrt{\varepsilon}$ — per $0 < \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2 < \infty$ — ed interno e questo limite convergerà uniformemente rispetto ai valori di λ compresi in un qualsiasi intervallo $\Lambda_1 \ldots \Lambda_2$ *interno* all'intervallo $0 \ldots \infty$. Onde intanto risulta così che in questa ipotesi esiste ed è noto il primo membro di (4).

Resta ora da studiare il secondo membro di (4). A tale scopo sono necessarie alcune considerazioni sugli integrali che in esso compaiono, e su cui mi pare opportuno soffermarmi alquanto poichè si presenteranno ancora nel seguito.

27. Consideriamo la superficie s e, conforme alle ipotesi già fatte nell'ultime deduzioni del n. precedente, supponiamo che la superficie considerata, almeno in un conveniente campo σ contenente il punto che studiamo, non sia tangente a nessun piano caratteristico: esisterà allora un valore minimo dell'angolo che la normale alla superficie fa coll'asse delle y: lo chiameremo Θ. Per maggiore comodità supporremo inoltre che la superficie ammetta entrambe le curvature e queste siano finite e continue (*). Presi allora due punti qualunque $M_1 \equiv (x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$ ed $M_2 \equiv (x_1^{(2)} x_2^{(2)} y^{(2)})$ della superficie e detta $\rho^{(12)}$ la loro distanza, si indichi con $(\widehat{\rho^{(12)} \nu^{(1)}})$ l'angolo della normale $\nu^{(1)}$ alla superficie nel punto M_1 e della congiungente $M_1 M_2$: esisterà un numero

---

a $p(y' - \varepsilon)$ differisce da π di una quantità che ha l'ordine infinitesimale di $\sqrt{\varepsilon}$; cosicchè scelti ad arbitrio Λ_1 e Λ_2 e fissato un numero σ arbitrariamente piccolo, si potrà trovare un ε_1 tale che per $\varepsilon < \varepsilon_1$, sia $|\gamma_\varepsilon - \pi| < \sigma$. Si osservi poi che $z(x_1 x_2 y)$ è continua in ogni intorno di $(x'_1 x'_2 y')$ interno a S: si potrà prendere un intorno τ di $(x'_1 x'_2 y')$ interno a S tanto piccolo che in esso la oscillazione di z sia inferiore a σ: e si impiccolisca, se occorre ε_1 per modo che per $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\Lambda_1 \leqq \lambda \leqq \Lambda_2$ oltre ad essere soddisfatta la precedente condizione, si abbia che i punti $(x'_1 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta,\ x'_2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ y' - \varepsilon)$ che sono interni a S siano interni a τ: si avrà allora

$$|\zeta(2\lambda\sqrt{\varepsilon},\ y' - \varepsilon) - \pi z(x'_1 x'_2 y')| \leqq \int_{\gamma_\varepsilon} |z(x'_1 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta,\ x'_2 + 2\lambda\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\ y' - \varepsilon) - z(x'_1 x'_2 y')|\, d\vartheta +$$

$$+ |\gamma_\varepsilon - \pi| \cdot |z(x'_1 x'_2 y')| \leqq \sigma(\gamma_\varepsilon + |z(x'_1 x'_2 y')|).$$

Onde la formula $(7)_3$ resta dimostrata: e in pari tempo l'uniforme convergenza al limite pei valori di λ tali che $\Lambda_1 \leqq \lambda \leqq \Lambda_2$. Se il piano $y = y'$ è tangente la superficie si vede facilmente che la $(7)_3$ può essere sostituita dalle formule più varie e che in generale il limite (7) non ha un valore unico pei varii valori di λ.

(*) Queste ipotesi sono certo sovrabbondanti; tuttavia non entreremo qui in maggiori discussioni le quali non farebbero che distrarci dallo scopo del presente lavoro.

finito N tale che sia sempre

$$\frac{\pi}{2} - (\widehat{\rho^{(12)} \nu^{(1)}}) < N \rho^{(12)}. \tag{10}$$

In queste ipotesi potremo scegliere sulla superficie s, almeno per quanto riguarda il campo σ, un sistema di coordinate curvilinee formato dalle $y =$ cost. e dalle loro trajettorie ortogonali che prenderemo come linee $u =$ cost.: in virtù dell'ipotesi che il piano tangente alla superficie non sia mai un piano $y =$ cost. tale sistema di coordinate sarà regolare: e si potrà scegliere la u per modo che indicate con $(u^{(1)} y^{(1)})$, $(u^{(2)} y^{(2)})$ le coordinate dei punti M_1 ed M_2 sulla superficie e posto $r^{(12)} = \sqrt{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})^2}$ risultino soddisfatte le limitazioni

$$\left.\begin{array}{l} (u^{(1)} - u^{(2)})^2 + \nu\,(y^{(1)} - y^{(2)})^2 < r^{(12)^2} \\ \mu_1\,(u^{(1)} - u^{(2)})^2 + \nu_1\,(y^{(1)} - y^{(2)})^2 \geq r^{(12)^2} \text{ (*)}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

ν, μ_1, ν_1 essendo costanti *finite* positive.

Osserviamo subito che insieme colla seconda delle (11) sarà soddisfatta per $\varepsilon > 0$ l'altra più generale

$$\mu_\varepsilon\,|u^{(1)} - u^{(2)}|^{2\varepsilon} + \nu_\varepsilon\,|y^{(1)} - y^{(2)}|^{2\varepsilon} \geq r^{(12)^{2\varepsilon}} \tag{12}$$

dove $\mu_\varepsilon \leq 2\,\mu_1$, $\nu_\varepsilon \leq 2\,\nu_1$ (**).

(*) Invero si fissi per un momento sulle $y =$ cost. la variabile u in modo arbitrario: l'elemento lineare della superficie sarà dato da $E\,d\,u^2 + G\,d\,y^2$: E, G essendo funzioni finite e continue e sempre $\neq 0$ di y ed u: siano k e K i massimi e i minimi valori di E e G. Se allora consideriamo la curva che sulla superficie è determinata dalle $\dfrac{u - u^{(2)}}{u^{(1)} - u^{(2)}} = \dfrac{y - y^{(2)}}{y^{(1)} - y^{(2)}}$, la sua lunghezza $l^{(12)}$ soddisfa alle limitazioni

$$2\,K\sqrt{(u^{(1)} - u^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2} \geq l^{(12)} \geq \frac{k}{2}\sqrt{(u^{(1)} - u^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2}.$$

Ma in virtù della supposta regolarità della superficie il rapporto di $l^{(12)}$ alla distanza $\rho^{(12)}$ dei due punti è sempre finito, compreso fra due valori λ_1, λ_2: quindi si avrà

$$2\,\lambda_1\,K\sqrt{(u^{(1)} - u^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2} \geq \rho^{(12)} \geq \frac{\lambda_2\,k}{2}\sqrt{(u^{(1)} - u^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2}.$$

E di qui cambiando, ove occorra, u in $h\,u$, dove h indica un conveniente fattore di proporzionalità e, ricordando che $\rho^{(12)^2} = r^{(12)^2} + (y^{(1)} - y^{(2)})^2$ si deducono senz'altro le (11).

(**) Cfr. nota a pag. 234 n. 23).

Ciò posto, *sia* $(x_1\, x_2\, y)$ *un punto mobile su* s, *sia* $\psi(x_1\, x_2\, y)$ *una funzione del punto mobile su* s; *è facile vedere che se* $\alpha - 1 > 0$ *e* $3 - \alpha - 2\beta > 0$ *l'integrale*

$$\iint\limits_{s(y')} h_{\alpha\beta}(x_1\, x_2\, y;\ x'_1\, x'_2\, y')\, \psi(x_1\, x_2\, y)\, d\,c\, d\,y \tag{13}$$

— *il quale evidentemente rappresenta una funzione finita e continua di* $(x'_1\, x'_2\, y')$ *quando questo punto è fuori di* s, — *è una funzione finita e continua del punto* $(x'_1\, x'_2\, y')$ *anche nei punti di* s *purchè nel loro intorno siano soddisfatte le precedenti condizioni.*

Osserviamo perciò che se, preso un punto $(\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{y})$ della superficie, noi stacchiamo da essa un suo intorno arbitrariamente piccolo τ, l'integrale esteso al campo $s(y') - \tau(y')$, — $\tau(y')$ indicando la parte di τ che sta al disotto del piano caratteristico $y = y'$, — è sempre continuo nell'intorno del punto $(\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{y})$, poichè l'integrando è sempre finito e sia esso che il campo di integrazione variano con continuità al variare del punto $(x'_1\, x'_2\, y')$. Basterà quindi per dimostrare l'asserita continuità provare che se τ è sufficientemente piccolo, l'integrale residuo è arbitrariamente piccolo qualunque sia il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ nell'intorno di $(\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{y})$. Perciò si osservi che se il campo τ è interno al campo σ in cui sono soddisfatte le condizioni enunciate precedentemente ed è sufficientemente piccolo e se il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ è sufficientemente vicino alla superficie — anche sulla superficie medesima — le quantità $r = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2}$ e $p = y' - y$ possono ritenersi come coordinate del punto della superficie, in quanto che ad una coppia di valori di r e p corrispondono al più 2 punti della superficie (*).

(*) Invero dato il valore di p il punto dovrà trovarsi sulla curva c di s che è segata dal piano $y = y' - p$. Siccome le curvature della superficie sono finite e continue ed il piano tangente ad s fa un angolo $> \Theta > 0$ coi piani $y =$ cost., la curva c avrà una curvatura finita e continua. Basterà quindi per provare l'asserzione del testo dimostrare che un cerchio posto nel piano di una curva c la quale abbia curvatura finita col centro sufficientemente prossimo a c e con raggio sufficientemente piccolo non può incontrare c in più di due punti. Sia invero O un punto del piano di c il quale varii avvicinandosi a c, che assumiamo come centro di un cerchio di raggio r variabile che si può fare arbitrariamente decrescere. Se per r sufficientemente piccolo la circonferenza potesse tagliare c in più di 2 punti, tutti questi punti sarebbero fra loro arbitrariamente prossimi: onde vi sarebbe su c un punto A tale che una circonferenza passante per esso e per altri due punti di c che tendono ad A in modo conveniente, tende ad avere raggio nullo: in quel punto quindi c avrebbe raggio nullo e curvatura infinita, il che contraddice all'ipotesi.

Cosicchè si avrà per tale campo

$$\iint_{\tau(y')} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\, \psi(x_1 x_2 y)\, dc\, dy \leq 2 \psi D \int_0^{\varkappa}\!\!\int_0^{R} h_{\alpha\beta}(r y;\, 0 y')\, dr\, dy$$

dove R indica il massimo valore assoluto di r quando $(x_1 x_2 y)$ è in $\tau(y')$, $\varkappa$ il massimo valore di $y' - y$ in $\tau(y')$, ψ il massimo modulo di $\psi(x_1 x_2 y)$, D il massimo modulo del rapporto dell'elemento $dr\, dy$ all'elemento d'area $dc\, dy$ di s. Quindi, rammentando il teorema del n. 22 si avrà se $\alpha + 1 > 0$, $3 - \alpha - 2\beta = \delta > 0$

$$\iint_{\tau(y')} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\, \psi(x_1 x_2 y)\, dc\, dy \leq 4 \psi D L_{\alpha\beta} \varkappa^{\frac{\delta}{2}} . \tag{14}$$

$L_{\alpha\beta}$ essendo indipendente da $\psi(x_1 x_2 y)$. È quindi pienamente dimostrato il nostro teorema.

Si noti però che la relazione (14) vale quando il campo $\tau(y')$ è sufficientemente piccolo: noi vogliamo aggiungere qualche osservazione che valga a dimostrare che quando si suppone che il punto $(x'_1 x'_2 y')$ sia precisamente un punto della superficie, la precedente relazione vale anche quando come campo $\tau(y')$ si prenda il campo σ in cui siano soddisfatte le condizioni del principio del presente numero. Supporremo senz'altro che σ coincida con s. In queste ipotesi, potendosi scegliere su s un sistema di coordinate u, y quale fu precedentemente descritto, indicando con $(u' y')$ il punto $(x'_1 x'_2 y')$, l'integrale (13) si potrà scrivere nella forma:

$$\iint_{(y')} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\, \psi(x_1 x_2 y) \sqrt{E}\, du\, dy$$

poichè, se $E\, du^2 + G\, dy^2$ è l'elemento lineare di s, sarà $dc = \sqrt{E}\, du$. Ma per (11) si ha

$$0 < e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} = e^{-\frac{(u'-u)^2}{4(y'-y)}}\, e^{\gamma_1 \frac{y'-y}{4}} \leq g\, e^{-\frac{(u'-u)^2}{4(y'-y)}},$$

dove $g = e^{\gamma_1 \frac{\varkappa}{4}}$ è il massimo valore che possa assumere $e^{\gamma_1 \frac{y'-y}{4}}$ quando $0 < y' - y < \varkappa$.

Quindi per (12) si avrà tosto che $(x_1\, x_2\, y) \neq (x'_1\, x'_2\, y')$:

$$
\left.
\begin{aligned}
|h_{\alpha\beta}(x_1\, x_2\, y;\; x'_1\, x'_2\, y')| &= e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta} \leq \\
&\leq g\, e^{-\frac{(u'-u)^2}{4(y'-y)}} \left| \mu_{\frac{\alpha}{2}} \frac{(u'-u)^\alpha}{(y'-y)^\beta} + \nu_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{(y'-y)^{\beta-\alpha}} \right| \leq \\
&\leq g\, \mu_{\frac{\alpha}{2}} \,|h_{\alpha\beta}(u\, y;\; u'\, y')| + g\, \nu_{\frac{\alpha}{2}} \,|h_{0\beta-\alpha}(u\, y;\; u'\, y')|\,.
\end{aligned}
\right\} \quad (15)
$$

Onde segue pel teorema del n. 22, supposto sempre $\alpha + 1 > 0$ e $3 + \alpha - 2\beta = \delta > 0$, se ψ indica ancora il massimo valore assoluto di $\psi(x_1\, x_2\, y)$ e k il massimo valore di $\sqrt{E}$,

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int\!\!\int_{s(y')} h_{\alpha\beta}(x_1\, x_2\, y;\; x'_1\, x'_2\, y')\, \psi(x_1\, x_2\, y)\, d\sigma\, d y \leq \\
&\quad \leq g\, k\, \mu_{\frac{\alpha}{2}} \int\!\!\int_{s(y')} |h_{\alpha\beta}(u\, y;\; u'\, y')|\, |\psi(x_1\, x_2\, y)|\, d u\, d y \\
&\qquad + g\, k\, \nu_{\frac{\alpha}{2}} \int\!\!\int_{s(y')} |h_{0\beta-\alpha}(u\, y;\; u'\, y')|\, |\psi(x_1\, x_2\, y)|\, d u\, d y \leq \\
&\quad \leq \psi\, g\, k \left| \mu_{\frac{\alpha}{2}} L_{\alpha\beta}\, y'^{\frac{\delta}{2}} + \nu_{\frac{\alpha}{2}} L_{0\beta-\alpha}\, y'^{\frac{\delta}{2}+\alpha} \right| \leq \psi\, \mathcal{L}_{\alpha\beta}\, y'^{\frac{\delta}{2}}
\end{aligned}
\right\} \quad (16)
$$

dove

$$
\mathcal{L}_{\alpha\beta} = g\, k \left(\mu_{\frac{\alpha}{2}} L_{\alpha\beta} + \nu_{\frac{\alpha}{2}} L_{0\beta-\alpha}\, y_0^{\alpha} \right).
$$

Ed ancora, se si suppone che la funzione $\psi(x_1\, x_2\, y)$ soddisfi ad una limitazione della forma

$$
\psi(x_1\, x_2\, y) \leq \psi_1\, y^\gamma,
$$

si avrà pure

$$
\int\!\!\int_{s(y')} h_{\alpha\beta}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\psi(x_1 x_2 y)\, d\sigma\, d y \leq \psi_1\, \mathcal{L}^{(1)}_{\alpha\beta} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma+1+\frac{\delta}{2}\right)}\, y'^{\gamma+\frac{\delta}{2}}\,. \quad (16)^{\text{bis}}
$$

$\mathcal{L}^{(1)}_{\alpha\beta}$ essendo come $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ una costante indipendente da $\psi(x_1\, x_2\, y)$.

Questa formula sarà di capitale importanza per i calcoli del n. 30.

28. Premesse queste considerazioni ritorniamo allo studio degli integrali del secondo membro di (4) quando $(x'_1\, x'_2\, y')$ è un punto di s. Supporremo che in un campo σ attorno ad esso s soddisfaccia alle condizioni del n. precedente. L'ultimo integrale di (4), il quale è un integrale di volume, evidentemente esiste ed è funzione continua in qualunque punto dello spazio in virtù dei risultati del n. 22 (osservazione I).

Del pari il primo integrale di superficie esiste e rappresenta una funzione finita e continua in virtù delle discussioni del n. precedente. Quindi non resta che ad esaminare l'ultimo integrale cui evidentemente non si può senz'altro applicare le considerazioni del n. 27. Si osservi però che anche per esso possiamo limitarci a studiarlo quando il campo di integrazione sia in σ, in questo solo caso esistendo singolarità per l'integrando. Ed allora poichè è soddisfatta la (10) e si suppone che l'angolo della normale e dell'asse delle y abbia un minimo $\Theta > 0$, avremo

$$|\cos\widehat{(r\,n)}| < \frac{N r}{\operatorname{sen}\Theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\,\frac{|y' - y|}{r}\ (*)\,.$$

(*) Infatti presi due punti $(x_1\, x_2\, y)$, $(x'_1\, x'_2\, y')$, dal triedro che ha il vertice in $(x_1\, x_2\, y)$ e ha per spigoli n, ν ed il raggio r che unisce $(x_1\, x_2\, y)$ con $(x'_1\, x'_2\, y')$ (il cui angolo diedro che ha lo spigolo in n è retto) si ottiene $|\cos\widehat{(r\,n)}| = \dfrac{|\cos\widehat{(\nu\,r)}|}{\cos\widehat{(\nu\,n)}} \leqq \dfrac{|\cos\widehat{(\nu\,r)}|}{\operatorname{sen}\Theta}$. Si consideri poi l'altro triedro che ha il vertice ancora in $(x_1\, x_2\, y)$ e per spigoli r; ν ed il segmento ρ che unisce $(x_1\, x_2\, y)$ con $(x'_1\, x'_2\, y')$, si avrà, indicando con $\widehat{\rho}$ l'angolo diedro che ha lo spigolo in ρ,

$$\cos\widehat{(r\,\nu)} = \cos\widehat{(\rho\,\nu)}\cos\widehat{(r\,\rho)} + \operatorname{sen}\widehat{(\rho\,\nu)}\operatorname{sen}\widehat{(r\,\rho)}\cos\widehat{\rho}\,.$$

Ma $|\cos\widehat{\rho}| \leq 1$, $|\operatorname{sen}\widehat{(\rho\,\nu)}| \leq 1$, $|\cos\widehat{(r\,\rho)}| = \dfrac{r}{\rho}$, $|\operatorname{sen}\widehat{(r\,\rho)}| = \dfrac{|y' - y|}{\rho}$ e per (10)

$$|\cos\widehat{(\rho\,\nu)}| = \left|\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \widehat{(\rho\,\nu)}\right]\right| < N\rho\,;$$

quindi sarà $|\cos\widehat{(r\,\nu)}| < N r + \dfrac{|y' - y|}{\rho}$. E quindi infine poichè $\dfrac{\rho}{r} > 1$

$$|\cos\widehat{(r\,n)}| < \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\left(N r + \frac{|y' - y|}{\rho}\right) < \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\left(N r + \frac{|y' - y|}{r}\right)$$

che è la formula del testo.

Si avrà allora se $(x_1 x_2 y)$ è un punto di σ diverso da $(x'_1 x'_2 y')$

$$\left.\begin{aligned} |h_{12}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \cos(\widehat{rn})| \leq \frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} h_{22}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \\ + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y'). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Quindi ricordando le discussioni del n. precedente otteniamo che esiste ancora l'ultimo integrale di superficie della formula (4).

E noi potremo quindi finalmente concludere che, nelle ipotesi fatte sopra relativamente alla superficie, e cioè quando si supponga *che la superficie s in un conveniente campo σ contenente il punto $(x'_1 x'_2 y')$ abbia piano tangente non mai parallelo al piano $x_1 x_2$ ed abbia le curvature finite e continue*, vale insieme colle $(9)_1$ e $(9)_2$ anche la formula

$$\left.\begin{aligned} 2\pi z(x'_1 x'_2 y') = \iint_{s(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \left\{ \frac{\partial z}{\partial n} d\,e\,d\,y - z\,d\,x_1\,d\,x_2 \right\} \\ - \frac{1}{2} \iint_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \cos(\widehat{rn})\, z\,d\,e\,d\,y - \\ - \iiint_{S(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') f(x_1 x_2 y)\, d\,x_1\,d\,x_2\,d\,y \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

dove $(x'_1 x'_2 y')$ indica un punto di $s(y')$.

Dalle formule (9) si possono trarre conclusioni perfettamente simili a quelle che nei §§ 3 e 4 abbiamo tratto dalle (7) del § 3. Facendo in esse $z(x_1 x_2 y) = 1$ si ha intanto

$$\begin{aligned} (17)_1 \quad & 4\pi \\ (17)_2 \quad & 0 \\ (17)_3 \quad & 2\pi \end{aligned} \left\} = - \iint_{s(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\, d\,x_1\,d\,x_2 + \frac{1}{2} \iint_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y') \cos(\widehat{rn})\, d\,e\,d\,y \right.$$

che sono l'analogo delle (8) del § 3.

Si osservi ora che per i risultati del n. 27 la funzione

$$\iint_{s(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\, d\,x_1\,d\,x_2$$

rappresenta una funzione finita e continua di $(x'_1 x'_2 y')$ anche quando il punto $(x'_1\, x'_2\, y')$ è sulla superficie $s(y')$ purchè questa soddisfaccia nell'intorno di $(x'_1\, x'_2\, y')$ le solite condizioni: mentre dalle formule precedenti risulta che il secondo membro è discontinuo quando il punto attraversa s. Quindi dovrà essere discontinuo il secondo degli integrali di (17): e dalle (17) si dedurrà l'importante formula

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{(x'_1 x'_2 y') \equiv (\bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}')} \iint\limits_{s(y')} h_{12}(x_1\, x_2\, y;\ x'_1\, x'_2\, y) \cos(\widehat{r\, n})\, d\, e\, d\, y = \\ &\qquad = \pm 4\pi \iint\limits_{(\bar{y}')} h_{12}(x_1\, x_2\, y;\ x'_1\, \bar{x}'_2\, \bar{y}') \cos(\widehat{r\, n})\, d\, e\, d\, y. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

In essa vale il segno + o il segno — a seconda che il punto s'avvicina alla superficie s dall'interno o dall'esterno di S (*): e perchè sia valida è sufficiente che in un campo σ contenente $(\bar{x}'_1\, \bar{x}'_2\, \bar{y}')$ soddisfaccia alle condizioni ripetutamente già esposte. Questa formula è l'analogo della (10) del § 3.

Ed infine in modo analogo a quanto si vede nel § 4 si potrà in base ai risultati del n. 27 estendere ulteriormente la formula (18) e dedurre: detta $\psi(u\, y)$ una funzione del punto $(x_1\, x_2\, y) \equiv (u\, y)$ di s continua nel punto $(\bar{x}'_1\, \bar{x}'_2\, \bar{y}') \equiv (\bar{u}\, \bar{y}')$ e supposte soddisfatte per s le solite condizioni,

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{(x'_1 x'_2 y') \equiv (\bar{x}'_1 \bar{x}'_2 \bar{y}')} \iint\limits_{s(y')} h_{12}(x_1\, x_2\, y;\ x'_1\, x'_2\, y')\, \psi(u\, y) \cos(\widehat{r\, n})\, d\, e\, d\, y = \\ &\qquad = \pm 4\pi\, \psi(\bar{u}\, \bar{y}') + \iint\limits_{s(\bar{y}')} h_{12}(x_1\, x_2\, y;\ \bar{x}'_1\, \bar{x}'_2\, \bar{y}')\, \psi(u\, y) \cos(\widehat{r\, n})\, d\, e\, d\, y. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

La (19) corrisponde alla (5) del n. 15 (§ 4).

Ed infine si può dedurre la seguente formula analoga alla (20) del n. 15: se si suppone che anche nei punti di s per cui è $y = 0$ la s soddisfaccia alle condizioni del n. 27 e che $\psi(u\, y)$ sia funzione continua e nulla per $y = 0$

(*) La formula (18) vale anche evidentemente quando la superficie s non *racchiude* un campo S poichè non dipende che dal comportamento dell'integrando nell'intorno di $(\bar{x}'_1\, \bar{x}'_2\, \bar{y}')$. In tal caso dovremo dire che vale il segno + od il segno — a seconda che il punto si trova a destra od a sinistra della direzione positiva di e, od ancora a seconda che il punto si trova dalla banda delle direzioni positive di n o dall'opposta.

si avrà, indicando con $(\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, 0)$ un punto di s:

$$\lim_{(x'_1 x'_2 y') \equiv (\bar{x}_1 \bar{x}_2 0)} \int \int_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y;\ x'_1\, x'_2\, y')\, \psi(u\, y) \cos(\widehat{r\, n})\, d\sigma\, d y = 0. \qquad (20)$$

29. Le ipotesi introdotte nei due n. precedenti per poter dedurre le (9), (17), (18), (19), (20) ci additano le limitazioni che dobbiamo porre alla forma dei campi che vogliamo studiare. Oltre alle ipotesi fatte al n. 26 noi supporremo che s sia una superficie la quale ammetta piano tangente determinato e curvature finite fatta esclusione per un numero finito di punti od anche di linee, purchè queste si trovino su un numero finito di piani caratteristici. E noi potremo allora spezzare il campo mediante piani caratteristici passanti per queste linee o punti eccezionali, e per tal modo ci ridurremo a trattare il caso in cui la superficie sia regolare in tutti i punti tranne quelli corrispondenti ai minimi od ai massimi valori di y: poichè ivi la superficie potrà non avere piano tangente ed in generale incontrerà sotto un certo angolo il piano caratteristico che con essa racchiude il campo.

Supponiamo che il minimo valore di y corrispondente a punti della superficie sia $y = 0$: chiameremo k il tratto di piano caratteristico $y = 0$ appartenente alla superficie: il quale potrà anche ridursi a un punto, s^* la parte residua della superficie. Diremo il campo di *prima specie* se k è un punto, di *seconda specie* nel caso opposto.

La condizione analoga alla condizione (α) del n. 7 già comparve negli studii precedenti: la chiameremo ancora *condizione* (α): e la esprimeremo dicendo che *la normale alla superficie* s^* *deve formare coll'asse delle* y *un angolo sempre maggiore di un angolo* $\omega > 0$. Qualora essa non sia soddisfatta noi potremo in generale spezzare il campo per mezzo dei piani caratteristici tangenti a s^*; e così ridurci a studiare quei soli campi in cui la condizione (α) è soddisfatta in tutti i punti di s^*, fatta eccezione per quelli la cui y appartiene ad un intorno piccolo a piacere del massimo e del minimo valore che y può assumere su s^*.

Noteremo che quando su tutto s^* è soddisfatta la condizione (α), s^* sarà appunto il campo σ di cui si è parlato al n. 27, e quindi si potrà trovare un sistema di coordinate $(u\, y)$ quale là è descritto e per un integrale del tipo di (13) esteso ad una qualunque parte di s^* varranno le (16)[bis].

Possiamo dopo ciò procedere alla dimostrazione del teorema di esistenza per l'equazione (11).

30. Premettiamo perciò due osservazioni generali.

Anzitutto osservando la (9) prevediamo come al n. 14 che la funzione

$$z(x'_1, x'_2, y') = \frac{1}{4\pi} \int\int\int_{S(y')} h_{01}(x_1\, x_2\, y : x'_1\, x'_2\, y')\, f(x_1\, x_2\, y)\, d x_1\, d x_2\, d y$$

soddisfa all'equazione (III). La dimostrazione, basata sul teorema del n. 22, è affatto analoga a quella dei n. 23 e ss.: onde noi non insisteremo su ciò ulteriormente. In conseguenza potremo limitarci a studiare l'equazione (V).

Ancora si può supporre che i valori assegnati nei punti del contorno per cui $y = 0$ siano nulli (cfr. n. 14). Invero, sia $\Phi(x_1\, x_2)$ una funzione sempre finita, definita in tutto il piano $y = 0$ la quale nei punti comuni a $y = 0$ ed a s prenda i valori assegnati, la funzione

$$z(x'_1, x'_2, y') = \frac{1}{4\pi} \int\int \Phi(x_1\, x_2)\, h_{01}(x_1\, x_2\, 0 ;\ x'_1\, x'_2\, y')\, d x_1\, d x_2$$

è una soluzione di (V) che su $y = 0$ prende i valori $\Phi(x_1\, x_2)$.

Ciò posto si supponga che il campo sia di seconda specie e che su s^* soddisfaccia alla condizione (a). Tale sarà ad esempio il campo che si presenta quando si studii il problema della distribuzione delle temperature nei punti di una superficie per cui si conosca la distribuzione iniziale delle temperature e siano assegnate le temperature dei punti del contorno pei valori successivi del tempo. Infatti la superficie s sarà allora formata dalla regione del piano $y = 0$ che rappresenta la superficie e del cilindro a generatrici parallele all'asse delle y che ne projetta il contorno.

Per una osservazione precedente supporremo che su k i valori assegnati siano nulli.

Poichè è soddisfatta la condizione (a) noi potremo prendere su s^* un sistema di coordinate $(u\, y)$ quale fu indicato al n. 26: siano $\varphi(u\, y)$ i valori assegnati su s^*: sarà $\varphi(u\, 0) = 0$.

Cercheremo di porre la funzione cercata sotto la forma

$$z(x'_1, x'_2, y') = \frac{1}{4\pi} \int\int_{s^*(y')} \psi(u\, y)\, h_{12}(x_1\, x_2\, y :\ x'_1\, x'_2\, y') \cos\widehat{(r\, n)}\, d c\, d y \qquad (21)$$

dove si pone $(x_1\, x_2\, y) \equiv (u\, y)$, e $\psi(u\, y)$ indica una funzione da determinarsi convenientemente. Questa funzione soddisfa a (V) in $S(y)$, si annulla nei punti di k non appartenenti a s^*. Se si suppone di più che $\varphi(u\,y)$ sia continua la formula (19) ci mostra che perchè (21) prenda i valori assegnati nei punti di s^* per cui $y' = 0$ è necessario e sufficiente che

$$\psi(u'\,y') = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{s\,(y')} \psi(u\,y)\, h_{12}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y') \cos(\widehat{r\,n})\, d\,c\,d\,y + \varphi(u\,y). \qquad (22)$$

E se troveremo che la funzione $\psi(u\,y)$ soddisfacente (22) tende a zero per $y = 0$, per (20) potremo conchiudere che la z data da (21) si annulla nei punti del contorno di k, comuni a k ed s: e quindi (21) soddisfa a tutte le condizioni impostele.

La (22) è una equazione integrale di Fredholm. Sarebbe facile dimostrare che la funzione caratteristica di essa è tale che si può applicare la teoria di Fredholm e noi potremmo agevolmente dimostrare che il suo determinante non è zero poggiandoci sul teorema di unicità.

Preferiamo mostrare, analogamente a quanto già facemmo al n. 17, come la serie di Neumann per la soluzione dell'equazione (22) sia convergente. Invero la serie di Neumann sarà

$$\psi(u\,y) = \varphi(u\,y) + \frac{1}{4\pi}\varphi_1(u\,y) + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \varphi_2(u\,y) + \cdots + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^n \varphi_n(u\,y) + \cdots \qquad (23)$$

dove

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(u'\,y') &= \iint\limits_{s\,(y')} h_{12}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')\cos(\widehat{r\,n})\,\varphi_{i-1}(u\,y)\,d\,c\,d\,y \\ \varphi_0(u\,y) &= \varphi(u\,y). \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Sia Φ il massimo valore di $\varphi(u\,y)$. Si ricordino le formule (17) e (16): si avrà, con G indicando il valore di $\frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}$

$$\left.\begin{aligned} &|\varphi_0(u\,y)| < \Phi \\ &|\varphi_1(u'\,y')| < \Phi\, G \left\{ N \iint\limits_{s^*(y')} h_{22}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')\,d\,u\,d\,y + \iint\limits_{s'(y')} h_{01}(x_1\,x_2\,y;\,x'_1\,x'_2\,y')\,d\,u\,d\,y \right\} < \\ &\qquad < \Phi\, G\,[N\,\mathcal{L}_{22} + \mathcal{L}_{01}]\, y'^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Ed ancora applicando $(16)^{\text{bis}}$:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_2(u\,y) &\leq \Phi G^2 [N \mathcal{L}^2_{22} + \mathcal{L}^2_{01}] \left\{ N \iint_s h_{22}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\, y^{-\frac{1}{2}}\, du\, dy + \right. \\
&\qquad \left. \iint_{s(y')} h_{1\frac{1}{2}}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')\, y^{-\frac{1}{2}}\, du\, dy \right\} \leq \\
&\leq \Phi G [N \mathcal{L}^2_{22} + \mathcal{L}^2_{01}] \,.\, G [N \mathcal{L}^{(1)}_{22} + \mathcal{L}^{(1)}_{01}] \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}\, y' \\
\varphi_3(u\,y) &\leq \Phi G [N \mathcal{L}^2_{22} + \mathcal{L}^2_{01}] (G [N \mathcal{L}^{(1)}_{22} + \mathcal{L}^{(1)}_{01}])^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\, y'^{\frac{3}{2}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_n(u' y') &\leq \Phi G [N \mathcal{L}^2_{22} + \mathcal{L}^2_{01}] (G [N \mathcal{L}^{(1)}_{22} + \mathcal{L}^{(1)}_{01}])^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}\, y'^{\frac{n}{2}} . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Onde, se poniamo $G^2 (N \mathcal{L}^{(1)}_{22} + \mathcal{L}^{(1)}_{01})^2 = H$ e chiamiamo Φ_1 il massimo dei numeri Φ, $\frac{\Phi G [N \mathcal{L}^2_{22} + \mathcal{L}^2_{01}]}{2\sqrt{H}} \sqrt{\pi}$, $\frac{\Phi G [N \mathcal{L}^2_{22} + \mathcal{L}^2_{01}]}{2} \sqrt{\pi y_0}$, ricordando che per h intero

$$\Gamma\left(\frac{2h}{2}\right) = \Gamma(h) = (h-1)! \qquad \Gamma\left(\frac{2h+1}{2}\right) > (h-1)!$$

avremo

$$\left.\begin{aligned}
&|\varphi_0(u\,y)| < \Phi_1 && |\varphi_1(u\,y)| < \Phi_1 \\
&|\varphi_2(u\,y)| < \Phi_1 \frac{H y}{1!} && |\varphi_3(u\,y)| < \Phi_1 \frac{H y'}{1!} \\
&|\varphi_4(u\,y)| < \Phi_1 \frac{(H y')^2}{2!} && |\varphi_5(u\,y)| < \Phi_1 \frac{(H y)^2}{2!} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Onde si trae la serie (23) converge come una serie esponenziale e che si ha sempre

$$|\psi(u\,y)| < 2\,\Phi_1\,e^{\frac{H}{4\pi}\,y}\,. \tag{28}$$

Osserveremo ancora che poichè $\varphi(u\,0) = 0$ segue che, impiccìolendo y, si può impiccìolire a piacere la quantità Φ_1 e quindi per (28) si avrà ancora $\lim\limits_{y=0}\psi(u\,y) = 0$. Onde, costruita la $\psi(u\,y)$ data da (23) noi avremo pienamente dimostrato il teorema di esistenza per la (III), almeno quando il campo S è di seconda specie e soddisfa alla condizione (α).

31. A questo punto possiamo completare la dimostrazione dei teoremi del § 1 relativi all'equazione in più variabili che là avevamo lasciato in sospeso. Invero noi possediamo, per quanto precede, nella formula che si ottiene sostituendo (23) in (21) una espressione delle soluzioni di (V) che per un contorno come quelli trattati fin qui — ad esempio per un cilindro a generatrici parallele all'asse delle y — prende valori assegnati per s^* e si annulla su k, data per mezzo di un integrale il quale porta sui valori assegnati su s^* (*): e di qui si può dedurre una formula perfettamente equivalente

---

(*) Invero si avrà $z(x'_1\,x'_2\,y') = \sum\limits_i \left(\frac{1}{4\pi}\right) \iint\limits_{s(y')} h_{12}(x_1\,x_2\,y;\ x'_1\,x'_2\,y') \cos\widehat{(r\,n)}\,\varphi_i(u\,y)\,d\,c\,d\,y$. Ma se poniamo

$$\iint\limits_{s(y')} h_{12}(x_1\,x_2\,y;\ x'_1\,x'_3\,y) \cos\widehat{(r\,n)}\,h_{12}(x_1\,\bar{x}_2\,\bar{y};\ x_1\,x_2\,y)\,d\,c\,d\,y = \chi_1(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{y};\ x'_1\,x'_2\,y')$$

$$\iint\limits_{s(y')} \chi_1(x_1\,x_2\,y;\ x'_1\,x_2\,y') \cos(r\,n)\,h_{12}(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{y};\ x_1\,x_2\,y)\,d\,c\,d\,y = \chi_2(x_1\,\bar{x}_2\,\bar{y};\ x'_1\,x'_2\,y')$$

. . . .

dove $(x_1\,x_2\,y)$, $(\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{y})$ indicano punti di s^*, ed $(x'_1\,x'_2\,y')$ un punto interno a S: si vede pel ragionamento fatto nel n. precedente che la serie

$$\chi_0(x_1\,x_2\,y;\ x'_1\,x_2\,y') - \frac{1}{4\pi}\chi_1(x_1\,x_2\,y;\ x'_1\,x'_2\,y') + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2\chi_2(x_1\,x_2\,y;\ x'_1\,x'_2\,y') + \ldots \tag{u}$$

dove si pose $\chi_0(x_1\,x_2\,y;\ x'_1\,x'_2\,y') = h_{12}(x_1\,x_2\,y;\ x'_1\,x'_2\,y')$, converge uniformemente quando $(x_1\,x_2\,y)$ è su s, ed $(x'_1\,x'_2\,y')$ è un punto di un campo interno ad S. Ma d'altro canto la serie che dà z si può pure scrivere per le (24) nella forma

$$z(x'_1\,x'_2\,y') = \sum_0^{\infty}{}_i \left(\frac{1}{4\pi}\right)^i \iint\limits_{s(y')} \chi_i(x_1\,x_2\,y;\ x'_1\,x'_2\,y') \cos\widehat{(r\,n)}\,\varphi(u\,y)\,d\,c\,d\,y$$

alla (3) del § 1. E mercè di essa ci potranno completare i ragionamenti del n. 6 ed estendere i teoremi di HARNACK sulla convergenza delle serie di funzioni armoniche alle serie di soluzioni di (V).

E dopo ciò non occorreranno che semplici modificazioni verbali ai ragionamenti del § 6 per estendere la dimostrazione del teorema di esistenza ai campi di prima specie ed a quelli per cui non è soddisfatta la condizione (α).

---

e quindi per la convergenza uniforme di (α)

$$z(x'_1\, x'_2\, y') = \iint\limits_{s(y')} \left(\sum_0^\infty \left(\frac{-1}{4\pi} \right)^{\nu} Z_\nu(x_1\, x_2\, y;\; x'_1\, x'_2\, y') \right) \cos \widehat{(r\, n)}\, \varphi(u\, y)\, d\, c\, d\, y$$

che è una formula del tipo richiesto.

E chiaro come la formula si estenda al caso in cui i valori assegnati su k non siano nulli, invertendo il ragionamento del n. 30 mediante cui ci siamo ridotti a questi tipi particolari. Od anche, ove piaccia maggiormente, si potrà ottenere i teoremi di HARNACK riducendosi coll'artificio del numero pure ora rammentato, al caso che i valori che i termini successivi prendono su k siano identicamente nulli.

Ottobre 1907.

INDICE.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XIV della Serie III, pag. 187 e seguenti.

Milano, 1908. — Tipo-Lit. REBESCHINI
di Turati e C.

MILANO — TIPO-LIT. REBESCHINI DI TURATI E C.

Sur l'application des équations intégrales au problème de Riemann.

Von

Eugenio Elia Levi à Pisa (Italia).

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. 1908

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. 1908.

Sur l'application des équations intégrales au problème de Riemann.

par **Eugenio Elia Levi** à Pisa (Italia).

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 16. Mai 1908.

Dans le troisième de ses classiques mémoires sur les équations intégrales[1]), M. Hilbert a réduit à une équation intégrale la résolution du problème de Riemann et d'autres problèmes analogues relatifs à la détermination d'une ou de plusieurs fonctions d'une variable complexe dont les parties réelles et les coefficients de l'imaginaire satisfont sur un contour fermé à certaines rélations linéaires. Je me propose de signaler dans les lignes qui suivent une petite difficulté qu'on rencontre dans le mémoire de M. Hilbert[2]), et de montrer comment on peut mettre le résultat à l'abri de cette objection: j'espère qu'on me pardonnera d'avoir exposé ces considérations tres simples en vue de l'importance fondamentale des résultats de M. Hilbert.

Soit C une courbe fermée, que nous supposerons avec M. Hilbert, pour plus de simplicité, analytique; l sa longueur totale, s (ou σ) l'arc compté sur C à partir d'un point arbitraire. Étant donnée une fonction $f(xy, \xi\eta)$ des deux points $xy, \xi\eta$ désignons par $f(s, \xi\eta)$, $f(xy, \sigma)$, $f(s, \sigma)$ les fonctions auxquelles se réduit f lorsque un des points xy, $\xi\eta$ ou tous les deux viennent sur C. M. Hilbert considère la fonction $A(xy; \xi\eta)$[3]), qui satisfait à l'intérieur de C à l'équation

1) Göttinger Nachr. 1905, Heft 4, pag. 307—338.

2) Cette difficulté m'a été indiquée par M. Levi-Civita.

3) La fonction $A(xy, \xi\eta)$ définie par les conditions qui suivent, renferme encore une fonction arbitraire de $\xi\eta$, mais cela n'a aucune importance pour ce qui suit.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0$$

et sur C à la condition

$$(1) \quad \frac{\partial A(s;\xi\eta)}{\partial n_s} = \frac{\partial \log r(s;\xi\eta)}{\partial n_s} + \frac{2\pi}{l} \quad \left[r(xy;\xi\eta) = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right]$$

où n_s indique la normale intérieure à C dans le point s. Soit

$$(2) \qquad G(xy,\xi\eta) = -\log r(xy,\xi\eta) + A(xy,\xi\eta).$$

Les formules fondamentales d'où découlent tous les raisonnements de M. Hilbert sont la formule

$$(3) \qquad u(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial s} v(s)\,ds + \frac{1}{l}\int_0^l u(s)\,ds$$

[form. (6), pag. 311]

— qui donne les valeurs de la partie réelle u d'une fonction $u+iv$ d'une variable complexe, donnée dans le champ intérieur à C, par les valeurs que prend sur C le coefficient v de l'imaginaire —, et les formules analogues (7) [pag. 311], (11) et (12) [pag. 314] pour les valeurs de v et pour le cas du champ extérieur à C. La fonction $G(s,\sigma)$ est singulière dans le point $s=\sigma$, mais M. Hilbert remarque que $\log r(s,\sigma)$ a la même singularité que la fonction $\log\left|\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}(s-\sigma)\right|$, et il en conclut que $G(s,\sigma)$ peut être mise sous la forme

$$(4) \qquad G(s,\sigma) = -\log\left|\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}(s-\sigma)\right| + A^*(s,\sigma)$$

$A^*(s,\sigma)$ étant une fonction partout régulière. D'où il suit qu'on a

$$(5) \qquad \frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial s} = \frac{\pi}{l}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(\sigma-s) + \frac{\partial A^*(s,\sigma)}{\partial s} \quad \text{[form. (5) pag. 311]}$$

et qu'il suffit de prendre dans la formule (3) comme valeur de l'intégrale la valeur principale, et en outre que dans les équations intégrales déduites par M. Hilbert la partie singulière de ces fonctions disparait complètement.

C'est cette dernière conclusion rélative à la fonction $A^*(s,\sigma)$ qui ne me semble pas tout à fait exacte. Car la fonction $A(xy,\xi\eta)$ est une fonction régulière de xy, $\xi\eta$ seulement quand des points $\xi\eta$ et xy l'un au moins n'appartient pas à C, mais, lorsque les points viennent tous les deux sur C, elle aussi aura une singularité: et d'autre part $A^*(s,\sigma)$ ne diffère de $A(s,\sigma)$ que par une fonction partout régulière. Heureusement — et c'est ce que je me propose de montrer — la singularité de $A(s, \sigma)$ est d'une nature tout à fait analogue à la singularité de $-\log r(s, \sigma)$; de manière qu'il suffira d'écrire à la place des formules (4) et (5) les formules

$$G(s, \sigma) = -2 \log \left| \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} (s - \sigma) \right| + A^*(s, \sigma)$$

$$\frac{\partial G(s, \sigma)}{\partial s} = 2 \frac{\pi}{l} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{l} (\sigma - s) + \frac{\partial A^*(s\sigma)}{\partial s}$$

pour que la nouvelle fonction $A^*(s, \sigma)$ soit réellement une fonction régulière de s et de σ, et qu'on puisse répéter tous les raisonnements de M. Hilbert.

Il est donc question d'étudier la fonction $A(xy, \xi\eta)$. Si nous la déterminons par la méthode de Robin, $A(xy, \xi\eta)$ sera donnée par la formule

$$A(xy, \xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C \log r(xy, s)\, \varphi(s; \xi\eta)\, ds$$

oú la fonction $\varphi(s, \xi\eta)$ est la solution de l'équation intégrale

$$-\varphi(s, \xi\eta) + \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n_s} \varphi(\sigma, \xi\eta)\, d\sigma = \frac{\partial \log r(s, \xi\eta)}{\partial n_s} + \frac{2\pi}{l};$$

équation que nous savons avoir toujours une et une seule solution. Posons

$$f(s; \xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n_s} \frac{\partial \log r(\sigma, \xi\eta)}{\partial n_\sigma} d\sigma;$$

$f(s, \xi\eta)$ sera une fonction toujours régulière même lorsque $\xi\eta$ vient sur C. En effet la fonction $\frac{\partial \log r(s, \sigma)}{dn_s}$ est une fonction régulière, et $f(s, \xi\eta)$ n'est autre chose que le potentiel de double couche qui a pour moment $\frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n_s}$.

Si nous posons donc

$$\varphi(s, \xi\eta) = -\frac{\partial \log r(s, \xi\eta)}{\partial n_s} + \psi(s, \xi\eta),$$

la fonction ψ sera une solution de l'équation intégrale

$$-\psi(s, \xi\eta) + \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n_s} \psi(\sigma, \xi\eta)\, d\sigma = -f(s, \xi\eta) + \frac{2\pi}{l};$$

et elle sera donc une fonction de s et de $\xi\eta$ régulière même quand

$\xi\eta$ vient sur C: nous pouvons dire que la fonction $\psi(s, \xi\eta)$ devient alors la fonction $\psi(s, \sigma)$ qui est la solution de l'équation

$$-\psi(s,\sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial \log r(s,\sigma_1)}{\partial n_s}\psi(\sigma_1,\sigma)\,d\sigma_1 = -\frac{\partial \log r(s,\sigma)}{\partial n_s}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial \log r(s,\sigma_1)}{\partial n_s}\,\frac{\partial \log r(\sigma_1,\sigma)}{\partial n_{\sigma_1}}\,d\sigma_1+\frac{2\pi}{l}.$$

On aura donc

$$A(xy,\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \log r(xy,s)\frac{\partial \log r(s,\xi\eta)}{\partial n_s}\,ds+E(xy,\xi\eta)$$

où

$$E(xy,\xi\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C \log r(xy,s)\,\psi(s,\xi\eta)\,ds$$

est une fonction toujours régulière.

Supposons maintenant que, xy étant à l'intérieur de C, $\xi\eta$ vienne dans un point de C: nous aurons alors de la formule précédente

$$A(xy,\sigma) = -\log r(xy,\sigma)-\frac{1}{2\pi}\int_C \log r(xy,s)\,\frac{\partial \log r(s,\sigma)}{\partial n_s}\,ds+E(xy,s).$$

Et maintenant il suffit de remarquer que l'intégrale de cette dernière formule est un potentiel de simple couche dont la densité est toujours finie et régulière, pour en conclure qu'elle est encore régulière même quand xy vient sur C; et qu'on a donc

$$A(s,\sigma) = -\log r(s,\sigma)+E_1(s,\sigma)$$

où $E_1(s,\sigma)$ est une fonction partout régulière

q. e. d.

Je remarquerai encore que la propriété que nous avons démontré pour la fonction $A(xy,\xi\eta)$ est analogue à la propriété bien connue

$$\lim_{\xi\eta=\sigma} g(xy,\xi\eta) = \log r(xy,\sigma)$$

qu'appartient à la fonction harmonique $g(xy,\xi\eta)$ définie par la condition de prendre les mêmes valeurs que $\log r(xy,\xi\eta)$ sur le contour C; propriété que l'on déduit aisément de la formule

$$g(xy,\xi\eta) = g(\xi\eta,xy).$$

Estratto dai Rendiconti del R. Ist. Lomb. di sc. e lett., Serie II, Vol. XLI, 1908

SUL PROBLEMA DI CAUCHY
PER LE EQUAZIONI LINEARI IN DUE VARIABILI A CARATTERISTICHE REALI.

Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI

§ I.

1. Sia l'equazione lineare di ordine n:

$$\left.\begin{aligned} &P_{n0}(x\,y)\,p_{n0} + P_{n-1\,1}(x\,y)\,p_{n-1\,1} + \ldots + P_{0n}(x\,y)\,p_{0n} = \\ &\qquad = \sum_{l+m<n} a_{lm}(x\,y)\,p_{lm} + a(x\,y)\,z + f(x\,y) \\ &\qquad \left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\,\partial y^k}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Chiamiamo $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n$ le radici dell'equazione

$$P_{n0}(x\,y)\,\alpha^n + P_{n-1\,1}(x\,y)\,\alpha^{n-1} + \ldots + P_{0n} = 0\,, \qquad (2)$$

e supponiamo che in un campo δ del piano $x\,y$ queste siano tutte reali e distinte od anche in parte coincidenti: come è noto, esisteranno in δ dei sistemi di curve c_i soluzioni dell'equazione differenziale

$$\frac{d\,y}{d\,x} + \alpha_i(x\,y) = 0: \qquad (3)$$

le curve caratteristiche per l'equazione (1). Il *problema di Cauchy* per l'equazione (1) si enuncia allora nel modo seguente: *Data in δ una curva γ non mai tangente ad una curva c_i determinare una soluzione di* (1) *che insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini prenda su γ dei valori assegnati a priori.*

Per risolvere questo problema si presenta naturale di ricorrere al metodo delle successive approssimazioni che costituisce forse fin qui il più potente mezzo di investigazione in queste ricerche. È utile indicare brevemente quale è la difficoltà che si tratta di superare in questo ordine di idee. Poniamo

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}; \tag{4}$$

sarà X_i un simbolo operatorio di derivazione: precisamente sarà X_i a meno di un fattore di proporzionalità $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha_i^2}}$ il simbolo della derivazione secondo la tangente a c_i. Ed è ben chiaro che se noi sviluppiamo il prodotto simbolico $X_1 X_2 \ldots X_n$, i termini di ordine n dello sviluppo coincidono a meno del fattore P_{n0} coi termini di ordine n dell'equazione (1). Supponiamo, — e studieremo in altra Nota quando ciò è possibile — che l'equazione (1) si possa portare nella forma seguente

$$X_1 X_2 \ldots X_n z = \sum b_{i_1 i_2 \ldots i_h}(xy) X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_h} z + a(xy) z + f(xy). \tag{5}$$

Nel metodo delle successive approssimazioni si usa alla (5) sostituire il sistema di equazioni

$$\left.\begin{aligned} X_1 X_2 \ldots X_n z_1 &= f(xy) \\ X_1 X_2 \ldots X_n z_j &= \sum b_{i_1 i_2 \ldots i_h}(xy) X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_h} z_{j-1} + \\ &+ a(xy) z_{j-1} + f(xy) \quad (j = 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

e determinare la z quale limite delle funzioni z_j così ottenute. Ma affinchè tale procedimento sia legittimo occorre prima sapere risolvere il problema di Cauchy per l'*equazione pura* (*):

$$X_1 X_2 \ldots X_n z = f(xy) \tag{7}$$

qualunque sia $f(xy)$; e ciò non presenta difficoltà poichè la z si ottiene immediatamente con convenienti integrazioni lungo le curve caratteristiche; ma ciò non basta: per poter formare i secondi membri delle equazioni (6) e dimostrare la convergenza delle z_j, occorre ancora fare vedere che la z soluzione di (7) ammette le deri-

---

(*) Dico *pura* questa equazione: un'equazione pura è omogenea solo quando le α_i sono tutte costanti.

vate dei primi $n-1$ ordini od almeno che su essa si può operare coi simboli $X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h}$ che compaiono nei secondi membri di (5) e ciò, se si vuole restare nel campo non analitico, *senza fare alcuna ipotesi sulla esistenza o meno delle derivate della* $f(x\,y)$ (*). Ora la forma di (7) non dice immediatamente che ciò sia possibile, poichè da essa risulta soltanto che su di quella soluzione si può operare successivamente con X_n, $X_{n-1}, \dots, X_2$, X_1 (**).

(*) Invero, se per ottenere che sulla z soluzione di (7) si può operare con qualcuna delle $X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h}$ (per es.: per provare che su z si può operare con tutti questi simboli di ordine $n-1$ che compaiono nel secondo membro di (5)), si dovesse ad es. ammettere che $f(x\,y)$ avesse le derivate prime, si vede subito che non si potrebbe procedere nelle successive approssimazioni senza dimostrare che la z soluzione di (7) in tale ipotesi ammette anche le derivate di ordine n, o che almeno tutte le $X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h} z$ hanno le derivate prime. Onde più correttamente forse dovremmo dire che perchè si possa applicare il metodo delle successive approssimazioni occorre esista un numero s tale che se $f(x\,y)$ ammette le derivate di ordine $\leqq s$, sulla z soluzione di (7) si possa operare colle $X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h}$ e che le $X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h} z$ abbiano tutte le derivate di ordine $\leqq n+s$ necessarie a costruire le derivate di ordine s dei secondi membri delle (6).

(**) È questa difficoltà, io credo, il massimo impedimento nell'applicazione del metodo delle successive approssimazioni, ed in essa si deve scorgere la ragione delle limitazioni poste dai vari autori nell'uso di esso. Dopo che il PICARD nella sua classica Memoria del *Journal de mathématiques* del 1890 applicò il suo metodo alle equazioni di tipo iperbolico di secondo ordine lineari, per cui la questione posta più sopra si risolve facilmente, il metodo delle approssimazioni successive fu studiato da molti autori. Il DELASSUS ed il LE ROUX in varie Memorie degli *Annales de l'École normale sup.* (1895) e del *Journal de mathématiques* (1898, 1900) dimostrarono che si può applicare al caso *analitico*: è chiaro perchè allora la difficoltà non si presenta. Il BIANCHI ed il NICOLETTI (cf. varie note nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* 1895, 1.° semestre: e specialmente per quanto qui importa la Memoria del NICOLETTI, *Sulla estensione dei metodi di Picard e di Riemann ad una classe di equazioni alle derivate parziali*, Atti della R. Accademia delle scienze fisiche e mat. di Napoli 1897, serie II, vol. VIII, pp. 1-22) estesero il metodo delle successive approssimazioni a tipi di equazioni — e di sistemi di equazioni — in cui uno solo era il termine di ordine n e questo della forma $\dfrac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_k} z}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_k^{i_k}}$, mentre le derivate di ordine inferiore che comparivano nell'equazione contenevano al più i_j derivazioni rapporto ad x_j. Il FUBINI *Su alcune nuove applicazioni dei metodi di Picard e di Riemann alla teoria delle equazioni alle derivate parziali*, Atti della Acca-

Osserverò ancora che ben sovente occorrerà però non solo dimostrare che la z ammette le derivate di ordine $n-1$, ma pure che la z ammette proprio le derivate di ordine n; così ciò sarà necessario quando si voglia passare dallo studio dell'equazione (5) all'equazione (1), e cioè non si voglia considerare ognuna delle $X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h}$ come un unico simbolo operativo: ma allora si potrà anche fare delle ipotesi convenienti sulla natura della $f(xy)$ che compare nell'equazione (7).

In quanto segue io mostrerò che quando l'equazione è del tipo (5), sia che le $X_1 X_2 \dots X_n$ siano distinte, sia che non lo siano, la difficoltà si può superare. E mostrerò in altro lavoro che a questo tipo si possono portare tutte le equazioni a caratteristiche reali e distinte: mentre per le equazioni a caratteristiche non distinte tale condizione impone realmente delle limitazioni. Si terrà inoltre come norma di determinare dei campi di valori per xy, in cui si può accertare l'esistenza delle soluzioni e delle loro derivate, dipendenti soltanto dalle limitazioni cui soddisfanno le funzioni che compaiono nell'equazione e nei dati iniziali, perchè ciò è necessario per una ricerca analoga relativa alle equazioni non lineari che sarà pubblicata altrove (**).

2. Richiamerò ancora una osservazione generale che ci tornerà utile più tardi. Con una conveniente trasformazione sulle variabili

---

demia Gioenia di Catania, serie IV, vol. XVIII (1905) Memoria V studia il caso che l'equazione sia della forma (5) del testo, ma che le operazioni $X_1, X_2, \dots X_n$ siano a due a due *permutabili*, condizione questa che gli permette di superare facilmente la difficoltà notata sopra. Però a pag. 25-26 di questa Memoria si trova un'acuta osservazione che permette di estendere il metodo ad altri casi: sull'applicazione sistematica dell'osservazione del FUBINI si fonda la trattazione che daremo in seguito. Ricorderò ancora due recenti lavori del BURGATTI e dell'HOLMGREN. Il BURGATTI (*Sull'estensione del metodo di integrazione di Riemann alle equazioni ecc.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1906 (2.° sem.) serie V, vol. XV, pag. 602-609) afferma che il metodo riesce, ma non rileva nè discute la difficoltà sopra notata. L'HOLMGREN (*Sur l'extension de la méthode d'integration de Riemann.* Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Bd 1, 1903-1904, pag. 317-326) promette di mostrare la risolubilità del problema di Cauchy per le equazioni di 3.° ordine a caratteristiche distinte in una Memoria successiva: ma tale Memoria non fu pubblicata.

(**) E. E. LEVI, *Sul problema di Cauchy per le equazioni a caratteristiche reali e distinte.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, vol. XVII, 1° sem. 1908.

x ed y possiamo fare in modo che la curva iniziale γ sia l'asse delle y: e poi con un ulteriore cambiamento della funzione incognita z, e precisamente sostituendo alla z la $z+u$, u indicando una funzione che prenda insieme colle derivate dei primi $n-1$ ordini, i medesimi valori iniziali che deve prendere la z, possiamo sempre ridurci al caso in cui la z debba annullarsi sopra l'asse delle y insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini.

L'ipotesi che γ non sia tangente ad alcuna caratteristica si traduce allora nell'ipotesi che $P_{n0}(x\,y)$ sia sempre diverso da zero pel tratto dell'asse delle y che si considera, e quindi in δ, qualora si assuma questo campo convenientemente piccolo. Potremo supporre anzi $P_{n0}(x\,y)=1$, e così faremo d'ora in poi.

§ II.

1. Nel § precedente abbiamo ripetutamente accennato come il simbolo

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+\varkappa\frac{\partial}{\partial y} \tag{1}$$

si possa e si debba sovente interpretare come un unico simbolo di derivazione; e precisamente a meno di un fattore di proporzionalità rappresenti la derivata secondo la tangente alle curve c definite dall'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx}=\varkappa(x\,y). \tag{2}$$

Occorre fissare meglio alcune proprietà di questi simboli e di alcuni altri connessi con essi, che useremo continuamente in seguito e richiamare e precisare alcuni teoremi, in sostanza noti.

Se si suppone che in un campo δ il quale contenga l'asse delle y od un tratto di esso e sia, per comodità, interno alla striscia $|x|<1$ (*), la funzione $\varkappa(x\,y)$ sia finita e continua e rapporto ad y e soddisfaccia alle condizioni di Lipschitz, e chiamiamo M il massimo valore assoluto di essa, per ogni punto interno a δ passa una ed una sola soluzione c di (2) ed essa è incontrata al più una volta

(*) Si può sempre del resto riportarsi a questo caso restringendo δ, oppure facendo una trasformazione di variabili $x'=\gamma x$.

da ogni retta $x = \cos t.$: e se indichiamo la curva c che passa per il punto $x = 0$, $y = \eta$ con

$$y = \varphi(x\,\eta), \tag{3}$$

le variabili $x\,\eta$ possono assumersi quali variabili coordinate nel campo δ_1 formato dal massimo rombo contenuto in δ avente una diagonale $A\,B$ sull'asse delle y, ed i lati paralleli alle rette di coefficiente angolare $+M$ e $-M$: infatti la curva c passante per un punto di δ_1 avendo coefficiente angolare inferiore in modulo ad M, dovrà incontrare di necessità il segmento $A\,B$ in un punto.

Se di più si suppone che $\alpha(x\,y)$ abbia derivate prime finite e continue e supponiamo ancora che in δ esse siano inferiori ad M, esisteranno ancora le derivate $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\eta}$. Per quanto riguarda $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ si ha immediatamente dall'equazione (2) medesima

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \alpha(x\,y) = \alpha(x,\ \varphi(x\,\eta))\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial\alpha(x\,y)}{\partial x}\right)_{y=\varphi(x\eta)} + \left(\frac{\partial\alpha(x\,y)}{\partial y}\right)_{y=\varphi(x\eta)} \alpha(x, \varphi(x\,\eta)).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Per quanto riguarda invece le altre derivate, ciò è conseguenza di un noto teorema (*): precisamente posto $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \varphi_1$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial x} = \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}$ e $\alpha_1(x\,\eta) = \left(\dfrac{\partial\alpha(x\,y)}{\partial y}\right)_{y=\varphi(x\eta)}$ si ha che φ_1 soddisfa all'equazione $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \alpha_1(x\,\eta)\,\varphi_1$; onde ricordando che $\varphi(0\,\eta) = \eta$, $\varphi_1(0\,\eta) = 1$ sarà

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \varphi_1 = e^{\int_0^x \alpha_1 dx}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\eta} = \alpha_1(x\,\eta)\, e^{\int_0^x \alpha_1 dx}. \tag{5}$$

(*) G. Peano, *Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie*, Atti della R. Accademia di Torino, Vol. 33 (1897-98), pag. 1-18. Alcuni anni dopo il teorema medesimo fu dato da E. Lindeloff, *Demonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles*, Journal de mathématiques 1900, serie v, vol. 6.

Segue dalla prima delle (5) che $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ non si annulla mai in δ_1 che anzi si ha

$$e^{-M} < e^{-M|x|} < \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right| < e^{M|x|} < e^{M}. \tag{6}$$

Ciò posto, col dire che sulla funzione $f(x\,y)$ si può operare coll'operatore X non si vuol dire altro che, se è $\overline{f}(x\,\eta) = f(x,\ \varphi(x\,\eta))$, esiste $\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}$:

$$X f(x\,y) = \frac{\partial \overline{f}(x\,\eta)}{\partial x}. \tag{7}$$

2. Accanto agli operatori Xf è utile considerare gli operatori inversi $X^{-1}f$, i quali fanno passare da una funzione assegnata $f(x\,y)$, alla funzione $z(x\,y)$, la quale soddisfa all'equazione

$$Xz = f(x\,y) \tag{8}$$

e *si annulla sull'asse delle* y. Questa condizione determina la $z(x\,y)$. Posto $\overline{z}(x\,\eta) = z(x,\ \varphi(x\,\eta))$, $\overline{f}(x\,\eta) = f(x,\ \varphi(x\,\eta))$, la soluzione cercata esisterà in tutto δ_1 e sarà data da $\overline{z}(x\,\eta) = \int_0^x \overline{f}(x\,\eta)\,dx$: indicheremo con $X^{-1}f$ appunto il risultato di tale integrazione. L'operatore X^{-1} è quindi *un operatore integrale, inverso di* X: in simboli scriveremo

$$X X^{-1} = X^{-1} X = I$$

I indicando l'operatore identico e cioè tale che $If = f$ qualunque sia $f(x\,y)$. X^{-1} *è definito in tutto* δ_1 e per ogni funzione finita e continua in δ_1 (*). Se la funzione $f(x\,y)$ soddisfa ad una limitazione del tipo

$$|f(x\,y)| < F\,|x|^{t} \tag{9}$$

F e t essendo numeri positivi o nulli, si avrà la *disuguaglianza fondamentale*:

$$|X^{-1} f(x\,y)| < \frac{1}{t+1} F\,|x|^{t+1}. \tag{10}$$

(*) Basterebbe che $\overline{f}(x\,\eta)$ fosse integrabile rapporto ad x: e perchè su $X^{-1}f$ si possa operare con X e risulti soddisfatta la (8) basta che $\overline{f}(x\,\eta)$ sia continua rapporto ad x.

Queste proprietà della soluzione dell'equazione (8), nulla sull'asse delle y, valgono ancora per l'analoga soluzione dell'equazione lineare generale

$$X z + a(x\, y)\, z = f(x\, y)\,. \tag{11}$$

Si ha invero che z è definita in tutto δ_1 da

$$z = e^{-X a^{-1}} X^{-1} \left(f(x\, y)\, e^{X a^{-1}} \right); \tag{12}$$

e quindi, se $a(x\, y)$ è sempre in $\delta_1 < M_1$ in modulo, sarà

$$|z| < K_1 \frac{1}{t+1} F |x|^{t+1}, \quad K_1 = e^{M_1}\,. \tag{13}$$

3. Siano

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

due operatori analoghi ad X: supponiamo senz'altro che in δ_1, α_1 ed α_2 abbiano le derivate prime continue ed inferiori ad M in valore assoluto e supponiamo inoltre che α_1 ed α_2 siano sempre disuguali e che μ sia il massimo valore assoluto di $\dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}$ in δ_1. Se allora indichiamo con $\varphi_1(x\, \eta_1)$, $\varphi_2(x\, \eta_2)$ le funzioni analoghe alle (3) relative alle X_1 ed X_2 è facile vedere che le formule

$$y - \varphi_1(x\, \eta_1) = 0, \quad y - \varphi_2(x\, \eta_2) = 0 \tag{14}$$

danno un cambiamento di variabili regolare in δ_1. Infatti si osservi intanto che i jacobiani dei primi membri delle equazioni precedenti rapporto ad $x\, y$, e rapporto ad $\eta_1\, \eta_2$ sono rispettivamente $\alpha_1 - \alpha_2$, e $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_1} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_2}$; e quindi per le ipotesi fatte, e ricordando (6) sono in δ_1 sempre in modulo compresi fra $2\, M$ e $\dfrac{1}{\mu}$, e fra e^{-2M} ed e^{2M}. Onde in δ_1 si potrà certo assumere η_1 ed η_2 come nuove variabili.

E ricordando che esistono le derivate prime delle φ_1 e φ_2 e sono continue si vedrà subito che le $x(\eta_1\, \eta_2)$, $y(\eta_1\, \eta_2)$ che si ottengono risolvendo (14) ammettono le derivate prime finite e continue; e similmente che esistono e sono finite e continue le derivate delle $\eta_1(x\, y)$, $\eta_2(x\, y)$. E di più osservando che esistono pure e sono finite e continue le $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta_1 \partial x}$, $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta_2 \partial x}$, se si pone

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_1}\right)_{x=x(\eta_1 \eta_2)} = \overline{\varphi}_1(\eta_1 \eta_2), \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_2}\right)_{x=x(\eta_1 \eta_2)} = \overline{\varphi}_2(\eta_1 \eta_2).$$

si avrà che le funzioni $\overline{\varphi}_1$ e $\overline{\varphi}_2$ ammettono rispettivamente le derivate $\frac{\partial \overline{\varphi}_1}{\partial \eta_2}$, $\frac{\partial \overline{\varphi}_2}{\partial \eta_1}$.

Premesse queste osservazioni, si noti che nelle nuove variabili si ha

$$X_1 f = (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{1}{\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_2}} \frac{\partial f}{\partial \eta_2}, \quad X_2 f = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_1}} \frac{\partial f}{\partial \eta_1}. \tag{15}$$

E di qui segue intanto, per le proprietà notate della trasformazione (14), che se *su di una funzione $f(x\,y)$ si può operare cogli operatori X_1 ed X_2, ed $X_1 f$ ed $X_2 f$ risultano funzioni continue, la funzione $f(x\,y)$ ammette entrambe le derivate prime rapporto ad x ed y*. E si può allora interpretare X_1 ed X_2 non più come simboli derivatorii, ma come combinazioni lineari delle due derivate: e si potrà quindi scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}(\alpha_2 X_1 - \alpha_1 X_2) \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(X_1 - X_2);$$

dalle quali segue che, se la funzione $f(x\,y)$ è tale che

$$|X_1 f| < P, \quad |X_2 f| < P \tag{16}$$

(P essendo un numero od una funzione di $x\,y$), *esiste un numero ν_1 dipendente da M e μ soltanto* (ed affatto indipendente da P) *tale che si ha*

$$\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right] < \nu_1 P. \tag{17}$$

4. La stessa trasformazione del numero precedente ci permette ancora di studiare la soluzione dell'equazione pura di secondo ordine

$$X_1 X_2 z = f(x\,y) \tag{18}$$

che si annulla sull'asse delle y insieme colla X_1. Essa è data, come è noto, da

$$z = X_2^{-1} X_1^{-1} f(x\,y) \tag{19}$$

ma in tal forma compare soltanto che su di essa si può operare successivamente con X_2 e con X_1. È notevole che su z si può operare anche con X_1 e con $X_2 X_1$: basta invero osservare che introducendo colle (14) le variabili η_1 ed η_2, essa diviene della forma

$$A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta_2 \, \partial \eta_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial \eta_1} = f(x\,y) \tag{20}$$

A_1, A_2 essendo funzioni di α_1, α_2 delle loro derivate prime e delle $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_2}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_1}$; e la soluzione z dell'equazione (18) nulla insieme con $X_2 z$ sull'asse delle y diventa la soluzione di (20) nulla sulla $\eta_1 = \eta_2$ insieme con la $\frac{\partial}{\partial \eta_1}$. Allora la teoria dell'equazioni lineari del secondo ordine ci dice bene che tale funzione ammette ancora la $\frac{\partial}{\partial \eta_2}$ e la $\frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}$; e ciò prova il nostro enunciato (*). Coi nostri simboli possiamo dire *se $f(x\,y)$ è una funzione finita e continua, la $z = X_2^{-1} X_1^{-1} f(x\,y)$ è tale che si può su di essa operare colle X_1, X_2, $X_2 X_1$, $X_1 X_2$.*

Ci importa dedurre alcune limitazioni per la funzione z così ottenuta quando $f(x\,y)$ soddisfaccia a (9). Si ha allora per (10)

$$\left.\begin{aligned} |X_2 z| &= |X_1^{-1} f(x\,y)| < \frac{1}{t+1} F\, x^{t+1} \\ |z| &= |X_2^{-1} X_1^{-1} f(x\,y)| < \frac{1}{t+2}\,\frac{1}{t+1} F\, x^{t+2}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Si osservi poi che siccome le α_1, α_2 ammettono le derivate prime

$$(X_1\, X_2) = X_1 X_2 - X_2 X_1 = \lambda_2 (X_1 - X_2), \tag{22}$$

dove si è posto

$$\lambda_2 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{\partial(\alpha_2 - \alpha_1)}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right); \tag{23}$$

(*) È forse opportuno notare come in questa deduzione, che coincide in sostanza col teorema della inversione delle derivazioni, abbia ufficio assolutamente essenziale l'ipotesi che $X_2 z$ ossia $\frac{\partial z}{\partial \eta_1}$ sia nulla inizialmente.

λ_2 è funzione sempre finita e continua in δ_1, in modulo inferiore a $2\,M\,\mu\,(M+1)$. Onde segue che la $X_1\,z$, di cui sopra si è provato l'esistenza, è soluzione dell'equazione

$$X_2\,(X_1\,z) + \lambda_2\,(X_1\,z) = f\,(x\,y) + \lambda_2\,X_2\,z. \tag{24}$$

Ma per le (9) e (21), si ha, ricordando che $|x| < 1$, $t \geqq 0$

$$|f\,(x\,y) + \lambda_2\,X_2\,(z)| < F\left(1 + \frac{2\,M\,(M+1)\,\mu}{t+1}\right)|x|^t <$$
$$< F\,(1 + 2\,M\,(M+1)\,\mu)\,|x|^t\,,$$

onde, applicando a (24) la (13) segue

$$|X_1\,z| < k\,\frac{1}{t+1}\,F\,|x|^{t+1} \quad (k = e^{2M(M+1)\mu}\,(1 + 2\,M\,(M+1)\mu)). \tag{25}$$

Dalle (21) (25) possiamo quindi raccogliere che *esiste un numero H_2 dipendente soltanto da M, μ tale che se $f\,(x\,y)$ soddisfa alla limitazione* (9) *la funzione $z = X_2^{-1}\,X_1^{-1}\,f$ soddisfa alle disuguaglianze:*

$$\left.\begin{aligned} &|z| < H_2\,\frac{1}{t+1}\,F\,|x|^{t+2} \\ &\qquad\qquad (H_2 = e^{2M(M+1)\mu}\,(1 + 2\,M\,(M+1)\,\mu)) \\ &[\,|X_1\,z|,\ |X_2\,z|\,] < H_2\,\frac{1}{t+1}\,F\,|x|^{t+1}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Si noti che l'ultima disuguaglianza dice in particolare che le $X_1\,z$, $X_2\,z$ e quindi entrambe le derivate di z sono nulle sull'asse delle y, il che del resto è evidente direttamente.

§ III.

1. Siamo ora in grado di procedere alla dimostrazione della risolubilità del problema di Cauchy per le equazioni del tipo (5) del § I.

Premettiamo una osservazione generale. Quando consideriamo un prodotto simbolico di operatori X_i, noi supporremo che le α_i

ammettano almeno tante derivate quante conviene perchè i prodotti simbolici si possano effettivamente sviluppare per le derivate dei vari ordini. Si può allora sempre supporre che nei prodotti simbolici che compaiono nel secondo membro gli indici $i_1, i_2, \ldots, i_h$ siano sempre crescenti come nel primo membro; poichè presi due operatori diversi $X_i\, X_j$ si ha $X_i X_j = X_j X_i + \lambda_{ij}(X_i - X_j)$ (dove λ_{ij} ha significato analogo al λ_2 dato dalla (23) del § 2): segue che si può sempre scambiare in un prodotto simbolico l'ordine di due simboli introducendo solo nuovi prodotti simbolici di ordine inferiore, quando le α ammettano tutte le derivate che compaiono nello sviluppo del prodotto simbolico considerato ed in quello permutato.

D'altra parte il fare l'ipotesi che nei prodotti simbolici che consideriamo gli indici degli X_i siano sempre crescenti ci permette evidentemente di fare la massima economia possibile nelle ipotesi relative ai coefficienti α_i.

Per fissare le idee cominceremo dallo studiare il caso in cui l'equazione (5) abbia tutte le caratteristiche distinte. Siano allora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n operatori:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}; \tag{1}$$

e si supponga che le α si possano ordinare per modo che in un campo δ contenente un tratto dell'asse delle y ed interno alla striscia $|x| < 1$, α_i abbia le derivate dei primi i ordini, fatta eccezione per α_n per cui basta supporre che esistano le derivate di ordine $\leq n-1$. E consideriamo l'equazione

$$\left.\begin{aligned} X_1 X_2 \ldots X_n z = \sum b_{i_1 i_2 \ldots i_h}(xy) X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_h} z + a(xy) z + f(xy) \\ (1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_h \leq n,\ h \leq n-1). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Indicheremo i prodotti simbolici di ordine h

$$X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_h} \qquad (1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n)$$

che possono entrare nel secondo membro di (2) con $R^{(h)}$: essi si ottengono sopprimendo $n-h$ simboli X_i dal prodotto $X_1 X_2 \ldots X_n$. Così si avranno n simboli $R^{(n-1)}$: dati dalla formula

$$R_i^{(n-1)} = X_1 X_2 \ldots X_{i-1} X_{i+1} \ldots X_n \quad (i = 1 \ldots n). \tag{3}$$

Supporremo che in δ sia M il massimo valore assoluto delle α_i e delle derivate delle α_i che sopra abbiamo ammesso esistere, μ il massimo valore assoluto di $\frac{1}{\alpha_i - \alpha_j}$ $(i \neq j)$, M_1 il massimo valore assoluto di $b_{i_1 i_2 \dots i_h}(x\,y)$ e $a(x\,y)$, ed infine che per $f(x\,y)$ si abbia

$$|f(x\,y)| < F\,|x|^t \tag{4}$$

F e t essendo numeri positivi o nulli.

E dimostreremo che *nel campo δ_1 fornito dal massimo rombo contenuto in δ avente una diagonale sull'asse delle y ed i lati paralleli alle rette di coefficiente angolare $+M$ e $-M$, esiste una ed una sola funzione z su cui si può operare coi simboli $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(n-1)}$, $X_1 X_2 \dots X_n$, che soddisfa a (2), e si annulla sull'asse delle y insieme colle funzioni $X_n z$, $X_{n-1} X_n z, \dots, X_2 X_3 \dots X_n z$. Di più esiste un numero K_n dipendente soltanto da M, μ, M_1 tale che si ha*

$$\left.\begin{aligned} &|z| < K_n \frac{1}{t+1} F\,|x|^{t+n}, \qquad |R^{(1)} z| < K_n \frac{1}{t+1} F\,|x|^{t+n-1}, \dots, \\ &\qquad\qquad |R^{(n-1)} z| < K_n \frac{1}{t+1} F\,|x|^{t+1}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Insisto sul fatto che K_n è funzione di M, μ, M_1 soltanto e non dipende da F e t: lo indicherò sovente con $K_n(M, \mu, M_1)$ per mettere in evidenza i numeri da cui dipende.

Si osservi ancora: 1.° Dalle (5) segue che non solo sono nulle sull'asse delle y le funzioni z, $X_n z$, $X_{n-1} X_n z, \dots, X_2 X_3 \dots X_n z$, come si chiese nelle condizioni imposte a z, ma che *di conseguenza sono pure nulle tutte le $R^{(i)} z$* (*). 2.° In tutto il campo δ_1 hanno senso i simboli X_i^{-1} (§ II, n.° 2).

(*) Se già sapessimo che la z ammette le derivate, è noto come un simile risultato si ottenga immediatamente, poichè basta supporre che sull'asse delle y, z sia nulla insieme colle derivate successive dei primi ordini rispetto ad una direzione diversa dalla $x = \text{cost.}$ per dedurre che tutte le derivate di ordine $\leq n-1$ sono nulle. Qui notiamo esplicitamente il fatto analogo relativo alle operazioni $R^{(i)} z$ come conseguenza delle (5), perchè ancora non abbiamo mostrato che la z ammetta proprio le derivate.

Se l'equazione è pura, il teorema si completa e si semplifica: *La soluzione dell'equazione pura*

$$X_1 X_2 \dots X_n z = f(xy) \tag{6}$$

che si annulla insieme con $X_n z$, $X_{n-1} X_n z, \dots,$ $X_2 X_3 \dots X_n z$ *sull'asse delle* y *è data*

$$z = X_n^{-1} X_{n-1}^{-1} \dots X_2^{-1} X_1^{-1} f(xy). \tag{7}$$

Valgono relazioni analoghe alle (5): qui però è $M_1 = 0$, perciò *indicheremo la* $K_n(M, \mu, 0)$ *con* $H_n(M, \mu)$ *ed avremo che la funzione* (7) *soddisfa alle limitazioni:*

$$\left.\begin{aligned} |z| < H_n \frac{1}{t+1} F |x|^{t+n}, \quad |R^{(1)} z| < H_n \frac{1}{t+1} F |x|^{t+n-1}, \dots, \\ |R^{(n-1)} z| < H_n \frac{1}{t+1} F |x|^{t+1}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dimostreremo insieme questi teoremi per induzione completa, mostrando successivamente che: 1.° se il teorema è vero per l'equazione pura di ordine n, è vero anche il teorema per l'equazione generale di ordine n; 2.° se è vero il teorema per l'equazione generale di ordine $n - 1$, è vero anche quello per l'equazione pura di ordine n.

Siccome dal § II segue che il teorema è vero per le equazioni pura e generale di 1.° ordine (n.° 2) e per l'equazione pura di 2.° ordine (n.° 4), il teorema risulterà vero in generale. Si noti che dalle formule (10), (13), (26) del § II risulta $H_1 = 1$, $K_1 = e^{M_1}$, $H_2 = e^{2M(M+1)\mu}(1 + 2M(M+1)\mu)$.

2. Nessuna difficoltà presenta la prima parte della dimostrazione: basta applicare il metodo delle approssimazioni successive. La funzione cercata si ottiene come somma della serie $z_1 + \sum \zeta_i$ dove z_1 e ζ_i sono determinate dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned} & X_1 X_2 \dots X_n z_1 = f(xy) \\ & X_1 X_2 \dots X_n \zeta_1 = \sum b_{i_1 i_2 \dots i_h} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h} z_1 + a(xy) z_1 \\ & X_1 X_2 \dots X_n \zeta_j = \sum b_{i_1 i_2 \dots i_h} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h} \zeta_{j-1} + a(xy) \zeta_{j-1} \quad (j \geqq 2). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Applicando ripetutamente il teorema relativo alle equazioni pure, si vede che queste successive equazioni determinano pienamente le z_1, ζ_i. Si osservi che il numero dei termini i quali compaiono nei secondi membri di (9) è certo minore di $n + \binom{n}{2} + \dots \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n - 1$; si ponga $n_1 = 2^n - 1$. Allora le disuguaglianze (8) danno, ricordando che $|x| < 1$ e ponendo $H_n = H_n(M, \mu)$,

$$
\left.
\begin{aligned}
&|z_1| < H_n \frac{1}{t+1} F|x|^{t+n}, \quad |R^{(1)} z_1| < H_n \frac{1}{t+1} F|x|^{t+n-1}, \dots, \\
&\qquad\qquad |R^{(n-1)} z_1| < H_n \frac{1}{t+1} F|x|^{t+1}. \\
&|\zeta_1| < H_n \frac{H_n n_1 M_1}{t+2} \frac{1}{t+1} F|x|^{t+n+1}, \\
&\qquad\qquad |R^{(1)} \zeta_1| < H_n \frac{H_n n_1 M_1}{t+2} \frac{1}{t+1} F|x|^{t+n}, \dots, \\
&\qquad\qquad |R^{(n-1)} \zeta_1| < H_n \frac{H_n n_1 M_1}{t+2} \frac{1}{t+1} F|x|^{t+2}. \\
&|\zeta_j| < H_n \frac{(H_n n_1 M_1)^j}{(t+2)(t+3)\dots(t+j+1)} \frac{1}{t+1} F|x|^{t+j+n}, \\
&|R^{(1)} \zeta_j| < H_n \frac{(H_n n_1 M_1)^j}{(t+2)(t+3)\dots(t+j+1)} \frac{1}{t+1} F|x|^{t+n+j-1}, \dots, \\
&|R^{(n-1)} \zeta_j| < H_n \frac{(H_n n_1 M_1)^j}{(t+2)(t+3)\dots(t+j+1)} \frac{1}{t+1} F|x|^{t+j+1}.
\end{aligned}
\right\} \quad (10)
$$

Dalle quali segue che $z_1 + \sum_1^\infty \zeta_j$, $R^{(1)} z_1 + \sum_1^\infty R^{(1)} \zeta_j$, . . . , $R^{(n-1)} z_1 + \sum_1^\infty R^{(n-1)} \zeta_j$, e, in conseguenza delle (9) medesime, anche $X_1 X_2 \dots X_n z_1 + \sum_1^\infty X_1 X_2 \dots X_n \zeta_j$, convergono uniformemente in δ_1 e quindi la prima di esse rappresenta una funzione z su cui si può operare colle $R^{(n-h)}$ e con $X_1 X_2 \dots X_n$ e che soddisfa alla (2) ed alle condizioni iniziali. E per essa infine, poichè $|x| < 1$, valgono le (5) dove si ponga

$$K_n(M, \mu, M_1) = H_n(M, \mu)\, e^{H_n n_1 M_1}. \tag{11}$$

Alla *dimostrazione del teorema di esistenza* si connette subito *quella del teorema di unicità*. Si ammetta infatti provato che l'equazione pura ha una sola soluzione — la soluzione z che soddisfa alle (8) —; presa una qualunque funzione $\bar{z}$ a priori nota soddisfacente a (2) ed alle condizioni iniziali assegnate, le differenze $\zeta_0 = z - z_1$, $\zeta_1 = z - (z_1 + \zeta_1)$, $\zeta_i = z - (z_1 + \sum_1^i \zeta_i)$ si determineranno dalle equazioni successive:

$$\left.\begin{aligned} X_1 X_2 \dots X_n \zeta_0 &= \sum b_{i_1 i_2 \dots i_h} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h} \bar{z} + a(xy)\bar{z} \\ X_1 X_2 \dots X_n \zeta_i &= \sum b_{i_1 i_2 \dots i_h} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h} \zeta_{i-1} + a(xy)\zeta_{i-1} \quad (i \geqq 1). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ed applicando a questo sistema i ragionamenti fatti sopra per il sistema (9) si deduce $\lim \zeta_i = 0$ ossia $z = \lim\, z_1 + \sum_1^i \zeta_i = z$. c. v. d. (*).

3. Resta da dimostrare che, ammesso vero il teorema per l'equazione generale d'ordine $n-1$, esso è ancora vero per l'equazione pura di ordine n. Ora intanto, se l'equazione

$$X_1 X_2 \dots X_n z = f(xy) \tag{6}$$

ammette soluzioni soddisfacenti alle condizioni da noi imposte, la funzione $Z = X_n z$ soddisfa all'equazione di ordine $n-1$

$$X_1 X_2 \dots X_{n-1} Z = f(xy) \tag{13}$$

e si annulla sull'asse delle y insieme con $X_{n-1} Z, \dots, X_2 X_3 \dots X_{n-1} Z$. Onde applicando il teorema da dimostrarsi all'equazione (13) di ordine $n-1$ vediamo che si avrà

$$Z = X_{n-1}^{-1} X_{n-2}^{-1} \dots X_2^{-1} X_1^{-1} f(xy). \tag{14}$$

E quindi *la z soluzione di (6), se esiste, è unica ed è data da*

$$z = X_n^{-1} Z = X_n^{-1} X_{n-1}^{-1} \dots X_2^{-1} X_1^{-1} f(xy). \tag{15}$$

Inversamente è chiaro che su (15) si può operare con X_n, $X_{n-1} X_n, \dots, X_1 X_2 X_3 \dots X_n$, che soddisfa a (6), che si annulla sull'asse delle y insieme con $X_n z, \dots, X_2 X_3 \dots X_n z$; quindi perchè il teorema del n. 1 sia dimostrato, occorre solo provare che su (15) si può operare con tutte le $R^{(h)}$ e che sono soddisfatte le (8).

(*) Questo ragionamento è analogo a quello che si tiene per la dimostrazione del teorema di unicità per le equazioni differenziali ordinarie. Cfr. GOURSAT, *Cours d'analyse*, Gauthier Villars, tomo II, p. 372.

Ora in quanto la Z, data da (14), è soluzione di (13) ed il teorema fu ammesso vero per le equazioni di ordine $n-1$, chiamando $r^{(h)}$ le operazioni di ordine h dedotte da $X_1 X_2 \dots X_{n-1}$ come le $R^{(h)}$ sono dedotte da $X_1 X_2 \dots X_n$ (*), esistono le $r^{(h)} Z$ e si ha

$$\left.\begin{array}{c} |Z| < H_{n-1} \frac{1}{t+1} F |x|^{t+n-1}, \; |r^{(1)} Z| < H_{n-1} \frac{1}{t+1} F |x|^{t+n-2}, \dots, \\ |r^{(n-2)} Z| < H_{n-1} \frac{1}{t+1} F |x|^{t+1} \end{array}\right\} \tag{16}$$

con $H_{n-1} = H_{n-1}(M, \mu)$. Onde da (15) per la (10) del § II

$$|z| < \frac{H_{n-1}}{t+n-1} \frac{1}{t+1} F |x|^{t+n} < H_{n-1} \frac{1}{t+1} F |x|^{t+n}. \tag{17}$$

Ed inoltre indicando con $\overline{R}^{(h)}$ le operazioni $R^{(h)}$ le quali *contengono* X_n come fattore e quindi sono della forma $r^{(h-1)} X_n$, si vede che su z si può operare colle $\overline{R}^{(h)}$, e da $\overline{R}^{(h)} z = r^{(h-1)} Z$ si deduce

$$|\overline{R}^{(1)} z| < H_{n-1} \frac{1}{t+1} F |x|^{t+n-1}, \dots |\overline{R}^{(n-1)} z| < H_{n-1} \frac{1}{t+1} F |x|^{t+1}. \tag{18}$$

Le (17) e (18) sono della forma (8).

Si chiamino poi $\overline{\overline{R}}^{(h)}$ le $R^{(h)}$ di ordine h le quali *non contengono* X_n come fattore. Consideriamo anzitutto quelle per cui $h < n-1$ (le quali non sono che le $r^{(h)}$) e sia $\overline{\overline{R}}^{(h)} = X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h}$ ($1 \leq i_1 < i_2 \dots$ $\dots < i_h \leq n-1$; $h \leq n-2$): l'operazione $\overline{\overline{R}}^{(h)} X_n$ sarà una $\overline{R}^{(1+h)}$, e quindi esisterà $\psi(xy) = \overline{\overline{R}}^{(h)} X_n z$: e la z si potrà ancora determinare come la soluzione dell'equazione di ordine $h+1 \leq n-1$

$$X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_h} X_n z = \psi(xy) \tag{19}$$

che si annulla sull'asse delle y insieme colle $X_n z, X_{i_h} X_n z, \dots,$ $\dots, X_{i_2} X_{i_3} \dots X_{i_h} X_n z$ (**) e tale proprietà caratterizza la z. Onde applicando nuovamente il teorema da dimostrarsi alla (19) e ricordando che per (18) è

$$|\psi(xy)| < H_{n-1} \frac{1}{t+1} F |x|^{t+n-h-1} \tag{20}$$

(*) Le $r^{(h)}$ non sono quindi altro che le $R^{(h)}$ di ordine $\leq n-2$ che *non contengono* X_n come fattore.

(**) Poichè queste quantità essendo tutte delle $\overline{R}^{(h)} z$ esistono e per le (18) sono, come già si notò, nulle sull'asse delle y.

si deduce che esiste $R^{(h)} z$ e che si ha

$$\left.\begin{array}{l} R^{(h)} z < \dfrac{H_{h+1}}{t+n-h} H_{n-1} \dfrac{1}{t+1} F x^{t+n-h} \leq \dfrac{H_{h+1}}{n-h} \\ \qquad H_{n-1} \dfrac{1}{t+1} F x^{t+n-h}. \end{array}\right\} \tag{21}$$

dove $H_{h+1} = H_{h+1}(M, \rho)$. Ed ancora (21) è del tipo (8).

Onde non resta che da studiare infine se su z si può operare colla $R_n^{(n-1)} = X_1 X_2 \dots X_{n-1}$, che è l'unica operazione di ordine $n-1$ che sia una $\bar{R}^{(h)}$. Ora si osservi che la z si può ancora pensare caratterizzata dall'essere la soluzione dell'equazione

$$X_{n-1} X_n z = \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) = X_{n-2}^{-1} X_{n-3}^{-1} \dots X_2^{-1} X_1^{-1} f(x, y) \tag{23}$$

che si annulla insieme colla $X_n z$ sull'asse delle y: e che per i risultati del n. 4 del § II esiste la $X_{n-1} z$ ed è caratterizzata dall'essere nulla sull'asse delle y e dal soddisfare l'equazione

$$X_n(X_{n-1} z) + \lambda_n (X_{n-1} z) = \varphi(x, y) + \lambda_n X_n z \tag{24}$$

dove è

$$\lambda_n = \frac{1}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} \left(\frac{\partial(\alpha_n - \alpha_{n-1})}{\partial x} - \alpha_{n-1} \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} + \alpha_n \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y} \right). \tag{25}$$

Per le ipotesi fatte sulle α_n, α_{n-1}, la λ_n è una funzione che ammette tutte le derivate dei due primi $n-2$ ordini e tutte continue ed inferiori ad un numero $N(M, \rho)$ *dipendente soltanto da* M *e* ρ (e da n).

Segue di qui che al secondo membro di (24) si può applicare la operazione di ordine $n-2$: $X_1 X_2 \dots X_{n-2}$. Infatti per (23) si ha $X_1 X_2 \dots X_{n-2} \varphi(x, y) = f(x, y)$; mentre per le osservazioni fatte or ora su λ_n, segue che su λ_n si può operare con qualunque operazione di ordine $\leq n-2$, e che quindi $X_1 X_2 \dots X_{n-2}(\lambda_n X_n z)$ è una combinazione lineare di funzioni del tipo $R^{(h)} z$ con coefficienti dipendenti solo dalle α, dalle loro derivate e dalla λ_n e dalle sue derivate di ordine $\leq n-2$. Ammettiamo ora per un istante che su $X_{n-1} z$ si possa operare sia con $X_1 X_2 \dots X_{n-2} X_n$, che con $X_1 X_2 \dots X_{n-2}$, si otterrà da (24) che $X_{n-1} z$ è una soluzione dell'equazione di ordine $n-1$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 X_2 \dots X_{n-2} X_n \zeta + \lambda_n . X_1 X_2 \dots X_{n-2} \zeta \\ + X_1 \lambda_1 . X_2 \dots X_{n-2} \zeta + \dots + X_1 X_2 \dots X_{n-2} \lambda_n . \zeta = f(x, y) \end{array}\right\} \tag{26}$$

dove si pose

$$Z(x\,y) = X_1\,X_2\ldots X_{n-2}\,[\varphi(x\,y) + \lambda_n\,X_n\,z] = f(xy) + \sum \gamma\,R^{(h)}\,z$$

Ora inversamente, se indichiamo con $r'^{(h)}$ le operazioni che si deducono da $X_1\,X_2\ldots X_{n-2}\,X_n$ come le $R^{(h)}$ si deducono da $X_1\,X_2\ldots X_{n-2}\,X_{n-1}\,X_n$ (*), la equazione (26), che è una equazione del tipo (2) di ordine $n-1$, determina una ed una sola funzione ζ su cui si può operare cogli $r'^{(h)}$ e con $X_1\,X_2\ldots X_{n-2}\,X_n$ e che è nulla sull'asse delle y insieme con le funzioni $r'^{(1)}\zeta$, $r'^{(2)}\zeta$, $\ldots r'^{(n-2)}\zeta$. Ma tale funzione sarà necessariamente una soluzione di (24) nulla sull'asse delle y (**) e quindi coincide necessariamente colla $X_{n-1}\,z$. Quindi effettivamente su $X_{n-1}\,z$ si può operare con tutte le $r'^{(h)}$, in particolare con $X_1\,X_2\ldots X_{n-2}$, e quindi esiste $R_n^{(n-1)}\,z = X_1\,X_2\ldots X_{n-2}\,(X_{n-1}\,z)$.

Si noti ancora che evidentemente dalle osservazioni fatte sopra per la λ_n e dalle (18) segue, ricordando che $|x| < 1$, $t \geqq 0$, che si può trovare un numero $\sigma(M\mu)$ dipendente solo dalle M, μ, N, H_{n-1}, e quindi solo da M, μ tale che

$$|Z(x\,y)| < \sigma(M\,\mu)\,F\,|x|^t\,.$$

Inoltre le funzioni $X_1\,X_2\ldots X_{n-2}\,\lambda_n$, $X_1\,X_2\ldots X_{n-3}\,\lambda_n$, $\ldots$, $\ldots$, $X_1\,X_2\,\lambda_n$, $X_1\,\lambda_n$ sono esse pure tutte inferiori ad un numero M'_1, dipendente solo da N ed M e quindi in ultima analisi solo da M e μ: onde applicando le (5) all'equazione (26) si vede che si ha

$$\left.\begin{aligned} |R_n^{(n-1)}\,z| = |X_1\,X_2\ldots X_{n-2}\,(X_{n-1}\,z)| < K_{n-1}\,\sigma\,\frac{1}{t+1}\,F\,|x|^{t+1} \\ [K_{n-1} = K_{n-1}(M,\,\mu,\,M'_1)]. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

(*) Quindi le $r'^{(h)}$ non sono che le $R^{(h)}$ le quali non hanno come fattore il simbolo X_{n-1}.

(**) Invero posto $X_n\,\zeta + \lambda_n\,\zeta - \varphi(x\,y) - \lambda_n\,X_n\,z = \pi(x\,y)$ abbiamo da (26) che la funzione $\pi(x\,y)$ è soluzione dell'equazione $X_1\,X_2\ldots X_{n-2}\,\pi(xy) = 0$; e che essa si annulla sull'asse delle y insieme con $X_{n-2}\,\pi(x\,y)$, $X_{n-3}\,X_{n-2}\,\pi(x\,y),\ldots,X_2\,X_3\ldots X_{n-2}\,\pi(x\,y)$, poichè queste quantità non sono che combinazioni lineari delle ζ, $r'^{(h)}\zeta$, e delle $R^{(h)}z$, e delle $X_{n-2}\,\varphi - X_{n-2}\,X_{n-1}\,X_n\,z,\ldots, X_2\,X_3\ldots X_{n-2}\,\varphi - X_2\,X_3\ldots X_n\,z$ le quali sappiamo essere tutte nulle sull'asse delle y. Onde per il teorema di unicità relativo alle equazioni di ordine $n-2$ segue che $\pi(x\,y) = 0$.

Associando le (17), (18), (21), (27) otteniamo le (8) quando per $H_n(M\mu)$ si prenda il massimo dei numeri

$$H_{n-1}(M,\mu),\quad \frac{1}{n-h} H_{h+1}(M,\mu)\, H_{n-1}(M,\nu),\quad K_{n-1}(M,\nu,M'_1)\,\sigma(M,\nu).$$

Il teorema del n. 1 resta quindi pienamente dimostrato.

4. Possiamo evidentemente togliere la limitazione che $X_1\, X_2 \dots X_n$ siano distinte. Ove solo m di queste siano distinte, cambiando leggermente notazione, potremo chiamarle $X_1, X_2, \dots X_m$ e per l'osservazione generale fatta in principio al n. 1 potremo porre l'equazione nella forma

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{\tau_1} X_2^{\tau_2} \dots X_m^{\tau_m} z = \sum b_{i_1 i_2 \dots i_m}(x\, y)\, X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m} z + f(x\, y) \\ (\tau_1 + \tau_2 + \dots \tau_m = n,\ i_1 + i_2 + \dots + i_m \leq n-1,\ 0 \leq i_j \leq \tau_j) \end{array}\right\} \quad (28)$$

e dove si intenda $X_i^0 = I$. È questa una equazione a m caratteristiche multiple secondo $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_m$ rispettivamente. Noi supporremo in questo caso che $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$ abbiano rispettivamente almeno le derivate dei primi $\tau_1, \tau_1+\tau_2, \dots, \tau_1+\tau_2+\dots+\tau_{m-1}$ ordini e che α_m ammetta almeno le derivate dei primi $\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_m - 1$ ordini. Ed allora in modo perfettamente analogo a quanto precede si può mostrare che, mantenendo a M, μ, M_1, F, t, δ_1 i significati attribuiti loro al n. 1, *nel campo* δ_1 *esiste una sola funzione, completamente caratterizzata dalle condizioni che su essa si possa operare con* $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m}$, *che soddisfi alla equazione (28) e si annulli sull'asse delle* y *insieme colle* $X_m^{i_m} z$, $X_{m-1}^{i_{m-1}} X_m^{\tau_m} z, \dots, X_1^{\tau_1 - 1} X_2^{\tau_2} \dots X_m^{\tau_m} z$. *Ed esiste di più un numero* K_n *dipendente soltanto dai numeri* M, μ, M_1 *e dalla forma della (28) — e cioè dai numeri* $\tau_1\, \tau_2, \dots, \tau_m$ *— tale che si ha*

$$\left.\begin{array}{l} |z| < K_n \dfrac{1}{t+1} F(x)^{t+n},\quad |X_n z| < K_n \dfrac{1}{t+1} F(x)^{t+n-1}, \dots \\ \dots\ |X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m} z| < K_n \dfrac{1}{t+1} F(x)^{t+n-(i_1+i_2+\dots+i_m)}. \end{array}\right\} \quad (29)$$

Ed *analogo teorema si ha per le equazioni pure del tipo*

$$X_1^{\tau_1} X_2^{\tau_2} \dots X_m^{\tau_m} z = f(x\, y). \qquad (30)$$

La dimostrazione corre affatto analoga alla precedente, anzi essa è sovente più semplice.

Nulla si deve modificare alle considerazioni del n. 2: quanto al n. 3, debbonsi distinguere due casi secondo che $\tau_m > 1$ o $\tau_m = 1$. Se $\tau_m = 1$ la dimostrazione è la stessa che precedentemente: se $\tau_m > 1$ la dimostrazione si semplifica in quanto l'ultima discussione riesce affatto inutile poichè tutti gli operatori rientrano già in uno dei tipi per cui valgono le disuguaglianze (18) oppure le (21).

5. Termineremo con una semplice osservazione. Nei numeri precedenti ci siamo limitati a considerare le operazioni in cui i fattori X hanno indici crescenti. Però le ipotesi fatte sui coefficenti α_i ci dicono che anche quei prodotti che si ottengono da questi scambiando i due primi fattori si possono effettivamente sviluppare: e quindi sono tra quelli che, conforme a quanto si è convenuto nel n. 1, noi possiamo considerare. Noteremo che anche *con tutti questi nuovi prodotti simbolici si può operare sulla* z: così ad es.: si può operare con $X_2 X_1 X_3 \dots X_n$. Invero basta osservare che se si pone $X_3 \dots X_n z = \zeta$, questa funzione è la soluzione dell'equazione $X_1 X_2 \zeta = f(xy)$ nulla sull'asse delle y: e quindi su di essa si può operare con X_1 ed $X_2 X_1$ in virtù dei risultati del n. 4 § II.

Milano, 1908. — Tipo-Lit. Rebeschini di Turati e C.

Estratto dai «Rendiconti» del R. Ist. Lomb. di sc. e lett. Serie II, Vol. XLI 1908

SUL PROBLEMA DI CAUCHY PER LE EQUAZIONI LINEARI IN DUE VARIABILI A CARATTERISTICHE REALI.

Nota II del dott. EUGENIO ELIA LEVI.

Proseguendo le ricerche iniziate nella nota che porta questo medesimo titolo e pubblicata in questi *Rendiconti*, mi propongo di studiare anzitutto come si debba passare dalle equazioni scritte nella forma simbolica là adottata alla forma ordinaria delle equazioni (§ IV); ed inoltre di studiare le derivate di ordine superiore delle soluzioni di queste equazioni (§ V). Manterrò le notazioni usate nella prima nota. Nel § VI dimostro un teorema ausiliare di cui mi sono servito nel § V, e che è anche utile per chiarire quali condizioni si impongano alle funzioni iniziali col chiedere che si possa fare la trasformazione indicata nel n. 2 del § I della nota precedente.

§ IV.

1. Supponiamo di nuovo da principio di avere un'equazione

$$\left.\begin{aligned} p_{n0} + P_{n-1\,1}\, p_{n-1\,1} + \dots + P_{0n}(x\,y)\, p_{0n} + \sum_{l+m<n} a_{lm}(x\,y)\, p_{lm} + \\ + a(x\,y)\, z + f(x\,y) \qquad \left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\, \partial y^k}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

a caratteristiche reali e *tutte distinte* (*): e cioè tale che l'equazione

$$\alpha^n - P_{n-1\,1}(x\,y)\,\alpha^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} P_{1\,n-1}(x\,y)\,\alpha + (-1)^n P_{0n} = 0 \quad (2)$$

ammetta, nel solito campo δ contenente l'asse delle y ed interno alla striscia $|x| < 1$, n radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tutte reali e distinte: e

(*) Conforme all'osservazione fatta al n. 2 del § I supponiamo che il coefficiente di p_{n0} sia l'unità.

come al n. 1 del § III supponiamo che queste si possano ordinare per modo che α_i ammetta almeno le derivate dei primi i ordini, tranne α_n per cui basta ammettere che esistano le derivate dei primi $n-1$ ordini; e che sia le α che queste loro derivate in modulo siano inferiori ad M: e sia μ il massimo di $\frac{1}{\alpha_i - \alpha_j}$. Infine si supponga che $a_{lm}(x\,y)$, $a(x\,y)$ siano tutte numericamente inferiori ad un numero $\mathfrak{M}_1$. Ed, al solito, sia $f(x\,y) < F(x)$. Io dico che una tale equazione si può sempre portare nella forma (2) del § III:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 X_2 \ldots X_n z = \sum b_{i_1 i_2 \ldots i_h}(x\,y) X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_h} z + a(x\,y) z + f(x\,y) \\ (1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_h \leq n,\ h \leq n-1) \end{array}\right\} \quad (3)$$

e che i coefficienti $b_{i_1 i_2 \ldots i_h}(x\,y)$ che in questa compaiono sono tutti in δ inferiori ad un *numero* M_1 *dipendente soltanto da* $M, \mu, \mathfrak{M}_1$.

Intanto è chiaro che si può dalla (1) passare alla equazione

$$X_1 X_2 \ldots X_n z = \sum_{l+m<n} \beta_{lm}(x\,y)\, p_{lm} + a(x\,y) z + f(x\,y) \qquad (4)$$

dove le β_{lm} differiscono dalle a_{lm} per un polinomio nelle α_i e nelle derivate di α_i di ordine $\leq i-1$; quindi le β_{lm} saranno inferiori ad un numero $\mathfrak{M}_1'$ dipendente solo da M, $\mathfrak{M}_1$.

Ciò posto, osserviamo che basterà mostrare che le derivate di ordine $n-1$ di z si esprimono linearmente per le derivate di ordine $< n-1$ e per le $R_i^{(n-1)} z$ (essendo come nella (3) del § III $R_i^{(n-1)} \equiv X_1 X_2 \ldots X_{i-1} X_{i+1} \ldots X_n$) con coefficienti funzioni delle α_i e delle loro derivate di ordine $\leq i-1$ soltanto, limitati in funzione di M e μ. Poichè, mostrato ciò, noi potremo passare dalla (4) ad una equazione del tipo:

$$X_1 X_2 \ldots X_n z = \sum b_{12 \ldots i-1\, i+1 \ldots n} X_1 X_2 \ldots X_{i-1} X_{i+1} \ldots X_n z + \sum_{l+m<n-1} \beta'_{lm}(x\,y)\, p_{lm} + a(x\,y) z + f(x\,y).$$

Ed allora esprimendo a loro volta le derivate di ordine $n-2$ per le derivate di ordine $< n-2$ e le $X_2 X_3 \ldots X_{i-1} X_{i+1} \ldots X_n z$, e così procedendo, si potrà passare dalla equazione (1) alla (3). Anzi risulta di più che per tal modo si può fare che nei prodotti simbolici di ordine h di (3) non compaiano fattori con indici $< n-h$ (*).

(*) Quindi al n. 2 § III, invece di porre $n_1 = 2^n - 1$ avremmo potuto porre $n_1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ora per provare il nostro assunto, basterà dimostrare che il determinante formato dai coefficienti delle derivate di ordine $n-1$ negli sviluppi degli n simboli $R_i^{(n-1)}$ è diverso da zero. Ma poichè le α_i sono radici di (2), si vede subito che tale determinante è:

$$\begin{vmatrix} 1 & P_{n-11}-\alpha_1 & \dots & P_{1n-1}-\alpha_1(P_{2n-2}-\alpha_1(\dots-\alpha_1(P_{n-11}-\alpha_1)\dots)) \\ 1 & P_{n-11}-\alpha_2 & \dots & P_{1n-1}-\alpha_2(P_{2n-2}-\alpha_2(\dots-\alpha_2(P_{n-11}-\alpha_2)\dots)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & P_{n-11}-\alpha_n & \dots & P_{1n-1}-\alpha_n(P_{2n-2}-\alpha_n(\dots-\alpha_n(P_{n-11}-\alpha_n)\dots)) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_1(P_{n-11}-\alpha_1) & \dots & -\alpha_1(P_{2n-2}-\alpha_1(\dots-\alpha_1(P_{n-11}-\alpha_1)\dots)) \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_2(P_{n-11}-\alpha_2) & \dots & -\alpha_2(P_{2n-2}-\alpha_2(\dots-\alpha_2(P_{n-11}-\alpha_2)\dots)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -\alpha_n & -\alpha_n(P_{n-11}-\alpha_n) & \dots & -\alpha_n(P_{2n-2}-\alpha_n(\dots-\alpha_n(P_{n-11}-\alpha_n)\dots)) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & (-1)^{n-1}\alpha_1^{n-1} \\ 1 & -\alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & (-1)^{n-1}\alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -\alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & (-1)^{n-1}\alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)$$

e quindi per le nostre ipotesi è certamente $\neq 0$. Le derivate di ordine $n-1$ si esprimeranno quindi linearmente per le derivate di ordine $< n-1$ e per le $R_i^{(n-1)} z$, ed i coefficienti di queste espressioni lineari saranno frazioni il cui numeratore è un polinomio nelle α_i e nelle loro derivate dei primi $i-1$ ordini ed il denominatore è precisamente il determinante scritto sopra: e quindi sono tutti inferiori ad un numero che dipende da M e μ soltanto. Onde risulta pienamente dimostrata la nostra asserzione.

2. Mi preme di rilevare due fatti che incidentalmente risultano da quanto precede.

Presa una funzione z di cui si ammette a priori che esistano le derivate di ordine $\leq s$, si possono formare le $R^{(h)} z$ per $h \leq s$. Ma come già si è notato, le derivate di ordine s si possono esprimere linearmente per le $R^{(h)} z$ con $h \leq s$, le quali *non contengono* le operazioni $X_1, X_2, \dots X_{n-s-1}$; e di più i coefficienti dipendono soltanto dalle α_{n-s+j} $(j = 0, 1, \dots, s)$ e dalle loro derivate di ordine j. Quindi in particolare questi coefficienti ammettono tutti le derivate dei primi $n-s$ ordini.

Inoltre, si supponga di sapere che tutte le $R^{(h)} z$ per $h \leqq s$ sono inferiori in modulo ad una quantità (numero o funzione) positiva P_s; noi possiamo allora, per quanto precede, dire che si può trovare *un numero ν_s dipendente da s, M, μ soltanto — e per nulla dipendente da P_s* — tale che sia

$$p_{ik} < \nu_s P_s \quad (i + k = s). \tag{5}$$

3. La trasformazione dell'equazione (1) nella (3) di cui abbiamo parlato fin qui è una trasformazione di carattere puramente formale: *ammesso che la z abbia le derivate dei primi n ordini*, si può passare sia dalla (1) alla (3), sia dalla (3) alla (1). Ma nel § III della nota precedente noi siamo riusciti a dimostrare che la soluzione z della (3) da noi trovata è tale che su di essa si può operare colle operazioni $R^{(h)}$, colla $X_1 X_2 \ldots X_n$, ed anche (n. 5 del § III) colle operazioni che si ottengono scambiando nelle $R^{(h)}$ i due primi fattori, e che queste funzioni risultano tutte funzioni continue; ma non abbiamo affatto provato che la funzione z ammetta realmente le derivate dei primi n ordini, onde noi non possiamo dire che realmente la z soluzione di (3) soddisfa a (1). Ora io mi propongo di mostrare che effettivamente la z trovata ammette tutte le derivate dei primi $n - 1$ ordini, mentre non si può accertare che la z ammetta le derivate di ordine n: talchè, se ancora non si può dire che la funzione z soddisfaccia ad (1), si può dire tuttavia che essa soddisfa alla (4). Se $n = 2$, la cosa fu da noi dimostrata nei n. 3 e 4 del § II: si tratta di estendere la dimostrazione ad n qualunque.

Ora intanto, siccome si può operare su z sia con X_n che con X_{n-1}, noi deduciamo, per le osservazioni del n. 3 del § II rammentato pur ora, che la z ammette le due derivate prime e che queste si esprimono linearmente per $X_n z$, $X_{n-1} z$ con coefficienti dipendenti da α_n ed α_{n-1} soltanto, e quindi derivabili $n - 1$ volta. Ma queste derivate si possono anche esprimere linearmente per $X_{n-2} z$ ed $X_n z$ con coefficienti dipendenti da α_{n-2} ed α_n, e quindi derivabili $n - 2$ volte almeno: onde presa una qualunque derivata di primo ordine per es.: p_{10} potremo scrivere

$$p_{10} = \gamma_1 X_{n-1} z + \gamma_2 X_n z = \gamma'_1 X_{n-2} z + \gamma'_2 X_n z,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2$ essendo funzioni che tutte ammettono le derivate di ordine $\leq n - 2$.

Ma su z si può operare con $X_{n-2} X_{n-1}$, $X_{n-2} X_n$, $X_{n-1} X_n$ ed anche con $X_{n-1} X_{n-2}$. Quindi è chiaro per quello che precede che su p_{10} si può operare sia con X_{n-2}, sia con X_{n-1}; quindi nuovamente applicando il teorema del n. 3 del § II otterremo che esistono le due derivate prime di p_{10}. Analogamente esistono le due derivate prime di p_{01}, e quindi esistono tutte le derivate seconde di z. E per i risultati dei n. 2 e 3 queste si potranno esprimere linearmente sia per mezzo delle $X_{n-2} X_{n-1} z$, $X_{n-2} X_n z$, $X_{n-1} X_n z$, e delle derivate di primo ordine, sia per mezzo delle $X_{n-3} X_{n-1} z$, $X_{n-3} X_n z$, $X_{n-1} X_n z$ e delle derivate di primo ordine; ed i coefficienti di queste espressioni lineari dipendono da α_{n-3}, α_{n-2}, α_{n-1}, α_n e dalle derivate prime di α_{n-1}, α_n e quindi ammettono le derivate almeno dei primi $n-3$ ordini. Si avrà ad es.

$$p_{20} = \gamma_1 X_{n-2} X_{n-1} z + \gamma_2 X_{n-2} X_n z + \gamma_3 X_{n-1} X_n z + \dots$$
$$= \gamma'_1 X_{n-3} X_{n-1} z + \gamma'_2 X_{n-3} X_n z + \gamma'_3 X_{n-1} X_n z + \dots;$$

dove i termini tralasciati dipendono solo da derivate di ordine inferiore, e le γ_1, γ_2, γ_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3, come pure i coefficienti dei termini tralasciati, ammettono tutte le derivate dei primi $n-3$ ordini.

Così si potrà procedere: supponiamo dimostrato che le z ammettono le derivate dei primi $n-i$ ordini e che una qualunque di queste $p_{n-k-i,k}$ si può esprimere nella forma

$$p_{n-k-i,k} = \gamma_1 X_i X_{i+1} \dots X_{n-1} z + \gamma_2 X_i X_{i+1} \dots X_{n-2} X_n z + \dots$$
$$+ \gamma_{i+1} X_{i+1} X_{i+2} \dots X_{n-1} X_n z + \dots =$$
$$= \gamma'_1 X_{i-1} X_{i+1} \dots X_{n-1} z + \gamma'_2 X_{i-1} X_{i+1} \dots X_{n-2} X_n z +$$
$$+ \dots + \gamma'_{i+1} X_{i+1} X_{i+2} \dots X_{n-1} X_n z + \dots$$

i termini tralasciati essendo di ordine inferiore e le γ, γ' ammettendo le derivate dei primi $i-1$ ordini. Siccome su z si può operare sia colle $X_{i-1} X_i X_{i+1} \dots X_{n-1}, \dots, X_{i-1} X_{i+1} \dots X_{n-1} X_n$, che colle $X_i X_{i-1} X_{i+1} \dots X_{n-1}, \dots, X_i X_{i+1} \dots X_{n-1} X_n$, ottenendone sempre funzioni continue, seguirà che sulla $p_{n-k-i,k}$ si può operare sia con X_{i-1} che con X_i e ancora che $p_{n-k-i,k}$ ammette le derivate prime. E la z ammetterà dunque le derivate di ordine $n-i+1$ e per i risultati dei numeri precedenti si potrà di nuovo esprimere queste derivate per le $R_{(h)}$ con $h < n-i+1$ che non contengono $X_1, X_2, \dots X_{i-2}, X_{i-1}$ o che non contengono $X_1, X_2, \dots X_{i-2}, X_i$ e con coefficienti derivabili tutti $i-2$ volte almeno. Per tal via si conchiude così dai teoremi del § III che effettivamente esistono le derivate dei primi $n-1$ ordini della z.

4. Raccogliendo da quanto precede, possiamo quindi enunciare nel modo seguente il risultato fondamentale del § III.

Data una equazione alle derivate parziali del tipo (4), *supposte soddisfatte nel campo δ le solite ipotesi circa alle funzioni α_i, ed alle* $\beta_{lm}(x\,y)$, $a\,(x\,y)$, $f\,(x\,y)$, — *nel campo* δ_1 (che è rappresentato dal massimo rombo contenuto in δ avente una diagonale sull'asse delle y e coi lati paralleli alle rette di coefficiente angolare M e $-M$) *esiste una ed una sola funzione z, che ammette le derivate dei primi $n-1$ ordini, e su cui inoltre si può operare con $X_1\,X_2 \dots X_n$, che è nulla sull'asse delle y colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini e che soddisfa all'equazione* (4). *Esiste inoltre un numero $\varkappa_n$ dipendente soltanto da M, ν, $\mathfrak{M}'_1$ — e quindi, in ultima analisi, solo dai numeri M, ν, $\mathfrak{M}_1$ relativi alla* (1) — *e nulla affatto da F e da t, tale che si ha*

$$\left.\begin{array}{l} z < \varkappa_n \dfrac{1}{t+1} F\,x^{t+n}, \; |\,p_{10},\, p_{01}\,| < \varkappa_n \dfrac{1}{t+1} F\,x^{t+n-1}, \dots, \\[2ex] p_{n-k-ik} < \varkappa_n \dfrac{1}{t+1} F\,x^{t+i} \dots \; p_{n-k-1k} < \varkappa_n \dfrac{1}{t+1} F\,x^{t+1}. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Il numero $\varkappa_n(M, \nu, \mathfrak{M}'_1)$ non è altro che il prodotto del massimo dei numeri $\varkappa_{n-i}(M, \nu)$ dalla formula (5) per il numero $K_n\,(M, \nu, M_1)$ definito al § III, relativo al numero $M_1\,(M, \nu, \mathfrak{M}'_1)$ che si ottiene come massimo dei coefficienti $b_{i_1 i_2 \dots i_n}$ della (3) nel passare da (4) a (3).

5. Quando l'equazione sia a caratteristiche multiple, il supporre che essa si possa ridurre alla forma

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{\tau_1}\,X_2^{\tau_2} \dots X_m^{\tau_m}\,z = \sum b_{i_1 i_2 \dots i_m}\,X_1^{i_1}\,X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m}\,z + f\,(x\,y) \\ (0 \leq i_j \leq \tau_j\,,\; i_1 + i_2 + \dots + i_m < n,\; \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_m = n,\; X_j^0 = I) \end{array}\right\} \qquad (7)$$

induce delle vere limitazioni alla forma dell'equazione primitiva: nè è qui il caso di scrivere le relazioni tra i coefficienti a_{lm} e le radici α dell'equazione (2) che debbono perciò essere soddisfatte: relazioni del resto tutt'altro che semplici.

Noterò che tali limitazioni nel caso delle caratteristiche multiple sono realmente insite nella natura della questione. Poichè *il problema di Cauchy non è generalmente risolubile quando esse non siano soddisfatte*. È noto infatti che il problema di Cauchy non è sempre risolubile per le equazioni di tipo parabolico del secondo ordine: così ad es. non è possibile trovare una soluzione della equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ tale che la $\frac{\partial z}{\partial x}$ si annulli (o sia analitica) sull'asse delle y, mentre la z ammetta le derivate dei primi m ordini, ma non le derivate di ordine $m+1$, m essendo un numero arbitrario (*). Ciò posto è facile trarre da questo esempio altri esempi di equazioni di ordine qualunque colle caratteristiche reali e di cui almeno due coincidano, per cui il problema di Cauchy non ammetta in generale soluzione. Così ad es. si consideri l'equazione di ordine n

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_{n-2} \frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y}\right] = 0 \quad (8)$$

le a_i essendo funzioni di $x\,y$, distinte o no, ammettenti le derivate dei primi i ordini. È questa una equazione con due sistemi di caratteristiche coincidenti nelle parallele all'asse delle x, e gli altri sistemi di caratteristiche dati dagli $n-2$ sistemi, distinti o no, di curve definite dalle $\frac{d\,y}{d\,x} = a_i$. Ora è ben chiaro che se chiamiamo $\varphi(y)$ la funzione cui deve ridursi la z sull'asse delle y e chiediamo che si abbia inoltre sull'asse medesimo

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \varphi'(y), \quad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\right)_{x=0} = \varphi''(y) \ldots (9)$$

la soluzione di (8) che soddisfa alle (9) deve, se esiste, soddisfare all'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Poichè, posto $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = \zeta(x\,y)$, la funzione ζ dovrà soddisfare alla equazione pura $\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)$ $\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x} + a_{n-2} \frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta = 0$ ed annullarsi colle sue deri-

(*) Cfr. LEVI E. E., *Sul problema di Cauchy* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XVI, 2° sem. 1907). Altri casi di impossibilità erano stati dati prima dal sig. HOLMGREN in una memoria che non conoscevo al momento della pubblicazione di quella nota: (*Om Cauchy's problem vid de lineära etc.* Arkiv für Matemat. k. Astronomi och Fysik, Bd. II 1906): anche da quelli sarebbe agevole dedurre dei casi di impossibilità per la (8).

vate di ordine $\leqq n-3$ sull'asse delle y. Quindi per i nostri studi del § III, ζ deve essere identicamente nulla. Onde basta supporre che $\zeta(y)$ non ammetta tutte le derivate perchè per la $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial y}$, e quindi nemmeno per la (8) coi dati iniziali (9), il problema di Cauchy non si possa risolvere.

Anche per le equazioni a caratteristiche multiple si presenta la domanda: ammesso che all'equazione si possa attribuire la forma (7) e quindi si possa applicare il teorema del n. 4. § III, qual è l'ordine massimo delle derivate di z di cui si può assicurare l'esistenza? È chiaro intanto che le derivate di ordine $\leqq m-1$ di z esistono tutte, poichè su z si può operare con $X_1\, X_2 \ldots X_m$ e colle operazioni di ordine $<m$ formate coi simboli medesimi. Ma si può dire di più: seguendo una via perfettamente analoga a quella tenuta nel n. 3 si può dimostrare che esistono certamente tutte le derivate di ordine $\leqq n-\tau$, τ indicando il massimo dei numeri $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m$.

La dimostrazione di questo teorema si compie per induzione completa e solo, se si vuol restare nelle nostre ipotesi quanto ai coefficienti $\varkappa$, richiede alcuna cura nei particolari relativi alle espressioni che successivamente si trovano per le derivate dei vari ordini.

§ V.

1. Un artificio assai semplice ci permetterà ora infine di dimostrare che, aggiungendo alcune nuove ipotesi per le funzioni $\varkappa, a, f$, la soluzione dell'equazione (4) [o (1)] del § IV ammette anche tutte le derivate di ordine n; e più in generale di trovare tali condizioni che, quando esse sono soddisfatte, si può assicurare l'esistenza delle derivate di ordine $n+g-1$ $(g \geqq 0)$ per le soluzioni delle equazioni medesime. Mi limiterò al caso che l'equazione

$$p_{n0}-P_{n-1\,1}\,p_{n-1\,1}+\ldots+P_{0n}\,p_{0n}=\sum a_{lm}\,p_{lm}+a(x\,y)\,z+f(x\,y) \qquad (1)$$

abbia le caratteristiche distinte. Supponiamo che nel solito campo $\mathfrak{C}$, $a_{lm}(x\,y)$ $a(x\,y)$ ed $f(x\,y)$ abbiano le derivate dei primi g ordini: e che le $\varkappa_i(x\,y)$ oltre al soddisfare le solite condizioni ammettano tutte le derivate almeno dei primi g ordini (e cioè che le $\varkappa_i$ per $i\leqq g$ ammettano le derivate dei primi g ordini, e le

α_i per $i > g$ ammettano le derivate dei primi i ordini). E supponiamo che ancora sia μ il massimo di $\dfrac{1}{\alpha_i - \alpha_j}$, M il massimo modulo delle α_i e delle derivate di esse di cui si ammise l'esistenza, $\mathfrak{M}_1$ il massimo modulo di $a_{lm}(x\,y)$, $a(x\,y)$ e delle loro derivate di ordine $\leqq g$, ed infine supponiamo che F, F_1, $F_2 \ldots F_g$ sia una successione di numeri positivi (e non mai decrescenti) e che t, t_1, $t_2 \ldots t_g$ sia una successione di numeri positivi o nulli (e non crescenti) tali che f e le sue derivate dei primi j ordini siano inferiori ad $F_j\,|x|^{t_j}$.

Da queste ipotesi segue che anche le $P_{n-1\,1} \ldots P_{0n}$ hanno tutte le derivate dei primi g ordini e tutte inferiori ad un numero dipendente da M soltanto.

Ciò posto, si prendano g numeri diversi $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots \alpha_{n+g}$ tutti differenti per più di $\dfrac{1}{\mu}$ e appartenenti all'intervallo $-M \ldots +M$ e tali che ancora si abbia in δ $\dfrac{1}{|\alpha_j - \alpha_{n+i}|} < \mu$; ciò si potrà fare certamente sostituendo, ove occorra, ad M il numero $M + \dfrac{g}{2}\,\mu$.

Se noi deriviamo (totalmente) il primo membro dell'equazione (1) secondo la direzione di coefficiente angolare α_{n+1} considerando la z quale funzione di x ed y, otteniamo per la z un'equazione lineare nelle derivate di ordine $n+1$

$$\left.\begin{aligned} & p_{n+1\,0} + (P_{n-1\,1} + \alpha_{n+1})\,p_{n1} + \ldots + (P_{0n} + \alpha_{n+1} P_{1\,n-1})\,p_{1n} + \\ & \quad + \alpha_{n+1} P_{0n}\,p_{0\,n+1} = \sum_{l+m<n+1} a^{(1)}_{lm}\,p_{lm} + a^{(1)} z + \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_{n+1} \frac{\partial f}{\partial y}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

dove le $a^{(1)}_{lm}$, $a^{(1)}$ sono combinazioni lineari delle a_{lm}, a, delle loro derivate prime e delle derivate prime delle P_{ik} a coefficienti dipendenti da α_{n+1}. Ed è chiaro che risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (1) sotto la condizione che sull'asse delle y siano zero la z e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini, equivale al risolvere il problema di Cauchy per (2) sotto la condizione che siano ancora nulle sull'asse delle y la z e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini e che sia $\left(\dfrac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_{x=0} = f(0\,y)$, come si ricava da (1).

Operando su (2) in modo analogo a quanto si fece su (1), e cioè derivando totalmente secondo la direzione di coefficiente angolare

α_{n+2}, si otterrà un equazione analoga di ordine $n+2$, e così procedendo, derivando totalmente rapporto alle direzioni di coefficienti angolari $\alpha_{n+3}, \ldots \alpha_{n+g}$, si giungerà infine ad una equazione di ordine $n+g$ cui deve soddisfare la z.

E viceversa la z sarà pienamente determinata dalle condizioni di soddisfare a questa equazione di ordine $n+g$, di annullarsi sull'asse delle y colle sue derivate di ordine $\leqq n-1$, e di avere le derivate di ordine $n, n+1, \ldots n+g-1$ soddisfacenti sull'asse delle y alle equazioni (1), (2) ecc.

Le radici dell'equazione delle caratteristiche, corrispondente all'equazione di ordine $n+g$ così dedotta, sono precisamente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+g}$, e poichè le prime n di queste α_i ammettono tutte le derivate di ordine $\leqq i$ e le ultime sono costanti, saranno soddisfatte le condizioni da noi imposte alle α perchè i teoremi del § III e del § IV (n. 4) siano applicabili. Analogamente i coefficienti delle derivate di ordine $< n+g$ saranno combinazioni lineari dei coefficienti $a_{lm}(xy)$, $a(xy)$, delle loro derivate di ordine $\leqq g$, delle derivate di ordine $\leqq g$ delle P_{lm} con coefficienti polinomi nelle $\alpha_{n+1} \ldots \alpha_{n+g}$, e quindi saranno tutte inferiori ad un numero $\mathfrak{M}_1$ funzione di M ed $\mathfrak{M}_1$ soltanto.

Per applicare quindi il nostro teorema all'equazione di ordine $n+g$ così dedotta, e provare per tal modo secondo il n. 4 del § IV l'esistenza delle derivate di ordine $n+g-1$ di z, non occorre più che studiare i dati iniziali.

Facciamo per fissare le idee $g=1$. Possono darsi due casi, o è $t>0$ od è $t=0$. Se $t>0$, $f(xy)$ si annulla sull'asse delle xy, ed allora per quanto si disse basterà cercare ancora la funzione z la quale soddisfa ad (1) ed è nulla sull'asse delle y insieme colle sue derivate dei primi n ordini. La z ammetterà quindi pel teorema del n. 4 del § IV le derivate dei primi n ordini: e poichè

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_{n+1} \frac{\partial f}{\partial y} \right| < F_1 \, |x|^{t_1} \, (1+M) \tag{3}$$

si avrà che le derivate di ordine n soddisfanno ad una limitazione del tipo

$$|p_{in-i}| < \bar{\alpha}_n^{(1)} \frac{1}{t_1+1} F_1 \, |x|^{t_1+1} \tag{4}$$

$\bar{\alpha}_n^{(1)}$ *essendo come* $\bar{\alpha}_n$ *un numero dipendente solo da* $M, \nu, \mathfrak{M}_1, n$ e non da F, F_1, t, t_1.

Supponiamo $t=0$ e quindi pure $t_1=0$: allora in generale la p_{n0} determinata mediante la (1) non si annullerà più per $x=0$, e quindi non potremo applicare più il nostro teorema. Ma è facile provare che si può allora trovare una funzione u che ammette tutte le derivate di ordine $\leqq n+1$, si annulla sull'asse delle y insieme colle sue derivate di ordine $n-1$, mentre soddisfa alla condizione $\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_{x=0} = f(0y)$: ed inoltre tale che in tutto δ si ha

$$\left.\begin{array}{c} |u| < \gamma_n F|x|^n, \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right] < \gamma_n F|x|^{n-1}, \ldots \\ \ldots \left[\left|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|, \left|\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}\right|, \ldots\right] < \gamma_n F, \\ \left[\left|\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}\right|, \left|\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^n \partial y}\right|, \ldots\right] < \gamma_n F_1 \end{array}\right\} \quad (5)$$

γ_n indicando un numero che dipende da n soltanto, e non da F, F_1.

Dimostreremo più minutamente nel § VI questa proposizione. Ammettiamola per un momento. Considerando allora la funzione $\zeta = z - u$, otteniamo che la ζ soddisfa ad una equazione affatto analoga alla (2) cui soddisfa z, colla differenza che in questa occorre pensare al termine noto sostituita una nuova funzione $\varphi(xy)$; sarà:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(xy) = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_{n+1}\frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{l+m \leqq n-1} a^{(1)}_{lm} \frac{\partial^{l+m} u}{\partial x^l \partial y^m} + a^{(1)} u - \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} - \\ \quad - \ldots - (P_{0n} + \alpha_{n+1} P_{1n-1}) \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x \partial y^n} - \alpha_{n+1} P_{0n} \frac{\partial^{n+1} u}{\partial y^{n+1}}. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Sarà quindi ricordando che $F \leqq F_1$, $|x| < 1$ e le (5)

$$|\varphi(xy)| < \rho^{(1)}_n F_1 \qquad (7)$$

$\rho^{(1)}_n$ indicando un numero dipendente soltanto da n, M, $\mathfrak{M}_1$. Di più la ζ si deve annullare sull'asse delle y insieme colle sue derivate dei primi n ordini: applicando quindi il nostro teorema otteniamo che la ζ ammette realmente le derivate di ordine $\leqq n$ e che si ha

$$\left[\left|\frac{\partial^n \zeta}{\partial x^n}\right|, \left|\frac{\partial^n \zeta}{\partial x^{n-1}\partial y}\right|, \ldots\right] < \bar{\alpha}^{(1)}_n F_1 |x| \qquad (8)$$

$\bar{\alpha}^{(1)}_n$ indicando ancora un numero dipendente solo da M, ν, $\mathfrak{M}_1$, n.

Segue da (5) ed (8) ricordando che $z = \zeta + u$, che anche z ammette le derivate dei primi n ordini e queste soddisfanno ad una limitazione del tipo

$$p_{n-ii} < \bar{\bar{\varkappa}}_n^{(1)} F_1(x) + \gamma_n F. \tag{9}$$

Raccogliendo assieme le due disuguaglianze (9) e (4), possiamo dire che in queste ipotesi la z ammette le derivate di ordine n, e che queste soddisfanno ad una limitazione della forma

$$p_{n-ii} < \varkappa_n^{(1)} \left(\frac{1}{t_1+1} F_1(x)^{t_1+1} + F(x)^{t} \right) \tag{10}$$

$\varkappa_n^{(1)}$ essendo un numero perfettamente definito in funzione di n, M, μ, $\mathfrak{M}_1$ soltanto $\left(\varkappa_n^{(1)}\right.$ è il massimo dei numeri $\bar{\varkappa}_n^{(1)}$, $\bar{\bar{\varkappa}}_n^{(1)}$, $\left.\gamma_n\right)$.

Analogamente si tratta il caso di $g > 1$. Se $t > 0$, si procede su (2) come pur ora su (1). Se $t = 0$, si comincierà coll'osservare che, come si dimostrerà nel § VI, la funzione u, di cui sopra si è affermata l'esistenza, ammette in tal caso le derivate degli $n + g$ primi ordini e che queste soddisfanno alle (5) ed alle altre limitazioni

$$\left[\frac{\partial^{n+2} u}{\partial x^{n+2}}, \ldots\right] < \gamma_{ng} F_2 \ldots \left[\frac{\partial^{n+g} u}{\partial x^{n+g}}, \ldots\right] < \gamma_{ng} F_g$$

γ_{ng} indicando un numero dipendente da n e g. E che quindi il termine noto $\varphi(xy)$, dato da (6), dell'equazione di ordine $n+1$ cui deve soddisfare la funzione $\zeta = z - u$ ha le derivate dei primi $g-1$ ordini, e soddisfa a limitazioni pienamente analoghe a quelle cui soddisfa $F(xy)$: e quindi quest'equazione per ζ gode di quelle proprietà di cui godeva l'equazione di ordine n primitiva per z, essendo sostituito a g il numero $g-1$. Onde su essa si potrà ragionare in modo analogo a quello tenuto precedentemente. E così procedendo si giungerà infine a conchiudere che la funzione z ammette, nelle ipotesi fatte, le derivate dei primi $n + g - 1$ ordini e che si hanno per essa le limitazioni

$$\left.\begin{aligned}
p_{n-i+1i} &< \varkappa_n^{(2)} \left(\frac{1}{t_2+1} F_2(x)^{t_2+1} + F_1(x)^{t_1} \right) \\
p_{n-i+2i} &< \varkappa_n^{(3)} \left(\frac{1}{t_3+1} F_3(x)^{t_3+1} + F_2(x)^{t_2} \right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_{n-i+g-1i} &< \varkappa_n^{(g)} \left(\frac{1}{t_g+1} F_g(x)^{t_g+1} + F_{g-1}(x)^{t_{g-1}} \right)
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$\varkappa_n^{(2)}, \varkappa_n^{(3)} \ldots \varkappa_n^{(g)}$ indicando numeri dipendenti solo da $n, M, \mu, \mathfrak{M}_1$. E noi potremo quindi infine raccogliere il seguente risultato finale:

Data un'equazione (1) *a caratteristiche reali e tutte distinte, si supponga che in un campo δ contenente un tratto dell'asse delle y ed interno alla striscia $|x| < 1$, i coefficienti a_{lm}, a ammettano le derivate dei primi g ordini continue ed inferiori in modulo ad un certo numero $\mathfrak{M}_1$; e del pari che le radici dell'equazione delle caratteristiche $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ si possano ordinare per modo che mentre tutte ammettono almeno le derivate dei primi g ordini, α_i ammetta le derivate dei primi i ordini e che esse e tutte le loro derivate siano inferiori in modulo ad un numero M: si supponga inoltre che μ sia il massimo di $\dfrac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|}$. Infine si supponga che $f(x\, y)$ ammetta le derivate continue dei primi g ordini e che $F, F_1 \ldots F_g, t, t_1 \ldots t_g$ siano due successioni di numeri positivi o nulli tali che f e le sue derivate dei primi j ordini siano numericamente $< F_j\, |x|^{t_j}$. Nel campo δ_1 definito dal massimo rombo contenuto in δ coi lati paralleli alle rette di coefficiente angolare M e $-M$ e con una diagonale sull'asse delle y, esiste una ed una sola soluzione di* (1) *nulla sull'asse delle y insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini. Essa ammette le derivate dei primi $n+g-1$ ordini e si possono trovare $g+1$ numeri $\varkappa_n\, \varkappa_n^{(1)} \ldots \varkappa_n^{(g)}$ dipendenti soltanto da $n, M, \mu, \mathfrak{M}_1$ tali che*

$$
\left.
\begin{aligned}
&|z| < \varkappa_n \frac{1}{t+1} |x|^{t+n},\ |p_{10}|,\ |p_{01}| < \varkappa_n \frac{1}{t+1} F\, |x|^{t+n-1}, \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots |p_{n-1-ii}| < \varkappa_n \frac{1}{t+1} F\, |x|^{t+1} \\
&|p_{n-ii}| \quad < \varkappa_n^{(1)} \left(\frac{1}{t_1+1} F_1\, |x|^{t_1+1} + F\, |x|^{t} \right), \\
&|p_{n-i+1i}| < \varkappa_n^{(2)} \left(\frac{1}{t_2+1} F_2\, |x|^{t_2+1} + F_1\, |x|^{t_1} \right), \ldots\ldots \\
&|p_{n-i+g-1i}| < \varkappa_n^{(g)} \left(\frac{1}{t_g+1} F_g\, |x|^{t_g+1} + F_{g-1}\, |x|^{t_{g-1}} \right).
\end{aligned}
\right\} \tag{12}
$$

2. Aggiungiamo due osservazioni. Come già al n. 5 del § IV si osservò che si può per le equazioni lineari a caratteristiche multiple della forma (7) di quel n. accertare l'esistenza delle derivate

delle soluzioni z fino ad un certo ordine $n - \tau$, τ indicando il massimo dei numeri $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_m$, così anche per questi ulteriori sviluppi potremmo riferirci alle equazioni di questo tipo. Ed otterremmo che, se si ammettono le ipotesi precedenti fatte per le a, la f e le α, esistono le derivate dei primi $n + g - \tau - 1$ ordini della soluzione z.

In secondo luogo si può osservare che sviluppi assai analoghi a tutti quelli svolti nelle due presenti note varrebbero più in generale per le equazioni lineari nelle sole derivate di ordine massimo a coefficienti funzioni di x ed y soltanto: con questo che se le caratteristiche sono tutte distinte il secondo membro può essere una funzione qualunque delle derivate dei primi $n - 1$ ordini, mentre se le caratteristiche sono multiple, ciò non è, poichè le derivate debbono comparire nel secondo membro solo nelle combinazioni $X_1^{i_1} \ldots X_m^{i_m} z$. Non insisterò su di ciò perchè in un prossimo lavoro tratterò del caso particolarmente importante di un'equazione qualunque, anche non lineare nelle derivate ad ordine massimo, a caratteristiche reali e distinte (*).

§ VI. Nota.

1. Nel n. 1 del § V per dedurre la limitazione (10) è stato necessario affermare l'esistenza di una funzione $u(x\,y)$, la quale si riduce per $x = 0$ ad una funzione $\varphi(y)$ assegnata della y e che se $|\varphi(y)| < F$, $|\varphi'(y)| < F_1$ soddisfi alle (5). Più in generale per dedurre le limitazioni (11) è necessario affermare che data una funzione $\varphi(y)$ la quale ammetta le derivate continue dei primi g ordini e soddisfaccia alle limitazioni

$$|\varphi(y)| < F, \quad |\varphi'(y)| < F_1 \ldots |\varphi^{(g)}(y)| < F_g, \quad F \leq F_1 \leq \ldots \leq F_g \quad (1)$$

esiste una funzione $u_n(x\,y)$, tale che ammette le derivate dei primi $n + g$ ordini, per $x = 0$ si annulla insieme colle sue derivate dei primi $n - 1$ ordini, mentre la $\left(\frac{\partial^n u_n}{\partial x^n}\right)_{x=0} = \varphi(y)$, e che tale fun-

(*) E. E. Levi, *Sul problema di Cauchy per le equazioni a caratteristiche reali e distinte*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, volume XVII, serie 5ª, 1° sem. 1908.

zione u_n soddisfa a limitazioni della forma:

$$\left.\begin{array}{l}
|u_n| < \gamma_{ng} F\,|x|^n, \quad \left[\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right|, \left|\dfrac{\partial u_n}{\partial y}\right|\right] < \gamma_{ng} F\,|x|^{n-1} \ldots \\
\qquad\qquad \ldots \left[\left|\dfrac{\partial^n u_n}{\partial x^n}\right|, \ldots \left|\dfrac{\partial^n u_n}{\partial y^n}\right|\right] < \gamma_{ng} F, \\
\left[\left|\dfrac{\partial^{n+1} u_n}{\partial x^{n+1}}\right|, \ldots \left|\dfrac{\partial^{n+1} u_n}{\partial y^{n+1}}\right|\right] < \gamma_{ng} F_1, \ldots \\
\qquad\qquad \ldots \left[\left|\dfrac{\partial^{n+g} u_n}{\partial x^{n+g}}\right|, \ldots \left|\dfrac{\partial^{n+g} u_n}{\partial y^{n+g}}\right|\right] < \gamma_{ng} F_g .
\end{array}\right\} \tag{2}$$

γ_{ng} essendo un numero dipendente soltanto da n e g.

Verrebbe naturale assumere come funzione u_n la funzione $V_n = \dfrac{\varphi(y)}{n!}\, x^n$, ma questa funzione tosto che $n > 0$ (e cioè tosto che per $x = 0$ sono assegnati i valori non nulli per una derivata e non per la funzione medesima) non ammette tutte le derivate richieste, ma solo alcune di esse.

Procediamo perciò con un'operazione di media affatto analoga a quella usata da mio fratello Beppo Levi nelle sue ricerche sul principio di Dirichlet (*); qui essa assume forma assai semplice.

Supporremo, e ciò si può sempre fare convenientemente prolungando la funzione, che la funzione $\varphi(y)$ sia definita in tutti i punti dell'asse delle y, avendo sempre le derivate dei primi g ordini soddisfacenti ad (1). Ciò posto si costruisca la funzione

$$\varphi_1(x\, y) = \int_y^{y+x} \varphi(\eta)\, d\eta = \frac{1}{x} \int_y^{y+x} d\eta \int_0^x \varphi(\eta)\, d\xi \tag{3}$$

La funzione $\varphi_1(x\, y)$ ammette le derivate fino all'ordine $g + 1$ rapporto ad x ed y, e si ha

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \varphi(x+y), & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \varphi(x+y) - \varphi(y) \\
\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x\, \partial y} = \varphi'(y+x), & \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \varphi'(x+y) - \varphi'(y) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial^{g+1} \varphi_1}{\partial x^{g+1}} = \ldots \dfrac{\partial^{g+1} \varphi_1}{\partial x\, \partial y^g} = \varphi^{(g)}(y+x), & \dfrac{\partial^{g+1} \varphi_1}{\partial y^{g+1}} = \varphi^{(g)}(x+y) - \varphi^{(g)}(y).
\end{array}\right\} \tag{4}$$

(*) BEPPO LEVI, *Sul principio di Dirichlet*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1906). Tomo XXII. Cfr. specialmente il § 5: *Un'operazione funzionale: l'operazione di media.*

E quindi segue

$$\left.\begin{array}{l} |\varphi_1| < F\,x\,, \left[\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right|\right] < 2\,F, \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \dots \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}\right] < 2\,F_1, \\ \qquad\qquad \dots \left[\frac{\partial^{g+1} \varphi_1}{\partial x^{g+1}} \dots\dots \frac{\partial^{g+1} \varphi_1}{\partial y^{g+1}}\right] < 2\,F_g \\ \varphi_1(0\,y) = 0, \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_0 = \varphi(y), \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\right)_0 = \varphi'(y) \dots \left(\frac{\partial^{g+1} \varphi_1}{\partial x^{g+1}}\right)_0 = \varphi^{(g)}(y). \end{array}\right\} \quad (5)$$

Quindi qualora fosse $n = 1$, la $\varphi_1(y)$ potrebbe assumersi quale funzione u_1: basterebbe fare $\gamma_{1g} = 2$.

Per passare al caso di n qualunque si supponga di conoscere u_{n-1}: dimostreremo che si può prendere $u_n = \frac{1}{x} \int_y^{y+x} d\,\eta \int_0^x u_{n-1}(\xi\,\eta)\,d\,\xi$, che cioè u_n si ottiene da u_{n-1} come φ_1 da φ. Studiamo meglio perciò le due operazioni di integrazione scritte sopra.

2. Si abbia una funzione $\psi(x\,y)$ la quale ammetta le derivate dei primi $h + g$ ordini e soddisfaccia a limitazioni del tipo

$$\left.\begin{array}{l} |\psi| < q\,|x|^h, \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right] < q\,|x|^{h-1}, \dots \left[\frac{\partial^h \psi}{\partial x^h} \dots \frac{\partial^h \psi}{\partial y^h}\right] < q \\ \left[\frac{\partial^{h+1} \psi}{\partial x^{h+1}} \dots\dots \frac{\partial^{h+1} \psi}{\partial y^{h+1}}\right] < q_1, \dots \left[\frac{\partial^{h+g} \psi}{\partial x^{h+g}} \dots \frac{\partial^{h+g} \psi}{\partial y^{h+g}}\right] < q_g \\ \qquad\qquad q < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_g \end{array}\right\} \quad (6)$$

nel quale rientrano appunto le (2). La funzione

$$\psi_1(x\,y) = \int_0^x \psi(\xi\,y)\,d\,\xi \qquad (7)$$

ammette tutte le derivate dei primi $h + g + 1$ ordini fatta eccezione al più per $\frac{\partial^{h+g+1} \psi}{\partial y^{h+g+1}}$ e si ha per essa:

$$
\left.
\begin{array}{l}
|\psi_1| < q\,|x|^{h+1}, \left[\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}, \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}\right] < q\,|x|^{h} \dots \\
\qquad\qquad \dots \left[\dfrac{\partial^h\psi_1}{\partial x^h} \dots \dfrac{\partial^h\psi_1}{\partial y^h}\right] < q\,|x| \\
\left[\left|\dfrac{\partial^{h+1}\psi_1}{\partial x^{h+1}}\right|, \dfrac{\partial^{h+1}\psi_1}{\partial x^h\,\partial y}, \dots \dfrac{\partial^{h+1}\psi_1}{\partial x\,\partial y^h}\right] < q_1, \left|\dfrac{\partial^{h+1}\psi_1}{\partial y^{h+1}}\right| < q_1\,|x| \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left[\left|\dfrac{\partial^{h+g}\psi_1}{\partial x^{h+g}}\right|, \dots \dfrac{\partial^{h+g}\psi_1}{\partial x\,\partial y^{h+g-1}}\right] < q_{g-1}, \left|\dfrac{\partial^{h+g}\psi_1}{\partial y^{h+g}}\right| < q_g\,|x| \\
\left[\left|\dfrac{\partial^{h+g+1}\psi_1}{\partial x^{h+g+1}}\right|, \dfrac{\partial^{h+g+1}\psi_1}{\partial x^{h+g}\,\partial y}, \dots \dfrac{\partial^{h+g+1}\psi_1}{\partial x\,\partial y^{h+g}}\right] < q_g.
\end{array}
\right\} \quad (8)
$$

Inoltre si ha

$$
\left.
\begin{array}{l}
\left(\dfrac{\partial^i\psi_1}{\partial x^i}\right)_{x=0} = \left(\dfrac{\partial^{i-1}\psi}{\partial x^{i-1}}\right)_{x=0} \quad (i = 1, 2 \dots h+g+1) \\
\left(\dfrac{\partial^{i+k}\psi_1}{\partial x^i\,\partial y^k}\right)_{x=0} = 0 \quad (i+k \leqq h+1,\ k \gtrless 0)
\end{array}
\right\} \quad (9)
$$

La dimostrazione si compie immediatamente: basta eseguire le derivazioni:

$$
\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \psi(x\,y), \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = \int_0^x \frac{\partial\psi(\xi\,y)}{\partial y}\,d\xi. \tag{10}
$$

Dalla prima seguono le (9) e quelle delle (8) che si riferiscono a derivate contenenti una derivazione almeno fatta rapporto ad x: dalla seconda le residue (8).

Noi vediamo così che, se la funzione ψ fosse la u_h, la ψ_1 data da (7) soddisferebbe già a quasi tutte le condizioni richieste per u_{h+1}: poichè la prima delle (9) ci dà che essa si riduce per $x = 0$ alle funzioni assegnate: le (8) poi ci dicono che le derivate le quali contengono almeno una derivazione rapporto ad x soddisfanno alle limitazioni imposte: e le sole condizioni le quali non sono soddisfatte sono quelle relative alle derivate rapporto ad y soltanto.

Per ovviare a questo inconveniente sostituiremo alla ψ_1 *la funzione che dà la media dei valori di* ψ_1 *nel tratto* $(x\,y) \dots (x, y+x)$: essa è

$$
\psi_2(x\,y) = \frac{1}{x}\int_y^{y+x} \psi_1(x\,\eta)\,d\eta. \tag{11}
$$

Dico che se ψ_1 soddisfa le (8) (9), la ψ_2 ammette tutte le derivate di ordine $\leqq h + g + 1$ e soddisfa alle limitazioni

$$\left.\begin{aligned}
&|\psi_2| < c_{hg}\, q\, |x|^{h+1}, \quad \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right] < c_{hg}\, q\, |x|^{h} \ldots \\
&\qquad \ldots \left[\frac{\partial^{h+1} \psi_2}{\partial x^{h+1}}, \ldots \frac{\partial^{h+1} \psi_2}{\partial y^{h+1}} \right] < c_{hg}\, q \\
&\left[\frac{\partial^{h+2} \psi_2}{\partial x^{h+2}}, \ldots \frac{\partial^{h+2} \psi_2}{\partial y^{h+2}} \right] < c_{hg}\, q_1 \ldots \\
&\qquad \ldots \left[\frac{\partial^{h+g+1} \psi_2}{\partial x^{h+g+1}}, \ldots \frac{\partial^{h+g+1} \psi_2}{\partial y^{h+g+1}} \right] < c_{hg}\, q_g
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

c_{hg} essendo una costante dipendente da h soltanto e da g. E di più si ha

$$\left(\frac{\partial^i \psi_2}{\partial x^i} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^i \psi_1}{\partial x^i} \right)_{x=0} (i = 1 \ldots h + 1). \tag{13}$$

La prima delle (12) è evidente purchè $c_{hg} > 1$.

Cominciamo colle derivate rapporto ad x. Si ha

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \frac{1}{x} \int_y^{y+x} \frac{\partial \psi_1 (x \eta)}{\partial x} d\eta + \frac{1}{x} \left\{ \psi_1 (x, y + x) - \frac{1}{x} \int_y^{y+x} \psi_1 (x \eta)\, d\eta \right\}. \tag{14}$$

Donde segue intanto, poichè $\left| \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right| < q\, |x|^h$, $|\psi_1| < q\, |x|^{h+1}$,

$$\left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right| < 3\, q\, |x|^h. \tag{15}$$

Se $h = 0$, questa si riduce alla forma $\left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right| < 3\, q$.

Se $h + g \geqq 1$, esiste $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$ e quindi la (14) si può trasformare integrando per parti l'ultimo termine; otterremo:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \frac{1}{x} \int_y^{y+x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} d\eta - \frac{1}{x^2} \int_y^{y+x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} (\eta - y)\, d\eta. \tag{16}$$

E allora si può derivare questa espressione di $\frac{\partial \psi_2}{\partial x}$ come si è derivata la ψ_2 medesima: e così procedere via via. Se scriviamo per brevità $J_l\,\chi = \dfrac{1}{x^{l+1}}\displaystyle\int_y^{y+x} \chi\,(x\,\eta)\;(\eta-y)^l\,d\eta$ otterremo

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = J_0\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) + J_1\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = J_0\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}\right) + 2J_1\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\,\partial y}\right) +$$

$$+\frac{1}{x}\left\{\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\,x - \frac{2}{x}\int_y^{y+x}\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}\,(\eta - y)\,d\eta\right\}$$

$$= J_0\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}\right) + 2J_1\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\,\partial y}\right) + J_2\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}\right)$$

. . . .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{h+g} \psi_2}{\partial x^{h+g}} &= J_0\left(\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial x^{h+g}}\right) + (h+g)\,J_1\left(\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial x^{h+g-1}\,\partial y}\right) + \\
&+\binom{h+g}{2}J_2\left(\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial x^{h+g-2}\,\partial y^2}\right) + \ldots + (h+g)\,J_{h+g-1}\left(\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial x\,\partial y^{h+g-1}}\right) + \\
&+\frac{1}{x^{h+g}}\left\{\frac{\partial^{h+g-1} \psi_1}{\partial y^{h+g-1}}\,x^{h+g-1} - \frac{h+g}{x}\int_y^{y+x}\frac{\partial^{h+g-1} \psi_1}{\partial y^{h+g-1}}\,(\eta-y)^{h+g-1}\,d\eta\right\} = \\
&= J_0\left(\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial x^{h+g}}\right) + (h+g)\,J_1\left(\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial x^{h+g-1}\,\partial y}\right) + \ldots + \\
&+ (h+g)\,J_{h+g-1}\left(\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial x\,\partial y^{h+g-1}}\right) + J_{h+g}\left(\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial y^{h+g}}\right).
\end{aligned} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{h+g+1} \psi_2}{\partial x^{h+g+1}} &= J_0\left(\frac{\partial^{h+g+1} \psi_1}{\partial x^{h+g+1}}\right) + (h+g+1)\,J_1\left(\frac{\partial^{h+g+1} \psi_1}{\partial x^{h+g}\,\partial y}\right) + \ldots \\
&\ldots + (h+g+1)\,J_{h+g}\left(\frac{\partial^{h+g+1} \psi_1}{\partial x\,\partial y^{h+g}}\right) + \\
&+\frac{1}{x^{h+g+1}}\left\{\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial y^{h+g}}\,x^{h+g} - \frac{h+g+1}{x}\int_y^{y+x}\frac{\partial^{h+g} \psi_1}{\partial y^{h+g}}\,(\eta-y)^{h+g}\,d\eta\right\}.
\end{aligned}$$

Quest'ultima formula non si può ulteriormente trasformare come le precedenti, poichè non sappiamo se la funzione ψ_1 ammette la $\dfrac{\partial^{h+g+1}\psi_1}{\partial y^{h+g+1}}$. Ad ogni modo dalle prime espressioni che le (17) dànno per le successive derivate segue per le (3) che, se c_{hg} è un numero sufficientemente alto che non sarebbe difficile calcolare, sono certamente soddisfatte le (12) (*). Ed osservando che in generale si ha

$$\lim_{x=0} J_l\,\chi(x\,y) = \lim_{x=0}\frac{1}{x^{l+1}}\int_y^{y+x}\chi(x\,\eta)(\eta - y)^l\,d\eta = \frac{1}{l+1}\chi(0\,y) \qquad (18)$$

si ottiene dalle seconde espressioni che le (17) danno per le $\frac{\partial^i\psi_2}{\partial x^i}$:

$$\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)_{x=0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right)_{x=0} + \left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\right)_{y=0} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)_{x=0}$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial^{h+1}\psi_2}{\partial x^{h+1}}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^{h+1}\psi_1}{\partial x^{h+1}}\right)_{x=0} + \frac{h+1}{2}\left(\frac{\partial^{h+1}\psi_1}{\partial x^h\,\partial y}\right)_{x=0} + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\partial^{h+1}\psi_1}{\partial x\,\partial y^h}\right)_{x=0} + \frac{1}{h+2}\left(\frac{\partial^{h+1}\psi_1}{\partial y^{h+1}}\right)_{x=0}$$

le quali per la seconda delle (9) ci dànno le (13).

Passiamo ad esaminare le residue derivate le quali contengono almeno una derivazione rapporto ad y. Da (11) si ha

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial y} = \frac{1}{x}[\psi_1(x,\ y+x) - \psi_1(x,\ y)] = \frac{1}{x}\int_y^{y+x}\frac{\partial\psi_1(x\,\eta)}{\partial y}\,d\eta. \qquad (20)$$

In altri termini la $\frac{\partial\psi_2}{\partial y}$ si ottiene dalla $\frac{\partial\psi_1}{\partial y}$ colla stessa operazione di media con cui ψ_2 si ottiene da ψ_1. Ma osserviamo le (8),

(*) Si noti che si ha evidentemente se $|\chi| < k|x|^l$

$$|J_l\chi| < \frac{1}{l+1}k|x|^l < k|x|^l.$$

Segue che certamente è sufficiente porre $c_{hg} > 2^{h+g+1}$.

vediamo che la $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$ soddisfa ad una successione di limitazioni affatto analoga a quella cui soddisfa la ψ_1 medesima, quando solo si pensi sostituito $h-1$ ad h se $h>0$, e se $h=0$ si pensi sostituito $g-1$ a g. Se quindi ammettiamo per un momento che le (12) siano dimostrate per tutti i valori di h e g più piccoli di quelli che valgono per ψ_1, la (20) ci permette di dimostrarle nel caso generale. Non resta quindi che da dimostrare le (12) nel caso che $h=0$, $g=0$. Ma allora le (8) diventano

$$|\psi_1| < q\,|x|\,, \quad \left|\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right| < q \tag{21}$$

e basta ricorrere alla prima forma che la (20) ci fornisce per $\frac{\partial \psi_2}{\partial y}$ per riconoscere che $\left|\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right| < 2\,q$.

Onde le (12) restano pienamente dimostrate.

3. Segue da questi studi che, se noi conosciamo la funzione u_{n-1}, la funzione $\frac{1}{x}\int_y^{y+x} d\eta \int_0^x u_{n-1}(\xi\,\eta)\,d\xi$ si può assumere quale funzione u_n e soddisfa alle limitazioni (2) (sarà nelle (2) $\gamma_{ng} = c_{ng}\,\gamma_{n-1g}$). Siccome del resto in principio noi abbiamo appunto costruita la funzione $u_1 = \frac{1}{x}\int_y^{y+x} d\eta \int_0^x \varphi(\eta)\,d\xi = \int_y^{y+x} \varphi(\eta)\,d\eta$, noi possiamo dire che il procedimento precedente ci assicura dell'esistenza della funzione richiesta, e quindi giustifica pienamente tutti gli studi fatti avanti.

Mi si conceda a questo proposito di rilevare come questa costruzione illumini in generale la natura delle condizioni cui debbono soddisfare le funzioni iniziali perchè il problema di Cauchy sia risolubile. L'iniziale trasformazione che, come abbiamo richiamato al n. 2 del § I della nota prima, ci permette di ridurci al caso in cui la funzione cercata si deve annullare colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ sull'asse delle y, consta di due gradi. Prima si porta la curva γ su cui sono dati i valori iniziali della z e delle derivate di ordine $\leq n-1$ a coincidere coll'asse delle y, poi si sostituisce a z la $z + u$, dove è una u funzione che soddisfa alle condizioni iniziali assegnate prima per la z. Da quanto precede risulta che, ammessa fatta la prima di queste trasformazioni, affinchè il problema di Cauchy sia risolubile e la funzione z ammetta le derivate dei primi $n + g - 1$ ordini, basta che l'equazione soddisfaccia alle condizioni da noi imposte nel § IV e che i valori cui si debbono ridurre rispettivamente la z e le derivate prime seconde, ... $n - 1^{\text{esime}}$ della z per $x = 0$, ammettano, considerati come funzioni di y rispettivamente le derivate di ordine $n + g$, $n + g - 1 \ldots g + 1$.

Errata-Corrige alla Nota I.

pag. 127, riga 19: . . . . *una* . . . . *leggi*: . . . . *una ed una* . . . .

» formula (29): $|K_n z| < X_n \frac{1}{t+1} F(x)^{t+n-1}$

leggi: $|X_n z| < K_n \frac{1}{t+1} F(x)^{t+n-1}$

Milano, 1908. — Tipo-Lit. Rebeschini di Turati e C.

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
(ANNO 1907-908)

SUL

PROBLEMA DI FOURIER

NOTA

DEL

Dott. EUGENIO ELIA LEVI, a Pisa

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1908

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
(Anno 1907-908)

SUL

PROBLEMA DI FOURIER

NOTA

DEL

Dott. EUGENIO ELIA LEVI, a Pisa

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1908

Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. XLIII
Adunanza del 26 Gennaio 1908.

Torino — Stabilimento Tipografico **Vincenzo Bona**.

1. — Dato un corpo ed in esso la distribuzione delle sorgenti di calore, il problema più generale della teoria del calore (problema di Fourier) consiste nel determinare la distribuzione delle temperature nei punti del corpo, quando si conosca la distribuzione iniziale delle temperature nei punti del corpo e la distribuzione delle temperature per i successivi valori del tempo nei punti dello spazio ambiente. Analiticamente, se supponiamo che il corpo sia omogeneo e che la conducibilità interna sia costante, il problema, quando si scelgano convenientemente le unità di misura, si traduce nel modo seguente: se il corpo è ad n dimensioni [1], si consideri lo spazio in cui le variabili coordinate sono le variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$ dello spazio in cui è immerso il corpo e la variabile y che rappresenta il tempo, ed in esso il cilindro a generatrici parallele all'asse delle y, il quale ha per base il campo che sull'iperpiano $y = 0$ rappresenta il corpo considerato; si deve trovare una soluzione dell'equazione

$$(1) \qquad \Delta_2 z - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x_1 x_2 \ldots x_n y) \qquad \left(\Delta_2 z = \sum_1^n{}_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\right).$$

che sulla base del cilindro assuma i valori assegnati

$$(2) \qquad z(x_1 x_2 \ldots x_n 0) = f_1(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

e sulla superficie laterale soddisfi alla condizione

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial n} + \kappa z = \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n y).$$

---

[1] Sarà $n = 3$ se si considera un corpo qualunque dello spazio ordinario. Ben sovente però le condizioni di simmetria ed altre analoghe permettono di supporre $n = 1$ od $n = 2$. Perciò ho lasciato nell'enunciato la massima generalità al numero n.

In quest'ultima condizione la derivata rapporto ad n rappresenta la derivata rapporto alla normale al cilindro: il punto $x_1 x_2 \dots x_n$ rappresenta un punto della superficie del corpo (poichè la condizione è da soddisfarsi sui punti della superficie laterale del cilindro); ed infine la κ è una funzione assegnata, sempre finita e continua, che può dipendere dalle x e dalla y. Nel problema fisico $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n y)$ è uguale a $\kappa z_1(x_1 x_2 \dots x_n y)$ dove z_1 rappresenta la temperatura dello spazio ambiente (1). Supporremo che $f(x_1 x_2 \dots x_n y)$ ammetta derivate prime finite (2); $f_1(x_1 \dots x_n)$ e $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n y)$ siano finite e continue: e se si vuole che anche al tempo iniziale non vi siano singolarità per i valori delle derivate di z al contorno del corpo, le supporremo tali che per questi punti le (2) e (3) diano determinazioni concordi.

Il precedente problema è già stato studiato da molti autori: i quali hanno sempre seguito il metodo indicato dal Poincaré nel caso particolare del raffreddamento di un corpo (3): ricorderò i lavori del Le Roy (4), dello Stekloff, (5) e la notevole memoria dello Zaremba (6): più recentemente il Lauricella (7)

(1) Cfr. ad es. RIEMANN-WEBER, *Die Partiellen Differentialgleichungen der Mathematischen Physik*, 2 Bd., § 33 e 34.

(2) Od anche soltanto soddisfaccia all'ipotesi che esistano due numeri positivi e non nulli l ed α tali che, presi due punti $(x_1 x_2 \dots x_n y)$ ed $(x_1' x_2' \dots x_n' y')$, sia sempre

$$\frac{|f(x_1 x_2 \dots x_n y) - f(x_1' x_2' \dots x_n' y')|}{\rho^\alpha} < l,$$

dove

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \dots + (x_n - x_n')^2 + (y - y')^2}.$$

(3) H. POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique*, " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", tomo VIII, 1894. Vedi anche la *Théorie analytique de la chaleur*.

(4) LE ROY, *Sur l'intégration des équations de la chaleur*, " Annales de l'Ecole Normale supérieure ", (1898-99).

(5) STEKLOFF, *Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. Poincaré*, " Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse ", 1900.

(6) ZAREMBA, *Solution générale du problème de Fourier*, " Bulletin de l'Académie de Cracovie ", 1904. Vedi anche varie altre memorie del medesimo autore negli " Annales de l'Ecole Normale Sup. ", 1899, e nel " Journal de Mathématiques ", 1900, ecc.

(7) LAURICELLA, *Applicazioni della teoria di Fredholm al problema del raffreddamento dei corpi*, " Annali di Matematica ", tomo XIV, serie 3ª, 1907.

ha semplificato le teorie svolte da questi autori introducendo anche qui i metodi delle equazioni integrali di Fredholm.

Io seguirò in questa nota i metodi che esposi già in una ricerca analoga per l'equazione (1): ed in particolare per lo studio del problema della distribuzione delle temperature, quando i valori di esse siano noti in tutti i punti del corpo nell'istante iniziale e siano pure noti nei punti del contorno per i valori successivi del tempo (¹). Spero che tale studio non parrà inutile: poichè mi sembra che il metodo qui tenuto porti ad una trattazione del problema assai più semplice di quella nota, in quanto non si richiede affatto la ricerca delle soluzioni eccezionali di una conveniente equazione, e si richiede che al contorno siano soddisfatte assai minori condizioni di quelle imposte fin qui. Inoltre il metodo serve a risolvere il problema analitico più generale, — privo, a dir vero, di qualunque semplice significato fisico — che si ottiene quando si richiegga che la condizione (3) sia soddisfatta non già sulla superficie laterale di un cilindro o generatrici parallele all'asse delle y, ma nei punti di una ipersuperficie affatto generale che ammetta iperpiano tangente mobile con continuità e mai parallelo ad un piano caratteristico, e curvature finite (cfr. più oltre n. 2).

Posso dire che gli studi che svolgo in questa Nota stanno a quelli contenuti nella mia memoria citata nella medesima relazione in cui stanno la teoria del doppio strato ed il problema di Dirichlet rispetto alla teoria dello strato semplice ed al problema derivato di Dirichlet e alle sue generalizzazioni. Nei nⁱ 2 e 3 richiamerò i risultati di (A); nei nⁱ 4-6 dimostrerò il teorema di esistenza.

Il problema qui trattato ammette al più una soluzione. Si ottiene questo risultato con metodi classici nel caso che la super-

---

(¹) E. E. Levi, *Sull'equazione del calore*, " Annali di Matematica „ tomo XIV, serie 3ª: un largo sunto di questa memoria fu pubblicato nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „ dell'ottobre scorso collo stesso titolo. Citerò questa memoria colla lettera (A) e ad essa mi riferirò continuamente. Questa nota era già redatta quando il sig. Holmgren ha annunciato di avere una soluzione dello stesso problema pel caso di una sola variabile nella nota: *Sur l'équation de l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$, pubblicata nei "Comptes-Rendus „ nel dicembre scorso.

ficie laterale sia cilindrica e che la κ sia positiva [1]. Tuttavia anche nel caso generale il teorema di unicità è vero; nel caso in cui la κ sia negativa e la superficie sia cilindrica esso fu già dimostrato mediante gli sviluppi in serie di funzioni eccezionali [2]. Io ne darò in fine al lavoro una dimostrazione perfettamente generale (n. 7).

Ridurrò il problema allo studio di un' equazione integrale di Fredholm che, come le analoghe di (A), ha molte analogie con le particolari equazioni studiate dal Volterra. Ciò fa sì che non mi occorrerà mai di supporre nota la teoria del Fredholm per la dimostrazione di esistenza: invece la supporrò nota per dimostrare il teorema di unicità.

2. — Tratterò il caso di $n=2$: nessuna difficoltà porterebbe il caso di un maggior numero di dimensioni, tolta qualche complicazione nelle notazioni. E sarebbe anche più semplice trattare il caso di $n=1$: non scelsi questo caso appunto per evitare quelle particolari condizioni che lo semplificano.

Il campo che considereremo sarà limitato da un'area (base) posta sul piano $y=0$ che chiameremo k: e da una superficie laterale che chiameremo s: s potrà essere una superficie cilindrica, o più in generale una superficie regolare che ammette piano tangente e curvature finite: per essa si supporrà di più che il piano tangente formi sempre un angolo finito $>\Theta>0$ coi piani caratteristici [3].

Indicheremo con $s(y')$ la parte di s che si trova al disotto del piano $y=y'$, con $c(y')$ la curva sezione di s col piano $y=y'$, con $S(y')$ lo spazio racchiuso da s, dal piano $y=0$ e dal piano $y=y'$. Sarà quindi $c(0)$ il contorno di k [4]. Preso un punto M di s, con n indicheremo, come dicemmo, la direzione della normale alla curva c passante per il punto M volta verso l'interno

(1) Cfr. Riemann-Weber, *Die Partiellen Differentialgleichungen*, Bd. 2, § 34.

(2) Cfr. Zaremba, loc. cit., cap. IX, § 28, pag. 141-142.

(3) Se la superficie s è cilindrica, quest'ultima condizione è soddisfatta, poichè il piano tangente è sempre ortogonale ai piani caratteristici. La prima si riduce a chiedere che il contorno c di k abbia tangente e curvatura finita.

(4) Se la superficie è cilindrica, tutte le curve $c(y)$ sono uguali alla curva $c(0)$ contorno di k.

di S, con ν la normale ad s nel punto M medesimo, volta pure verso l'interno di S: in altri termini sarà n la proiezione di ν sul piano caratteristico per M (1).

Indicheremo con $u\, y$ un sistema di coordinate curvilinee, formato colle linee $y =$ cost e le loro traiettorie ortogonali (2), che valga a determinare i punti di s.

Infine se $M \equiv (x_1 x_2 y)$, $M' \equiv (x'_1 x'_2 y')$ sono due punti dello spazio, ρ sarà la loro distanza, r la distanza delle loro proiezioni sopra un qualunque piano caratteristico. Se M od M' sono su s, diremo n, n'; ν, ν' le direzioni n, ν ad essi relative.

Dalle ipotesi fatte su s segue che, se M ed M' sono su s:

1° (3) In virtù del fatto che s ha curvature finite è possibile trovare un numero N tale che, detto $(\nu\nu')$ l'angolo delle due normali in M ed M', si abbia

$$(1) \qquad |\widehat{\nu\nu'}| < N\rho \quad \text{e quindi anche} \quad |\widehat{nn'}| < N\rho.$$

Inoltre se N è sufficientemente grande sarà ancora, indicando con $|\widehat{\rho\nu}|$ l'angolo della congiungente MM'

$$(2) \qquad \left|\frac{\pi}{2} - (\widehat{\rho\nu})\right| < N\rho.$$

2° (4) se N è sufficientemente grande e se $(\widehat{rn})$, $(\widehat{rn'})$ sono gli angoli delle direzioni n ed n' colla congiungente le projezioni di M ed M' su un medesimo piano caratteristico, saranno soddisfatte le condizioni:

$$(3) \qquad \begin{aligned} |\cos(\widehat{rn})| &< \frac{N}{\operatorname{sen}\Theta}\, r + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta} \frac{|y-y'|}{r} \\ |\cos(\widehat{rn'})| &< \frac{N}{\operatorname{sen}\Theta}\, r + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta} \frac{|y-y'|}{r}. \end{aligned}$$

(1) Se la superficie s è cilindrica, n e ν coincidono. — Per queste ipotesi circa la superficie s cfr. (A) n. 26.

(2) Cfr. (A) n. 27.

(3) Cfr. (A) n. 26.

(4) Se la superficie s è cilindrica, le (3) si semplificano, in quanto si può sopprimere l'ultimo termine e porre $\operatorname{sen}\Theta = 1$.

Basta infatti osservare che $|\cos(\widehat{rn})| = \dfrac{|\cos(\widehat{r\nu})|}{\cos(\widehat{\nu n})} \leq \dfrac{|\cos(\widehat{r\nu})|}{\operatorname{sen}\Theta}$;

indi calcolare $\cos(\widehat{r\nu})$ dal triedro che ha per spigoli ρ, ν, r mediante la formula

$$\cos(\widehat{r\nu}) = \cos(\widehat{\rho\nu})\cos(\widehat{r\rho}) + \operatorname{sen}(\widehat{\rho\nu})\operatorname{sen}(\widehat{r\rho})\cos\acute{\rho}$$

dove $\acute{\rho}$ indica l'angolo diedro il cui spigolo è in ρ: per essere $|\cos\acute{\rho}| < 1$, $|\cos(\widehat{\rho\nu})| < N\rho$ [formula (2)], $|\cos(\widehat{r\rho})| = \dfrac{r}{\rho}$, $|\operatorname{sen}(\widehat{r\rho})| = \dfrac{|y'-y|}{\rho}$ segue allora $|\cos(\widehat{r\nu})| < Nr + \dfrac{(y'-y)}{r}$; onde la prima delle (3). Ed in modo analogo si ha la seconda (¹).

3. Poniamo

$$h_{\alpha\beta}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y') = e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta} \tag{4}$$

$$(r^2 = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2;\ y < y').$$

Ci occorre ricordare alcuni teoremi dimostrati in (A) relativi a questa funzione ed ai suoi integrali. Questa funzione è regolare in ogni punto del semispazio in cui $y < y'$, si annulla per $y = y'$, tranne nel punto $(x_1x_2y) \equiv (x_1'x_2'y')$ dove è singolare. Se si fissano i valori di (x_1x_2y) [o di $(x_1'x_2'y')$] e si fa allontanare all'infinito il punto $(x_1'x_2'y')$ [o (x_1x_2y)] la funzione $h_{\alpha\beta}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')$ tende a zero di ordine maggiore di una qualunque potenza di $\dfrac{1}{R}$, — R indicando la distanza di $(x_1'x_2'y')$ [o di (x_1x_2y)] da un punto arbitrario; ad es. dall'origine.

Se con $\Sigma(y')$ si indica un qualunque campo posto tutto al disotto del piano $y = y'$ il quale non si estenda all'infinito nel senso delle y negative — resti ad es.: nel semispazio delle y positive — la funzione $h_{\alpha\beta}$ è integrabile assolutamente in $\Sigma(y')$ tosto che si abbia

$$\alpha + 1 > 0 \qquad 1 + \alpha - 2\beta > 0;$$

(¹) Cfr. (A) n. 28.

se si pone $4+\alpha-2\beta=\delta$, e con η si indica il massimo valore di $y'-y$ in $\Sigma(y')$, sarà

$$(1)\qquad \iiint_{\Sigma(y')} h_{\alpha\beta}(x_1x_2y\,;\,x_1'x_2'y')\,dx_1dx_2dy < L'_{\alpha\beta}\,\eta^{\frac{\delta}{2}}$$

$L_{\alpha\beta}$ indicando una costante finita dipendente solo da α e β[1].

Indichi s una superficie quale quella studiata nel n. precedente; ed uy le coordinate curvilinee sulla superficie medesima sopra descritte: sia Edu^2+Gdy^2 l'elemento lineare di s riferito ad u e y. Sia $(x_1x_2y)-(uy)$ un punto variabile in $s(y')$. *L'integrale*

$$(2)\qquad \iint_{s(y')} h_{\alpha\beta}(x_1x_2y\,;\,x_1'x_2'y')\,\psi(uy)\sqrt{E}\,du\,dy$$

dove $\psi(uy)$ rappresenta una funzione finita e continua del punto di $s(y')$, *è una funzione finita e continua di* $(x_1'x_2'y')$ *in tutto lo spazio tosto che*

$$\alpha+1>0 \qquad 3+\alpha-2\beta>0\,;$$

e se si pone $3+\alpha-2\beta=\delta$ e si fa l'ipotesi che su $s(y')$ sia sempre $y'-y<\eta$ e $|\psi(uy)|<\Psi$ si avrà

$$(3)\qquad \iint_{s(y')} |h_{\alpha\beta}(x_1x_2y\,;\,x_1'x_2'y')\,\psi(uy)|\sqrt{E}\,du\,dy < \Psi L_{\alpha\beta}\,\eta^{\frac{\delta}{2}}$$

$L_{\alpha\beta}$ indicando una quantità dipendente da α e β soltanto. Se poi $\psi(uy)$ soddisfa alla condizione

$$|\psi(uy)|<\Psi_1\,|y-(y'-\eta)|^{\gamma}$$

sarà

$$(4)\quad \iint_{s(y')} |h_{\alpha\beta}(x_1x_2y\,;\,x_1'x_2'y')\,\psi(uy)|\sqrt{E}\,du\,dy < \Psi_1 L^{(1)}_{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma+1+\frac{\delta}{2}\right)}\,\eta^{\gamma+\frac{\delta}{2}}$$

$L^{(1)}_{\alpha\beta}$ indicando una costante dipendente da α e β soltanto — e dalla superficie s, ma non dalla funzione ψ — e Γ essendo la nota funzione Euleriana [2]. Si noti che, indicando con dc il differenziale dell'arco della curva $c(y)$ negli integrali delle for-

[1] (A) n. 22 specialmente formula (12).
[2] Cfr. (A) n. 27, formule (16) e (16)^{bis}.

mule (2) (3) e (4) al posto di $\sqrt{E}\,du\,dy$ si può scrivere $d\epsilon\,dy$. Così faremo ordinariamente in seguito.

Infine si indichi come prima con n la direzione positiva della normale alla $c(y)$ in $(x_1 x_2 y)$: e con $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \equiv (u^{(1)} y^{(1)})$ indichiamo un punto fisso di s e con $(\widehat{r^{(1)} n})$ l'angolo della n colla congiungente la projezione $(x_1 x_2)$ di $(x_1 x_2 y)$ colla projezione $(x_1^{(1)} x_2^{(1)})$ di $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$ volta verso quest'ultima. L'integrale

$$
(5) \qquad \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y ; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)} n})\, \psi(uy)\, d\epsilon\, dy
$$

ha ancora senso, poichè per le (4) del n. 3 si ha

$$
(6) \qquad |h_{12}(x_1 x_2 y ; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)} n})| < \frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} h_{22}(x_1 x_2 y ; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) + \\ + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta} h_{01}(x_1 x_2 y ; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) :
$$

e quindi basta applicare la proposizione sopra ricordata relativa all'integrale (3).

Quando in (5) al posto di $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$ si ponga un punto arbitrario $(x_1' x_2' y')$ dello spazio, si otterrà ancora un valore per l'integrale (5), poichè l'integrando è sempre finito: onde risulta che la funzione rappresentata da (5) esiste ed è finita in *tutto lo spazio*. Però è da notarsi che essa non è continua in tutto lo spazio, ma ha una discontinuità sulla superficie s: ivi essa soddisfa alla relazione

$$
(7) \qquad \lim_{(x_1' x_2' y') \to (x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \pm 0} \iint_{s(y')} h_{12}(x_1 x_2 y ; x_1' x_2' y') \cos(\widehat{rn})\, \psi(uy)\, d\epsilon\, dy = \\ = \pm 4\pi \psi(u^{(1)} y^{(1)}) + \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y ; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)} n})\, \psi(uy)\, d\epsilon\, dy.
$$

Nella formula precedente valgono insieme i segni superiori o gli inferiori: ed ho indicato con $\lim\limits_{(x_1' x_2' y') \to (x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) + 0}$ il limite preso nell'ipotesi che il punto $(x_1' x_2' y')$ tenda al punto $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$ restando dalla parte di s da cui è rivolta la direzione positiva della normale, con $\lim\limits_{(x_1' x_2' y') \to (x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) - 0}$ il limite preso nell'ipotesi contraria [1].

[1] (A) n. 28, formula (19). Si noti che in confronto di quella formula si ha qui un cambiamento di segno proveniente dal fatto che si è invertita la direzione positiva di r ed $r^{(1)}$.

4. Richiamate tali proposizioni, osserviamo anzitutto che il problema si può semplificare supponendo che le funzioni $f(x_1x_2y)$, $f_1(x_1x_2)$ che compaiono nelle (1) e (2) del n. 1 siano entrambe nulle. Invero nella citata memoria (¹) ho dimostrato, e del resto facilmente si deduce dai primi risultati enunciati al n. 3, che la funzione

$$z_1(x_1'x_2'y') = \frac{1}{4\pi}\iiint_{S(y')} h_{01}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\, f(x_1x_2y)\, dx_1dx_2dy$$

soddisfa alla (1) del n. 1 in tutto il campo S tosto che $f(x_1x_2y)$ soddisfaccia le condizioni rammentate al n. 1, onde se z è la funzione cercata, la funzione $\zeta = z - z_1$ soddisferà alla $\Delta_2\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0$ e di essa, come di z, si conosceranno i valori su k, i valori di $\frac{\partial\zeta}{\partial n} - \kappa\zeta$ su s: onde la ricerca di z si riduce a quella di una funzione ζ che soddisfa a condizioni al contorno simili a quelle cui soddisfa z ed all'equazione

$$\Delta_2\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0.$$

Onde intanto risulta che si può supporre nella (1) del n. 1 $f = 0$.

Similmente se $F(x_1x_2)$ è una funzione finita e continua in tutto il piano, la funzione $z_2(x_1'x_2'y')$ definita da

$$z_2(x_1'x_2'y') = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x_1x_2)\, h_{01}(x_1x_2 0;\, x_1'x_2'y')\, dx_1dx_2$$

rappresenta una soluzione dell'equazione precedente che sul piano $y' = 0$ si riduce a $F(x_1x_2)$ ed è regolare in tutto il semispazio delle y positive: onde basterà supporre che $F(x_1x_2)$ si riduca su k a $f_1(x_1x_2)$ per trarre, in modo analogo a quanto si fece sopra, la conclusione che si può supporre nella (2) del n. 1 $f_1(x_1x_2) = 0$ (²).

Ci limiteremo quindi alla ricerca di una funzione soluzione in S dell'equazione

$$(1) \qquad \Delta_2 z - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

(¹) (A) n. 22 e ss.; e n. 30.
(²) Cfr. (A) n. 30.

annulla su k, la quale soddisfa su s alla condizione

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial z}{\partial n} - \kappa(uy) z(uy) = \varphi(uy)\,,$$

$\kappa(uy)$, $\varphi(uy)$ essendo funzioni finite e continue del punto (uy) di s [1].

Procureremo di porre la funzione cercata nella forma

$$\text{(III)} \qquad z(x_1' x_2' y') = \frac{1}{2\pi} \iint_{s(y')} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x_1' x_2' y') \psi(uy)\, du\, dy,$$

dove si pone $(x_1 x_2 y) = (uy)$ e $\psi(uy)$ è una funzione finita e continua del punto di s, da determinarsi convenientemente.

La funzione (III) è soluzione di (I) in tutti i punti dello spazio i quali non appartengono ad s: poichè è ben noto, e si verifica del resto assai facilmente, che quando i due punti $(x_1 x_2 y)$ $(x'_1 x'_2 y')$ sono distinti la funzione $h_{01}(x_1 x_2 y;\, x'_1 x'_2 y')$ soddisfa rispetto alle variabili $(x'_1 x'_2 y')$ all'equazione (I). D'altra parte per i teoremi enunciati nel n. 3 essa rappresenta una funzione finita e continua in tutto lo spazio: e poichè per $y' = 0$ il campo $s(y')$ si riduce a zero, essa si annulla in tutti i punti interni di k [2]. Non rimane quindi che da esprimere che essa soddisfa su s alla equazione (II): mostreremo ora che partendo dai risultati del n. 3 si può determinare $\psi(uy)$ per modo che questa condizione risulti soddisfatta.

5. Indichiamo perciò, come prima, con $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) = (u^{(1)} y^{(1)})$ un punto di s, con $n^{(1)}$ la direzione n relativa ad esso: calcoliamo la derivata della funzione (III) rapporto alla direzione $n^{(1)}$ nel punto $(x_1' x_2' y')$, e facciamo poi tendere $(x_1' x_2' y')$ a $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$. La direzione $n^{(1)}$ è parallela al piano $y = 0$: in altri termini y è indipendente dalla variabile corrente lungo $n^{(1)}$: avremo quindi

$$\frac{\partial}{\partial n^{(1)}} h_{01}(x_1 x_2 y;\, x_1' x_2' y') = \frac{1}{2} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1' x_2' y') \frac{\partial r}{\partial n^{(1)}} =$$

$$= \frac{1}{2} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1' x_2' y') \cos(\widehat{r n^{(1)}})$$

[1] Se le $f_1(x_1 x_2)$, $\varphi(x_1 x_2 y)$ davano determinazioni concordi per i punti del contorno $c(0)$ di k, ancora si avranno determinazioni concordi dopo le nostre trasformazioni del problema: sarà cioè $\varphi(u, 0) = 0$.

[2] Se $\varphi(u0) = 0$ si vedrà che $\psi(u0) = 0$ e resterà allora provato che la funzione (III) ha le derivate prime regolari anche nell'interno dei punti di c. Cfr. A) n. 30; ed anche n. 28; formula (20).

come direzione positiva di r intendendosi quella volta verso la projezione del punto $(x_1'x_2'y')$.

E quindi

$$(1)\qquad \frac{\partial z(x_1'x_2'y')}{\partial n^{(1)}} = \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y')} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\,\psi(uy)\cos(\widehat{rn^{(1)}})\,dedy.$$

E potremo ancora scrivere

$$(2)\qquad \frac{\partial z(x_1'x_2'y')}{\partial n^{(1)}} = -\frac{1}{4\pi}\iint_{s(y')} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\cos(\widehat{rn})\psi(uy)\,dedy +$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{s(y)} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\,|\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})|\,\psi(uy)\,dedy.$$

Facciamo ora tendere $(x_1'x_2'y')$ a $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$; avremo dalla (7) del n. 3, se si suppone $\psi(uy)$ finita e continua:

$$\lim_{(x_1'x_2'y')=(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\pm 0} \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y')} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\cos(\widehat{rn})\psi(uy)\,dedy$$
$$= \mp\psi(u^{(1)}y^{(1)}) + \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\cos(r^{(1)}n)\psi(uy)\,dedy$$

dove vale il segno $+$ o $-$ a seconda che $(x_1'x_2'y')$ è interno ad S oppure è esterno.

Per trovare quindi il valore limite di $\frac{\partial z(x_1'x_2'y')}{\partial n^{(1)}}$ quando il punto $(x_1'x_2'y')$ tende al punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$, basta trovare il valore limite del secondo integrale che compare in (1). Ma questo integrale è continuo in tutto lo spazio.

Per mostrarlo comincierò col far vedere che detto integrale ha senso quando il punto $(x_1'x_2'y')$ è precisamente un punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) \equiv (u^{(1)}y^{(1)})$ della superficie s: e rappresenta una funzione continua del punto della superficie. Mostrerò poi che quando $(x_1'x_2'y')$ tende ad $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$ restando sempre sulla $n^{(1)}$ l'integrale tende *uniformemente* al valore che esso prende nel punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$: onde l'enunciata continuità.

Si noti perciò che le direzioni r, $n^{(1)}$, n giaciono tutte in un piano parallelo ai piani caratteristici: onde segue

$$(3)\qquad |\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})| = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\widehat{rn^{(1)}} + \widehat{rn}}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\widehat{rn^{(1)}} - \widehat{rn}}{2} < 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\widehat{nn^{(1)}}}{2}.$$

Onde dalle (1) del n. 2 segue

$$(4) \qquad \cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn}) \leq 2N\rho^{(1)}.$$

$\rho^{(1)}$ essendo la distanza di (x_1x_2y) da $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$.

Se quindi il punto $(x_1' x_2' y')$ cade precisamente nel punto $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$ di s osservando che $\rho^{(1)} \leq r^{(1)} + |y^{(1)} - y|$ si avrà

$$(5) \qquad h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\,|\cos(\widehat{r^{(1)}n^{(1)}}) - \cos(\widehat{r^{(1)}n})| \leq 2N(h_{22}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) + h_{11}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})).$$

E quindi intanto per i risultati del n. 3 esisterà l'integrale

$$(6) \qquad \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\,\{\cos(\widehat{r^{(1)}n^{(1)}}) - \cos(\widehat{r^{(1)}n})\}\,\psi(uy)\,du\,dy$$

e rappresenterà una funzione continua del punto di s. Ed anzi, se assumiamo come campo di integrazione, invece di $s(y^{(1)})$, una parte di esso, compresa tra due piani caratteristici distanti di una certa quantità piccola a piacere η, l'integrale medesimo sarà, per la (3) del n. 3 e per la disuguaglianza (5), infinitesimo di ordine uguale a quello di $\eta^{\frac{1}{2}}$.

Se invece il punto non appartiene alla superficie s, ma è un punto $(x_1' x_2' y^{(1)})$ della $n^{(1)}$ condotta pel punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$, dalla (4) si avrà

$$(7) \qquad \frac{\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})}{\rho} \leq 2N\frac{\rho^{(1)}}{\rho} = 2N\frac{\operatorname{sen}(\widehat{\rho n^{(1)}})}{\operatorname{sen}(\widehat{\rho^{(1)}n^{(1)}})} \leq 2N\frac{1}{\operatorname{sen}(\widehat{\rho^{(1)}n^{(1)}})}.$$

Ora noi possiamo dividere il campo $s(y^{(1)})$ in due parti: l'una $\sigma(y^{(1)})$ tutta interna ad una striscia compresa fra due piani caratteristici di altezza arbitrariamente piccola η ed in cui si abbia $\operatorname{sen}(\widehat{\rho^{(1)}n^{(1)}}) < \operatorname{sen}\frac{\Theta}{2}$, e la parte residua $s(y^{(1)}) - \sigma(y^{(1)})$. Invero basta osservare che per quanto si è detto al n. 2 nei punti di $s(y^{(1)})$ interni alla sfera di raggio $\frac{\Theta}{2N}$ e di centro il punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$ si ha $\widehat{\rho^{(1)} n^{(1)}} \geq |\widehat{\rho_1 \nu^{(1)}} - \widehat{\nu^{(1)} n^{(1)}}| > \Theta - N\rho^{(1)} > \frac{\Theta}{2}$.

Si spezzi allora l'integrale da studiarsi nelle due parti relative a $\sigma(y^{(1)})$ ed a $s(y^{(1)}) - \sigma(y^{(1)})$. Quanto alla prima si deduce da (7) ricordando che $\rho = r + |y^{(1)} - y|$ e richiamando la (3) del n. 3:

$$
(8) \quad \begin{aligned}
&\iint_{\sigma(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1' x_2' y^{(1)}) [\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})]\, \psi(uy)\, dc\, dy \\
&\quad = \frac{2N}{\operatorname{sen}\frac{\Theta}{2}} \iint_{\sigma(y^{(1)})} [h_{22}(x_1 x_2 y;\, x_1' x_2' y^{(1)}) + h_{11}(x_1 x_2 y;\, x_1' x_2' y^{(1)})]\, \psi(uy)\, du\, dy \\
&\qquad\qquad < \psi \frac{2N}{\operatorname{sen}\frac{\Theta}{2}} \cdot (L_{22} + L_{11} \eta^{\frac{1}{2}}) \eta^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

onde diverrà infinitesima con η. Quanto alla parte residua, osserviamo che per essa l'integrando è sempre finito e continuo, quindi è ben evidente che, preso un numero ϵ piccolo a piacere, si potrà, una volta fissato η, fissare un numero δ tanto piccolo che per $\sqrt{(x_1' - x_1^{(1)})^2 + (x_2' - x_2^{(1)})^2} < \delta$ si abbia, qualunque sia il punto $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$ di s,

$$
(9) \quad \begin{aligned}
&\Big| \iint_{s(y^{(1)}) - \sigma(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1' x_2' y^{(1)}) [\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})]\, \psi(uy)\, dc\, dy \,- \\
&- \iint_{s(y^{(1)}) - \sigma(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) [\cos(\widehat{r^{(1)} n^{(1)}}) - \cos(\widehat{r^{(1)} n})]\, \psi(uy)\, dc\, dy \Big| < \epsilon .
\end{aligned}
$$

Se ricordiamo ora che, come già si è osservato sopra, l'integrale (6) esteso al campo $\sigma(y^{(1)})$ soddisfa ad una limitazione analoga alla (8), segue che

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{x_1' = x_1^{(1)} \\ x_2' = x_2^{(1)}}} \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1' x_2' y^{(1)}) [\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})]\, \psi(uy)\, dc\, dy = \\
&\iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) [\cos(\widehat{r^{(1)} n^{(1)}}) - \cos(\widehat{r^{(1)} n})]\, \psi(uy)\, dc\, dy ,
\end{aligned}
$$

e che la convergenza è uniforme. Onde la continuità del secondo integrale di (1).

E pertanto di qui e da (2) potremo conchiudere che, se si suppone $\psi(uy)$ finita e continua,

$$\lim_{(x_1' x_2' y')=(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})} \frac{1}{4\pi} \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y; x_1' x_2' y') \cos(\widehat{r n'^{(1)}}) \psi(uy)\, dx\, dy =$$

(IV)

$$= \pm \psi(u^{(1)} y^{(1)}) + \frac{1}{4\pi} \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)} n^{(1)}}) \psi(uy)\, dx\, dy.$$

6. Dalla (IV) e dalla (1) del n. 5 segue che, affinchè la funzione (III) soddisfaccia alla (II), occorre e basta che $\psi(uy)$ sia una funzione finita e continua la quale soddisfaccia all'equazione integrale:

$$\text{(V)} \quad \psi(u^{(1)} y^{(1)}) - \frac{1}{4\pi} \iint_{s(y^{(1)})} \left[h_{12}(x_1 x_2 y; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)} n^{(1)}}) - \right.$$
$$\left. - 2\kappa(uy) h_{01}(x_1 x_2 y; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \right] \psi(uy)\, dx\, dy = \varphi(u^{(1)} y^{(1)}).$$

L'equazione (V) è un'equazione integrale del tipo di Fredholm: e, se si può risolvere, ci darà una funzione, la quale, sostituita in (III), se finita e continua, risolve il problema. Basterebbe quindi dimostrare che la (V) non ha nullo il determinante. E ciò non sarebbe difficile, ove *si volesse ammettere che per il nostro problema sia già dimostrato il teorema di unicità*, ricorrendo a considerazioni analoghe a quelle ordinariamente usate per dimostrare la risolubilità del problema di Dirichlet: ma siccome per noi il teorema di unicità non è noto che in casi particolari, noi non terremo tale via; e dimostreremo direttamente, come già feci in (A) [1] per una analoga equazione, che in base alle formule (3) e (4) del n. 3 la serie di Neumann (e di Volterra) che dà la soluzione di questa equazione, converge.

Invero si osservi che la serie di Neumann risolvente la (V) è data da

$$\text{(1)} \quad \psi(uy) = \varphi(uy) + \varphi_1(uy) + \varphi_2(uy) + \dots + \varphi_i(uy) + \dots$$

dove

$$\text{(2)} \quad \varphi_i(u^{(1)} y^{(1)}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{s(y^{(1)})} \left[h_{12}(x_1 x_2 y; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)} n^{(1)}}) - \right.$$
$$\left. - 2\kappa(u^{(1)} y^{(1)}) h_{01}(x_1 x_2 y; x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \right] \varphi_{i-1}(uy)\, dx\, dy.$$

[1] N. 30.

Ora si osservi che, se $|\kappa(uy)| < K$, posto $\left(2K + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\right) = C$, per la (6) del n. 3 si ha:

$$\left| h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)} n^{(1)}}) - 2\kappa(u^{(1)} y^{(1)})\, h_{01}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \right|$$
$$\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} h_{22}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) + C h_{01}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}).$$

Onde se si suppone

$$|\varphi(uy)| < \Phi,$$

in virtù delle (3) e (4) del n. 3 si avrà

$$|\varphi_1(uy)| < \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22} + C L_{01}\right] y^{\frac{1}{2}}$$

$$|\varphi_2(uy)| < \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22} + C L_{01}\right] \left\{ \frac{1}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22}^{(1)} + C L_{01}^{(1)}\right] \right\} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} y$$

$$|\varphi_3(uy)| < \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22} + C L_{01}\right] \left\{ \frac{1}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22}^{(1)} + C L_{01}^{(1)}\right] \right\}^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{2}\right)} y^{\frac{3}{2}}$$

. . . .

$$|\varphi_n(uy)| < \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22} + C L_{01}\right] \left\{ \frac{1}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22}^{(1)} + C L_{01}^{(1)}\right] \right\}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)+1} y^{\frac{n}{2}}$$

. . . .

E quindi rammentando che

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{2h}{2}\right) = (h-1)!, \quad \Gamma\left(\frac{2h+1}{2}\right) > (h-1)!.$$

e posto

$$H = \left\{ \frac{1}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22}^{(1)} + C L_{01}^{(1)}\right] \right\}^2.$$

e chiamato Φ_1 il massimo dei numeri Φ, $\frac{\Phi}{8\sqrt{\pi}}(L_{22} + C L_{01}) \frac{1}{\sqrt{H}}$, $\frac{\Phi}{8\sqrt{\pi}}(L_{22} + C L_{01}) \sqrt{y_0}$, si avrà che la (1) converge come una serie esponenziale e che precisamente è

$$(2) \qquad |\psi(uy)| < 2\Phi_1 e^{Hy}.$$

Onde, poichè la $\psi(uy)$ data da (1) è finita e continua, il *teorema di esistenza è pienamente dimostrato* [1].

Abbiamo contemporaneamente mostrato che *l'equazione* (V) *ha sempre il determinante* $\neq 0$, e che quindi *l'equazione omogenea corrispondente a* (V) *non ha mai altra soluzione che lo zero.*

7. — Per dimostrare il teorema di unicità della soluzione incominciamo col dimostrare il teorema in un caso particolare. Col solito metodo delle integrazioni per parti si ottiene per una qualunque funzione z soddisfacente a (I) e nulla su k, come è ben noto, la formola seguente:

$$0 = \iiint_{S(y')} z\left(\Delta_2 z - \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx_1 dx_2 dy = -\iiint_{S(y')} \Delta_1 z\, dx_1 dx_2 dy -$$

(1)

$$-\iint_{s(y')} z \frac{\partial z}{\partial n} \sqrt{E}\, du\, dy + \frac{1}{2}\iint_{s(y')} z^2 \cos(\widehat{\nu y}) \frac{du\, dy}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2}\iint_{p(y')} z^2 dx_1 dx_2$$

dove $p(y')$ è l'area del piano $y=y'$ interna ad $S(y')$ [possiamo anche dire l'area piana racchiusa dalla curva $c(y')$.] $\cos(\widehat{\nu y})$ indica il coseno dell'angolo della direzione positiva della ν con quella della y, ed infine $\Delta_1 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2$. Nel caso che la s sia cilindrica a generatrici parallele all'asse delle y scomparirà il terzo integrale della formula precedente, poichè $\cos(\widehat{\nu y}) = 0$.

Si supponga ora, se possibile, che la funzione z soddisfaccia su s ad una relazione del tipo della (II), ma omogenea:

$$\frac{\partial z}{\partial n} - \kappa(uy) z = 0, \tag{2}$$

dove la funzione $\kappa(uy)$ sia tale che

$$\sqrt{E}\,\kappa(uy) - \frac{1}{2}\cos(\widehat{\nu y}) \frac{1}{\sqrt{EG}} = \kappa_1(uy) > 0. \tag{3}$$

[1] Si noti che se era $\varphi(u0)=0$ sarà evidentemente da (1) e (2), $\psi(u0)=0$, poichè in questa ipotesi nella limitazione (2) della $\psi(uy)$ col tendere di y a zero si può prendere Φ e quindi Φ_1 piccolo a piacere. La funzione (III) sarà quindi allora regolare anche nei punti del contorno di k. Cfr. n. 4 e specialmente la nota a piè di pag. 12.

Sarà evidentemente sempre possibile, qualunque sia la superficie s, trovare delle funzioni finite e continue $\kappa(uy)$ che soddisfacciano a (3); ad es.: se la superficie s è cilindrica a generatrici parallele all'asse delle y avendosi $\cos(\widehat{\nu y}) = 0$ basterà prendere $\kappa(uy) > 0$. La (1) dà allora

$$(4)\quad 0 = -\iiint_{S(y')} \Delta_1 z\, dx_1\, dx_2\, dy - \iint_{s(y')} \kappa_1(uy) z^2\, du\, dy - \frac{1}{2}\iint_{p(y')} z^2\, dx_1\, dx_2.$$

Ora gli integrali del secondo membro della (4) sono tutti essenzialmente positivi, nulli solo se la z è identicamente nulla: quindi l'unica funzione z la quale si annulli su k e soddisfaccia alla (2), dove si suppone che per $\kappa(uy)$ valga la disegnaglianza (3), sarà lo zero. In altri termini risulta di qui che *la soluzione del problema propostoci è unica quando la funzione* $\kappa(uy)$ *che compare in* (II) *soddisfa alla* (3).

Ritorniamo al caso che $\kappa(uy)$ sia qualunque. Se esistessero due funzioni che soddisfacessero alle (I) e (II), esisterebbe una funzione z che soddisfa alla (I), si annulla su k, e su s è tale che

$$\frac{\partial z}{\partial n} - \kappa(uy) z = 0.$$

Ed ove una tale funzione z potesse porsi sotto la forma (III) la funzione $\psi(uy)$ corrispondente dovrebbe soddisfare all'equazione integrale omogenea corrispondente a (V); ma per l'osservazione finale del numero precedente, una tale funzione deve essere identicamente nulla, e tale deve quindi essere anche la $z(x_1 x_2 y)$. Onde il teorema di unicità riuscirà dimostrato tosto che si possa provare che *ogni* soluzione dell'equazione (I), nulla su k, si può porre sotto la forma (III).

Ora ciò risulta immediatamente: basta osservare che presa una qualunque tale funzione z, se si considera una funzione $\kappa'(uy)$ soddisfacente a (3) e si pone

$$\frac{\partial z}{\partial n} - \kappa'(uy) z = \varphi'(uy),$$

per il teorema di unicità dato sopra, la funzione $z(uy)$ sarà precisamente data dalla (III) dove la $\psi(uy)$ è determinata dalla equazione

$$\psi(u^{(1)} y^{(1)}) + \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y^{(1)})} \{ h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)} n^{(1)}}) -$$
$$- 2\kappa'(u^{(1)} y^{(1)})\, h_{01}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \}\, \psi(uy)\, du\, dy = \varphi'(u^{(1)} y^{(1)}).$$

Onde riesce così *provato pienamente anche il teorema di unicità relativo al nostro problema.*

8. — Avvicinando i risultati di questo lavoro con quelli ottenuti nella mia memoria citata se ne possono dare molte semplici generalizzazioni. Così noi potremmo supporre che la superficie s consti di diverse parti $s_1\, s_2 \dots s_n$ e che su alcune di queste $s_{i_1}, s_{i_2} \dots s_{i_h}$ siano assegnati i valori della funzione z, sulle altre $s_{j_1}, s_{j_2} \dots s_{j_{n-h}}$ siano assegnate delle relazioni tra i valori di z ed i valori di $\frac{dz}{dn}$ del tipo della (II).

Questo problema corrisponderebbe, quando le s_i ed s_j sono cilindriche ed a generatrici parallele all'asse delle y, all'ipotesi che il corpo fosse limitato da vari contorni, e su alcuni di essi fossero assegnati i valori delle temperature, e per gli altri invece fossero assegnati i valori delle temperature dello spazio ambiente e le condizioni di irraggiamento e conducibilità del contorno del corpo.

In tal caso basterebbe porre la funzione z sotto la forma

$$z(x_1'x_2'y') = \frac{1}{2\pi}\Big\{\sum_i \iint_{s_i(y')} h_{12}(x_1x_2y : x_1'x_2'y')\cos\widehat{(rn)}\,\psi_i(u,y)\,dc_i\,dy + \\ + \frac{1}{2}\sum_j \iint_{s_j(y')} h_{01}(x_1x_2y ; x_1'x_2'y')\,\psi_j(u,y)\,dc_j\,dy\Big\},$$

dove (u,y), (u,y) indicano dei sistemi di variabili coordinate sulla superficie s_i, s_j, dc_i, dc_j gli elementi di arco delle intersezioni delle s_i, s_j coi piani caratteristici: e nei vari integrali devesi intendere $(x_1x_2y) = (u,y)$ o $(x_1x_2y) \equiv (u,y)$: e dove le funzioni $\psi_i(u,y)$, $\psi_j(u,y)$ sono funzioni finite e continue da determinarsi convenientemente.

Le condizioni imposte alla z al contorno sono sufficienti per determinare le funzioni ψ_i, ψ_j in modo unico mediante equazioni integrali perfettamente simili all'equazione (V): noteremo solo che perciò occorrerà che non mai una superficie s_i venga infinitamente prossima ad una s_j.

Ulteriori generalizzazioni si potrebbero dare al caso in cui il corpo constasse di pezzi ciascuno per sè omogeneo, ma di conducibilità differente da pezzo a pezzo: ma tali generalizzazioni non presentano nuove difficoltà e noi ne taceremo.

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
(Anno 1907-1908)

SULLA DEFORMAZIONE
DELLE
SUPERFICIE FLESSIBILI ED INESTENDIBILI

NOTA
DEL
Dott. EUGENIO ELIA LEVI, a Pisa

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1908

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
(Anno 1907-1908)

SULLA DEFORMAZIONE

DELLE

SUPERFICIE FLESSIBILI ED INESTENDIBILI

NOTA

DEL

Dott. EUGENIO ELIA LEVI, a Pisa

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1908

Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XLIII.
Adunanza del 29 Dicembre 1907.

Torino — Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona.

1. — Due superficie S ed S' diconsi *isometriche* quando i loro punti si possono porre in corrispondenza biunivoca per modo che i loro elementi lineari risultino eguali: diconsi *applicabili* l'una sull'altra quando, immaginate le superficie come veli perfettamente flessibili ed inestendibili, si può flettere senza rottura nè duplicatura l'una di esse per modo che si distenda sull'altra ([1]). Due superficie applicabili sono isometriche; ma affinchè si possa asserire che due date superficie S ed S' isometriche sono applicabili, occorre mostrare che si può trovare una successione continua di superficie isometriche le quali possano considerarsi come gli stati intermedi della superficie S, che, deformandosi e flettendosi, dalla sua forma primitiva viene a distendersi sulla superficie S'. Io mi propongo di studiare quando due superficie isometriche sono applicabili; e dimostrerò che:

Due superficie isometriche a curvatura nulla o negativa sono sempre applicabili l'una sull'altra; mentre di due superficie isometriche a curvatura positiva si può sempre distendere una superficie sull'altra oppure sulla simmetrica di questa; e la corrispondenza

---

([1]) Questa distinzione fu introdotta dal Voss nei suoi lavori, e più recentemente riprodotta nell'art. *Abbildung und Abwickelung zweier Flächen auf einander* dell'“Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften„ Bd. III. D. 6, a., n. 2, pag. 362-363.

di simmetria fra due superficie a curvatura positiva non è mai un'applicabilità (1).

Trascurerò d'ora in poi il caso delle superficie a curvatura nulla che è di immediata evidenza. Pel caso delle superficie a curvatura positiva mi limiterò al caso analitico; mentre tratterò il caso più generale per le superficie a curvatura negativa. Mi piace però osservare che per i noti teoremi sul carattere analitico delle soluzioni delle equazioni di tipo ellittico di secondo ordine, l'ipotesi che la superficie a curvatura positiva sia analitica equivale solo al supporre che i coefficienti $E(uv)$, $F(uv)$, $G(uv)$ dell'elemento lineare siano funzioni analitiche di una coppia conveniente di variabili u e v: poichè, ammesso ciò, ed ammesso che le coordinate x, y, z del punto della superficie, abbiano, considerate come funzioni di u, v, le derivate dei primi tre ordini finite e continue, segue di necessità che la superficie è analitica (2).

Noterò ancora che le considerazioni che seguono valgono non solo se la superficie è immersa nello spazio euclideo; ma anche se si immagina la superficie immersa in uno spazio a curvatura costante K_0: basterà in tutto quanto segue sostituire alla curvatura assoluta K della superficie la curvatura relativa

$$k = K - K_0.$$

Ciò risulta evidente quando si osservi che mediante questa sostituzione si passa dalle equazioni di Gauss e di Codazzi relative ad una superficie immersa in uno spazio euclideo alle analoghe relative ad una superficie immersa in uno spazio di di curvatura K_0 (3): e che d'altra parte il nostro problema equivale a studiare quando avviene che i sistemi di funzioni D, D', D'', coefficienti della seconda forma fondamentale, che soddisfano alle equazioni di Gauss e di Codazzi, formano un insieme continuo.

(1) Tale questione mi fu proposta dal Chiar.^{mo} Prof. Bianchi; di ciò e degli utili consigli che mi diede mi sia concesso di ringraziarlo vivamente.

(2) Cfr. Bernstein S., *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre.* " Math. Ann. „ Bd. 59, 1904, pag. 20-83. Vedi anche dello stesso A.: *Sur la déformation des surfaces.* " Math. Ann. „ Bd. 60, pag. 137 (1905).

(3) Cfr. Bianchi, *Lezioni*, vol. I, § 213, pag. 192, formula (VII*) ed (VIII).

Le superficie a curvatura positiva [1].

2. — Per trattare il problema nel caso delle superficie a curvatura positiva penseremo le superficie di dato elemento lineare individuate coll'assegnare la forma di una loro curva prefissata, ad es.: della $v = 0$. Riassumerò brevemente i risultati noti relativi al problema di determinare una superficie con assegnata deformata di una curva, cercando di porre in rilievo le osservazioni che più ci interessano, rimandando per il resto alla trattazione del problema che si trova nelle *Lezioni* del Bianchi [2]. Seguo completamente le notazioni del Bianchi.

Si supponga la superficie riferita ad un sistema ortogonale (u, v) e che il parametro u misuri l'arco sulla linea $v = 0$ di cui vogliamo assegnare la deformata. Chiamerò Γ questa linea $v = 0$: e supporrò per fissare le idee che la sua curvatura geodetica ρ_v sia < 0.

La deformata C della curva Γ sia assegnata ad esempio mediante le sue equazioni intrinseche

$$\rho = f(u), \quad T = \varphi(u); \tag{1}$$

saranno $f(u)$ e $\varphi(u)$ funzioni analitiche regolari in un certo campo della variabile u. Indichiamo come al solito con α, β, γ; ξ, η, ζ; λ, μ, ν i coseni di direzione della tangente, della normale e della binormale di C. Indichi σ l'angolo di cui deve rotare nel verso positivo la normale alla superficie per portarsi sulla normale alla curva: dovrà essere

$$\operatorname{sen} \sigma = -\frac{\rho}{\rho_v}; \tag{2}$$

e questa equazione, per l'ipotesi fatta che $\rho_v < 0$, ci da due valori supplementari di σ, l'uno compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, l'altro compreso fra

[1] Per quanto nel presente numero e nel successivo si abbia in vista le superficie a curvatura positiva, tuttavia la maggior parte dei ragionamenti, ed in ispecie quelli del n. 2, valgono pure per le superficie a curvatura negativa.

[2] Bianchi, *Lezioni*, vol. I, § 111-112, pag. 244-249

$\frac{\pi}{2}$ e π. Si fissi per σ una di queste due soluzioni di (2): per ottenere la superficie basterà integrare l'equazione

$$(3) \qquad \Delta_{22}\,\delta = (1 - \Delta_1\,\delta)\,K\,,$$

prendendo per δ successivamente le coordinate $x\,(u\,v)$, $y\,(u\,v)$, $z\,(u\,v)$ incognite della superficie: colla condizione che per $v = 0$ soddisfino rispettivamente alle uguaglianze

$$(4) \quad x\,(uv) = x\,(u)\,,\ \frac{\partial x}{\partial u} = \alpha\,,\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\xi}{\rho}\,,\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\sqrt{G}\,(\xi \operatorname{sen}\sigma + \lambda\cos\sigma),$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{G}\,(\xi \operatorname{sen}\sigma + \lambda\cos\sigma)\right],$$

e alle analoghe per y e per z.

Giova notare che basterà ottenere integrando (3) una sola delle tre funzioni incognite x, y, z; le altre si avranno poi per quadrature.

Questa osservazione ci permette di affermare col Bianchi che fin quando è $\sigma \neq \frac{\pi}{2}$ è sempre possibile risolvere una delle equazioni (3) coi dati iniziali (4): anzi si può senz'altro affermare di più che, se le funzioni analitiche $f\,(u)$, $\varphi\,(u)$ variano, rimanendo però inferiori ad un numero finito M e tali che il loro raggio di convergenza non scenda mai al disotto di un certo numero r, e che la funzione σ soluzione di (2) differisca sempre da $\frac{\pi}{2}$ di più di un certo numero ϵ, le superficie S, che si ottengono nel modo detto sopra corrispondentemente alle varie determinazioni di $f\,(u)$ e $\varphi\,(u)$, esistono *tutte* in un certo campo comune di valori per u e v. Ed al variare continuo di $f\,(u)$ e $\varphi\,(u)$, purchè si scelga con continuità la determinazione di $\sigma\,(u)$, varieranno anche con continuità le superficie S che si ottengono.

Noteremo infine che per quanto precede la superficie corrispondente ad una determinazione di σ è unica: e che la determinazione precedente dà effettivamente una superficie che soddisfa alle condizioni del problema.

3. — Premesso ciò, incominciamo coll'osservare che se una superficie è a curvatura positiva non si potrà mai passare con

continuità da una superficie in cui ad un determinato punto O di Γ corrisponda un valore di σ compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ ad una per cui al punto medesimo corrisponda un valore di σ fra $\frac{\pi}{2}$ e π. Ed invero se tale passaggio fosse possibile esisterebbe una deformata S della superficie, tale che per essa il valore corrispondente di σ in O è $\frac{\pi}{2}$: allora la curva C che su S rappresenta Γ avrebbe in O il piano osculatore tangente alla superficie: il che è impossibile se la superficie è a curvatura positiva.

Dunque intanto possiamo affermare che le superficie a curvatura positiva di dato elemento lineare si dividono in due classi tali che da una superficie di una classe non si può passare con continuità alle superficie dell'altra: e sappiamo che per riconoscere se una superficie appartiene all'una od all'altra classe basta vedere se, preso un punto O su Γ, il corrispondente valore di σ è compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ o fra $\frac{\pi}{2}$ e π. Applichiamo questo criterio a due superficie simmetriche rispetto a un punto dello spazio: se osserviamo che, assumendo come positivi su curve simmetriche versi corrispondentisi, le direzioni positive delle normali alle superficie in due punti simmetrici sono concordanti, mentre le direzioni positive delle normali principali di due curve simmetriche sono opposte; concludiamo che di due superficie simmetriche l'una appartiene all'una classe e l'altra all'altra [1].

Cosicchè, per dimostrare il nostro asserto occorre solo mostrare che si può passare con continuità da una ad un'altra qualunque superficie della medesima classe. Ora ciò risulta dalle osservazioni fatte in fine al n. precedente: poichè, siano S ed S' due superficie date, C e C' le curve deformate di Γ su

---

[1] Che del resto due superficie simmetriche a curvatura positiva non siano applicabili risulta anche dalle considerazioni seguenti. Presa una superficie a curvatura positiva, dicasi faccia positiva della superficie quella rivolta verso i centri di curvatura; in altri termini dicasi positiva la faccia concava della superficie. Si potrà allora definire il giro positivo sulla superficie. Ora è ben chiaro che deformando con continuità la superficie, il giro positivo rimane sempre positivo, mentre si scambia col negativo per una simmetria. Onde l'asserita impossibilità di applicare una superficie sulla simmetrica.

S' e S'', $\sigma(u)$, $\sigma'(u)$ i valori di σ relativi a C' e C'' e si supponga $0 \leq \sigma \leq \sigma_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \sigma' \leq \sigma_0 < \frac{\pi}{2}$. Noi potremo evidentemente costruire una successione di curve analitiche C_1 riferite fra di loro per uguaglianza di archi che permetta di passare con continuità da C' a C'' per modo che il valore ρ_1 della prima curvatura in un punto qualunque di C_1 sia sempre compreso fra i valori ρ' e ρ'' della prima curvatura nei punti corrispondenti di C' e C''. Per tali curve si avrà che l'angolo σ_1 (il quale è definito da (2)) soddisfa esso pure alla limitazione $0 \leq \sigma_1 < \sigma_0 < \frac{\pi}{2}$; e quindi le superficie S_1, isometriche con S' ed S'', su cui C_1 è la deformata di Γ, esistono tutte in un certo campo di valori per u e v, e dànno una successione di superficie che ci permettono di passare con continuità da S' ad S''.

Le superficie a curvatura negativa.

4. Nel caso delle superficie a curvatura negativa valgono i ragionamenti fatti sopra circa alla determinazione della superficie con assegnata deformata di una curva (¹): ma non è più legittima la distinzione in due classi delle superficie deformate di una data; poichè è bensì vero che il metodo precedente non ci permette più di determinare la superficie quando in qualche punto di C sia $\sigma = \frac{\pi}{2}$ (e cioè la curva assegnata debba essere tangente ad una asintotica della superficie), ma non possiamo più assicurare che tale superficie non esista.

Riprenderemo perciò la questione dal principio, fondandoci ora sulla determinazione della superficie mediante due sue asintotiche, quale è stata trattata dal Bianchi in una nota portante lo stesso titolo della presente mia, e pubblicata negli Atti di questa Accademia (²). Otterremo così anche il vantaggio di libe-

(¹) Tenendo conto dei risultati della mia Nota *Sul problema di Cauchy per le equazioni a caratteristiche reali e distinte* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2 marzo 1908), questa determinazione è in questo caso indipendente dall'ipotesi dell'analiticità.

(²) Cfr. Bianchi, *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili*. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1904-1905, vol. XL.

rarci dell'ipotesi della natura analitica della superficie che abbiamo dovuto fare fin qui.

Dato l'elemento lineare di una superficie a curvatura negativa

$$(5) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

diconsi *asintotiche virtuali* dell'elemento lineare quei sistemi di linee $(\alpha\,\beta)$ che per una conveniente tra le superficie isometriche di elemento lineare (5) sono linee asintotiche. Dato un sistema di asintotiche virtuali $(\alpha\,\beta)$ la superficie che le ammette quali asintotiche effettive è determinata a meno di movimenti e di simmetrie, poichè se l'elemento lineare (5) riferito alle $(\alpha\,\beta)$ prende la forma

$$(6) \qquad ds^2 = E_1\,d\alpha^2 + 2F_1\,d\alpha\,d\beta + G_1\,d\beta^2,$$

la seconda forma fondamentale della superficie è data da

$$(7) \qquad \pm \frac{\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}}{\rho}\,d\alpha\,d\beta,$$

dove ρ è determinato dalla

$$(8) \qquad K = -\frac{1}{\rho^2}.$$

Fissato un punto O e le due asintotiche α e β uscenti da esso, per riconoscere se due superficie che ammettano il doppio sistema di caratteristiche $(\alpha\,\beta)$ sono uguali o simmetriche, basta vedere se nelle due superficie la linea α (oppure la linea β) ha la stessa torsione oppure torsione opposta: in altri termini, se procedendo lungo la linea α (o lungo la linea β) si veggono i piani tangenti alle due superficie rotare nello stesso verso oppure in verso opposto [1]. Il teorema di Enneper ci assicura che il criterio è indipendente dal considerare le due linee α oppure le due linee β.

Se le linee $(\alpha\,\beta)$ sono asintotiche virtuali per l'elemento

---

[1] In questa seconda forma il criterio vale anche quando l'asintotica α (o β) è una geodetica di (5), e quindi è una retta.

lineare (5), le u, v, considerate come funzioni di α e β, soddisfano alle equazioni (*di Darboux*)

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} &= \left[\frac{\partial \log \rho}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}\right] \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}\right] \left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right] - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} &= - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}\right] \left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right] + \\ &\qquad + \left[\frac{\partial \log \rho}{\partial v} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}\right] \frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}. \end{aligned} \right.$$

Ed inversamente, se si ha una coppia di funzioni *indipendenti* $u(\alpha\beta)$, $v(\alpha\beta)$, soluzioni di (9), il doppio sistema di linee $(\alpha\beta)$ è per l'elemento lineare (5) un sistema di asintotiche virtuali.

Come ha osservato il prof. Bianchi, al sistema (9) si può applicare il metodo delle successive approssimazioni del Picard. Precisando: si supponga che quando u e v variano in un certo campo Δ, ad es., quando $|u| < a$, $|v| < a$ le funzioni E, F, G e le loro derivate dei primi quattro ordini rimangono continue e inferiori in valore assoluto ad M: e sia M_1 il massimo valore dei secondi membri di (9) quando (uv) è in Δ e $\frac{\partial u}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial\beta}$, $\frac{\partial v}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial v}{\partial\beta}$ restano in valore assoluto inferiori a b. Si prendano due curve Γ e Γ_1 arbitrarie, ma non tangenti, uscenti dal punto $u = v = 0$ come curve $\alpha = 0$ e $\beta = 0$: e per fissare le idee, misurino α e β gli archi di Γ e Γ' a partire da $u = v = 0$: siano esse

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{lll} (\Gamma) & u(\alpha, 0) = f(\alpha) & v(\alpha, 0) = \varphi(\alpha) \\ (\Gamma_1) & u(0, \beta) = f_1(\beta) & v(0, \beta) = \varphi_1(\beta) \end{array} \right.$$

E si supponga che le derivate prime di $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $f_1(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$ esistano e siano inferiori a b in valore assoluto finchè $|\alpha| < g$, $|\beta| < g$.

Se si indica con ρ il minore dei numeri g, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{M_1}}$, $\frac{b}{M_1}$, il metodo delle approssimazioni successive ci permette di affermare che esiste una coppia di funzioni $u(\alpha\beta)$, $v(\alpha\beta)$ le quali nel campo definito da $|\alpha| < \rho$, $|\beta| < \rho$ danno punti (uv) appartenenti a Δ, ammettono derivate prime finite e continue ed inferiori in modulo a b, ammettono le due derivate miste anche esse continue ed inferiori in valore assoluto a M_1, soddisfano a (9) ed hanno i valori iniziali (10).

Ed il metodo delle approssimazioni successive ci permette [1] inoltre di affermare che la soluzione $u(\alpha\beta)$, $v(\alpha\beta)$ trovata è la sola soluzione di (9) la quale soddisfaccia alle condizioni iniziali (10). Infine si osservi che se θ è l'angolo delle curve Γ e Γ_1 nel punto $\alpha = \beta = 0$ si avrà

$$\frac{\partial(uv)}{\partial(\alpha\beta)} = \begin{vmatrix} f'(0) & \varphi'(0) \\ f'_1(0) & \varphi'_1(0) \end{vmatrix} = \operatorname{sen}\theta \neq 0,$$

e quindi in un campo conveniente le due funzioni u v sono effettivamente indipendenti e ci determinano un doppio sistema di asintotiche cui appartengono le curve iniziali Γ e Γ_1: e che questo sistema è unico. Possiamo dunque dire: assegnate due curve arbitrarie a tangenti distinte, esiste sempre ed è determinata a meno di un movimento o di una simmetria una superficie deformata della data che ammette quelle curve come asintotiche [2]: ed anzi si ha di più che la superficie è determinata a meno di un movimento se si assegna in un punto arbitrario di una di queste asintotiche il segno della torsione.

5. — La proposizione precedente ci suggerisce immediatamente la via che seguiremo nel dimostrare il nostro teorema: prese due superficie isometriche S ed S' si considerino le coppie di asintotiche Γ e Γ_1, Γ' e Γ'_1 di S ed S' uscenti da due punti corrispondenti e si determini una successione di coppie di curve $\overline{\Gamma}$ e $\overline{\Gamma}_1$ non mai tangenti e tali che permettano di passare con continuità dalla coppia Γ, Γ_1 alla coppia Γ', Γ'_1: la successione delle superficie $\overline{S}$ corrispondenti permetterà di passare con continuità da S ad S' oppure alla sua simmetrica.

---

[1] Seguendo un ragionamento analogo a quello con cui si dimostra l'unicità delle soluzioni delle equazioni a derivate ordinarie. Cfr. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, vol. II, pag. 372.

[2] Questa osservazione ci permette di enunciare i teoremi $B)$ $C)$ della nota del Bianchi togliendo l'ipotesi di essere nel caso analitico.

Però l'ultima parte del ragionamento del n. precedente ci dice soltanto che $\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}$ è diverso da zero in un *conveniente* campo di variabilità per u, v o per α, β; perchè le conclusioni che vogliamo trarre siano legittime occorre dimostrare che esiste un campo in cui *tutte* le $\overline{S}$ esistono: occorre cioè trovare un campo nelle variabili uv, in cui certamente sia sempre $\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)} = 0$.

Supponiamo perciò che le funzioni $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $f_1(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$ abbiano derivate seconde finite e che il numero b definito al n. 1 sia anche maggiore di tutte queste derivate. In questa ipotesi ricordando che già si suppose che le derivate quarte di E, F, G esistano e siano minori di M, esisteranno pure nel campo $|\alpha| < \rho$, $|\beta| < \rho$ tutte le derivate seconde di u, v, e saranno inferiori ad un numero N dipendente solo da b e da M.

Quindi si potrà ancora trovare un numero N_1 dipendente solo da b e da M e maggiore numericamento delle funzioni $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}\right)$, $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}\right)$: quindi se supponiamo $\left|\left(\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}\right)\right|_{\alpha=\beta=o} = |\text{sen}\,\theta| > \mu$, fissato un numero arbitrario $\epsilon < \mu$, potremo trovare un numero $\rho_1 < \rho$ tanto piccolo che per $|\alpha| < \rho_1$, $|\beta| < \rho_1$ l'oscillazione di $\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}$, la quale è $\leq 2N_1\rho_1$, sia minore di $\mu - \epsilon$, e quindi tale che in tutto questo campo risulti $\left|\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}\right| > \epsilon$ in valore assoluto. ρ_1 dipende solo da ϵ, μ, b, M.

Si noti infine che il campo $|\alpha| < \rho_1$, $|\beta| < \rho_1$ ha per immagine in (uv) un campo Σ variabile a seconda delle curve iniziali (10), ma contenente sempre nell'interno il campo in cui $|u| < \frac{\epsilon\rho_1}{b}$, $|v| < \frac{\epsilon\rho_1}{b}$, poichè si ha

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \left|\frac{\partial v}{\partial \beta}\,\frac{1}{\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}}\right| < \frac{b}{\epsilon}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \ldots, \ldots$$

Rimane quindi totalmente eliminata l'obbiezione posta innanzi più sopra; basterà supporre che la successione delle curve Γ, Γ_1 sia tale che l'angolo acuto che esse fanno non scenda mai al disotto del minore degli angoli di Γ, Γ_1 e di Γ', Γ'_1 perchè si abbia una effettiva successione di superficie che permettano di passare con continuità da S ad S' od alla sua simmetrica.

E possiamo dire di più che noi passeremo da S proprio alla superficie S' se Γ e Γ' hanno torsione di ugual segno, alla sua simmetrica nel caso opposto. Ma la denominazione delle curve Γ' e Γ'_1 è affatto arbitraria, e le due curve Γ' e Γ'_1 hanno torsioni uguali ed opposte; quindi noi potremo sempre chiamare Γ' la curva che ha su S' torsione dello stesso segno di Γ; ed allora il procedimento precedente ci permette di distendere S proprio sulla superficie S'.

Si può notare che, mentre quando ci si contenti di deformare S in S' o nella simmetrica di S' si può ottenere lo scopo mantenendo rigida prima una asintotica e poi l'altra, ciò non si può fare sempre nel caso in cui si voglia applicare proprio S su S'.

6. — Darò qui un esempio molto semplice di deformazione di una superficie a curvatura negativa nella simmetrica. Si immagini una superficie pseudosferica S che in un punto A abbia come asintotiche due rette fra loro ortogonali.

Una tale superficie è congrua colla superficie simmetrica rispetto al piano tangente in A: essa si porta sulla simmetrica facendola rotare di un angolo retto attorno alla normale comune in A: però la corrispondenza tra i punti di S e della superficie simmetrica che è determinata da questa congruenza non è la medesima corrispondenza che quella determinata dalla simmetria. Ma una semplicissima modificazione del procedimento precedente ci permette di generare una successione di deformate che porti la superficie S sulla simmetrica realizzando la corrispondenza fra punti data dalla simmetria. Basterà considerare invero la successione di superficie che si ottengono da S facendo prima rotare S nello spazio attorno alla normale in A di un angolo α e poi facendo strisciare su sè stessa la superficie così ottenuta di un angolo $-\alpha$ attorno al punto A. È chiaro che la superficie che si ottiene per tal modo ponendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ è precisamente una superficie identica colla superficie simmetrica.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali

Estratto dal vol. XVII [illegible]

SUL PROBLEMA DI CAUCHY

PER

LE EQUAZIONI A CARATTERISTICHE REALI E DISTINTE

NOTA

DEL DOTT.

EUGENIO ELIA LEVI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

1908

Matematica. — *Sul problema di Cauchy per le equazioni a caratteristiche reali e distinte.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio U. DINI.

1. Sia un'equazione alle derivate parziali di ordine n in due variabili indipendenti

$$(1)\qquad F(xyz\, p_{10}\, p_{01} \cdots p_{n0}\, p_{n-1\,1} \cdots p_{0n}) = 0 \qquad \left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\, \partial y^k}\right);$$

si dice che in un campo Δ dell' S_m in cui sono coordinate $x, y, z, p_{10}, \dots, p_{0n}$, essa è *a caratteristiche reali e distinte*, quando le radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dell'equazione

$$(2)\quad P_{n0}\, \alpha^n + P_{n-1\,1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + P_{0n} = 0 \quad \left(P_{ik} \equiv P_{ik}(xyz, \dots, p_{0n}) \equiv \frac{\partial F}{\partial p_{ik}}\right)$$

sono in Δ tutte reali e distinte. Ricordiamo che, data una superficie $z = z(xy)$, ad essa si può fare corrispondere una superficie Δ dell' S_m, col porre $p_{ik} = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\, \partial y^k}$; e data sopra la superficie una curva, ad essa si può far corrispondere nell' S_m una curva, attribuendo a p_{ik} i valori corrispondenti per la superficie. Le superficie e le curve di S_m così ottenute non sono generali; le chiameremo superficie Δ e curve Γ (¹).

Il problema di Cauchy, enunciato precisamente, è allora il seguente: *data una curva* Γ *di* S_m *soddisfacente* (1) *e tale che, posto* $\dfrac{dy}{dx} = -\alpha$, *in nessun punto di essa sia soddisfatta la* (2), *trovare una superficie* Δ *soddisfacente ad* (1) *e che passi per la curva* Γ. Io mi propongo di dimostrare che, pur restando dal punto di vista delle funzioni di variabile reale, *se in un intorno* Δ *di* Γ *l'equazione* (1) *ha caratteristiche reali e distinte, il problema di Cauchy è risolubile ed ammette una sola soluzione* (²).

(¹) Perchè una superficie di S_m sia una superficie Δ occorre e basta che x ed y si possano prendere come variabili indipendenti su essa e che sia $p_{ik} = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\, \partial y^k}$: perchè una curva di S_m sia una curva Γ occorre e basta che sia $dz = p_{10}\, dx + p_{01}\, dy$, $dp_{ik} = p_{i+1k}\, dx + p_{ik+1}\, dy$ $(i + k \leq n - 1)$, i differenziali essendo presi rapporto al parametro che individua i punti della curva.

(²) Si può dire che sin qui il problema non è mai stato studiato dal punto di vista delle funzioni di variabile reale altro che nel caso in cui l'equazione sia *lineare nelle derivate di ordine massimo, a coefficienti funzioni di* x *ed* y *soltanto*: possiamo dire nel caso delle *caratteristiche fisse*. Anche per le equazioni di secondo ordine nulla si conosce all'infuori di questo caso appunto, che fu studiato dal Picard nella celebre Memoria del Journal de Mathématiques, 1890. Maggiori indicazioni bibliografiche si trovano nelle mie Note che saranno tosto citate.

Mi fonderò sul teorema analogo che ho dimostrato per le equazioni lineari in due Note pubblicate nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo ([1]).

2. Premettiamo un'osservazione generale. Si può con una trasformazione delle coordinate $x\,y$ e della funzione incognita z fare in modo che la curva iniziale Γ sia determinata dalle equazioni

$$x = z = p_{10} = p_{01} = \cdots = p_{n0} = p_{n-11} = \cdots = p_{0n} = 0 : \tag{3}$$

in altri termini, che siano assegnati i valori iniziali per z e le sue derivate nei punti di un tratto dell'asse delle y, e che questi siano tutti nulli ([2]). Il campo Δ si potrà allora immaginare limitato dalle disuguaglianze

$$[|x|, |y|] < d_1 \;, \; [|z|, |p_{ik}|] < d_2 \quad (i + k \leq n); \tag{4}$$

e si può supporre, per comodità, $d_1 < 1$.

L'ipotesi che Γ non soddisfaccia mai (2) si traduce allora nell'altra che $P_{n0}(0y0 \ldots 0) \neq 0$, od anche che tutte le radici $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n$ di (2) siano finite: potremo supporre quindi che lo stesso avvenga in tutto il campo Δ. Noi supporremo che in Δ si abbia sempre $\varrho_1 < |P_{n0}| < \varrho_2$. e che del pari si abbia $|\alpha_i| < M$. Infine l'ipotesi che l'equazione sia a caratteristiche distinte ci dice che in Δ le quantità $\dfrac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|}$ non diverranno mai superiori ad una conveniente quantità μ.

Ciò posto, è facile vedere che, innalzando convenientemente l'ordine dell'equazione, si può sempre ridurre l'equazione medesima ad una particolare forma, lineare nelle derivate di ordine massimo, con coefficienti funzioni di x, y, z e di un certo numero di derivate di ordine inferiore ([3]). Si scelgano invero $n+1$ numeri arbitrarî $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_{2n+1}$, sottoposti alle sole condizioni di essere inferiori in modulo al numero M e tali che in tutto Δ si abbia ancora $\dfrac{1}{|\alpha_i - \alpha_{n+j}|} < \mu$. $\dfrac{1}{|\alpha_{n+h} - \alpha_{n+k}|} < \mu$.

Se noi deriviamo (totalmente) il primo membro di (1) secondo la direzione di coefficiente angolare-α_{n+1}, considerando la z quale funzione di x ed y, otteniamo per z un'equazione lineare di ordine $n+1$:

$$\begin{aligned} P_{n0}\,p_{n+10} + (P_{n-11} - \alpha_{n+1}\,P_{n0})\,p_{n1} + \cdots + (P_{0n} - \alpha_{n+1}\,P_{1n-1})\,p_{1n} - \\ - \alpha_{n+1}\,P_{0n}\,p_{0n+1} - f(xyz\,p_{10}\,p_{01} \ldots p_{n0} \ldots p_{0n}) = 0; \end{aligned} \tag{5}$$

ed è ben noto che il problema di Cauchy per l'equazione (1) e coi dati iniziali (3) è equivalente al problema di Cauchy per l'equazione (5), quando

([1]) E. E. Levi, *Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari in due variabili a caratteristiche reali*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo, Nota I (§ I-III), Nota II (§ IV-VI) (1907-1908); citerò queste due Note con (L_1) ed (L_2).

([2]) Cfr. per maggiori particolari (L_1), § I. e (L_2), § VI.

([3]) Analoga trasformazione è usata in (L_2) § V.

per dati iniziali si assumano ancora le (3) e si determinino i valori iniziali delle derivate di ordine $n+1$ per modo che siano compatibili colle (3) medesime e colla (5).

Sull'equaziono (5) si può procedere come sull'equazione (1), derivando totalmente secondo la direziono di coefficiente angolare α_{n+2}, e poi secondo quelle corrispondenti ad $\alpha_{n+3} \dots \alpha_{2n+1}$: otterremo così un'equazione di ordine $2n+1$, in cui le derivate di ordine $2n+1$ compaiono linearmente con coefficienti funzioni di x, y, z e delle derivate di z di ordine $\leq n$ soltanto, e tale di più che le radici dell'equazione delle caratteristiche siano le medesime $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ della (1) e le costanti $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n+1}$. E si noti che senza affatto modificare la forma dell'equazione, noi potremo poi supporre che i valori iniziali sull'asse delle y per la z e le sue derivate fino all'ordine $2n+1$ siano precisamente ancora lo zero, poichè basta perciò sostituire alla z la funzione $z+u$, u essendo una funzione che soddisfa alle medesime condizioni iniziali cui dovrebbe soddisfare la z.

Risulta chiaro che affinchè si possa procedere ai calcoli precedenti occorre che la funzione F che compare nel primo membro di (1) ammetta le derivate dei primi $n+1$ ordini rapporto a tutte le variabili da cui essa dipende esplicitamente. *Noi ammetteremo di più che la funzione* F *ammetta in* $\varDelta$ *tutte le derivate fino all'ordine* $n+2$ *rispetto alle variabili* $x, y, z, \dots, p_{0n}$; ne seguirà che nell'equazione di ordine $2n+1$, dedotta da (1) come sopra si disse, la parte del primo membro che è indipendente dalle derivate di ordine $2n+1$ ammette le derivate parziali prime rispetto a tutte le le variabili da cui dipende esplicitamente. Invece i coefficienti delle derivate di ordine $2n+1$ essendo combinazioni lineari a coefficienti costanti di $P_{n0}, P_{n-11}, \dots, P_{0n}$ ammetteranno tutte le derivate parziali dei primi $n+2$ ordini. Lo stesso varrà per le radici $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ dell'equazione delle caratteristiche. Siccome P_{n0} è in $\varDelta$ sempre $> \varrho_1$ in modulo, potremo anche dividere per P_{n0}: il coefficiente di p_{2n+10} è allora l'unità.

3. Riponiamo n al luogo di $2n+1$, ed enunciamo di nuovo chiaramente tutte le ipotesi che per quanto precede si possono intendere soddisfatte.

Ci limiteremo dunque a studiare equazioni del tipo:

$$(6) \qquad p_{n0} + P_{n-11}\, p_{n-11} + \cdots P_{0n}\, p_{0n} = f(xyz\, p_{10}\, p_{01} \dots p_{n-10} \dots p_{0n-1})$$

dove $P_{ik} \equiv P_{ik}(xyz, p_{10}\, p_{01} \dots p_{\nu 0}\, p_{\nu-11} \dots p_{0\nu})$ con ν tale che $2\nu + 1 < n$. E supponiamo che l'equazione

$$(7) \qquad \alpha^n + P_{n-11}\, \alpha^{n-1} + \cdots + P_{0n} = 0$$

abbia ν radici $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ funzioni di $x, y, z, p_{10} \dots p_{0\nu}$ e le residue $\alpha_{\nu+1}$, $\alpha_{\nu+2}, \dots, \alpha_n$ costanti. Il campo $\varDelta$ di S_m sarà dato dalle disuguaglianze

$$(8) \qquad [\,|x|, |y|\,] < d_1 < 1\,, \qquad [\,|z|, |p_{ik}|\,] < d_2 \; (i + k \leq n-1)\,.$$

nessuna limitazione imponendo alle derivate di ordine n. Chiameremo δ il campo $[|x|, |y|] < d_1$, proiezione di Δ sul piano xy. Supporremo che in Δ la f abbia le derivate parziali prime rispetto a tutte le variabili da cui dipende esplicitamente e che queste siano tutte inferiori ad M; ne segue che, se consideriamo la funzione che si ottiene derivando la f totalmente rapporto ad x ed y, otterremo funzioni di x, y, z e delle derivate di z di ordine $\leq n$, *lineari* nelle derivate di ordine n, con coefficienti inferiori ad M in Δ: onde, se si suppone z soddisfacente alle (8) ed alle

$$(9) \qquad [|p_{n0}|, |p_{n-11}|, \dots, |p_{0n}|] < d_3,$$

d_3 indicando un numero che per comodità supporremo > 1, esisterà un numero σ funzione di M soltanto, tale che le derivate totali $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ soddisfanno alle

$$(10) \qquad \left[\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|, \left|\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|\right] < \sigma d_3.$$

Infine chiameremo Φ il massimo valore assoluto in Δ di $f(xyz \dots p_{0n-1})$ e supporremo Φ maggiore anche di $\left|\frac{\partial f(xy0 \dots 0)}{\partial x}\right|$ e di $\left|\frac{\partial f(xy0 \dots 0)}{\partial y}\right|$ in δ.

Quanto alle α noi ammetteremo che $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ abbiano le derivate parziali dei primi ν ordini rispetto alle variabili che in esse compaiono: accrescendo ove occorra M, supporremo che in Δ queste derivate siano tutte $<$ M: ed ancora supporremo $<$ M in modulo le funzioni che si ottengono calcolando le derivate totali dei primi ν ordini delle $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ quando la z sia una funzione di x e di y soddisfacente alle (8); si noti che queste derivate totali per quanto precede dipendono da x, y, z e dalle derivate di z di ordine $\leq 2\nu \leq n-1$. Infine accrescendo ove occorra il numero M supporremo che esso superi in modulo le residue costanti $\alpha_{\nu+1} \dots \alpha_n$ e le $P_{lm}(xyz \dots p_{0\nu})$ e le loro derivate parziali prime. Chiameremo infine μ il massimo di $\frac{1}{\alpha_i - \alpha_j}$.

Premesse queste ipotesi, per risolvere il problema di Cauchy per l'equazione (6) procederemo per approssimazioni successive. Determineremo le z_i dalle equazioni

$$(11) \qquad \begin{cases} p_{1,n0} + P_{0,n-11}\, p_{1,n-11} + \dots + P_{0,0n}\, p_{1,0n} = f(xy0 \dots 0) \equiv f_0(xy) \\ p_{2,n0} + P_{1,n-11}\, p_{2,n-11} + \dots + P_{1,0n}\, p_{2,0n} = f(xyz_1 \dots p_{1,0n-1}) \equiv f_1(xy) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{i,n0} + P_{i-1,n-11}\, p_{i,n-11} + \dots + P_{i-1,0n}\, p_{i,0n} = f(xyz_{i-1} \dots p_{i-1,0n-1}) \equiv f_{i-1}(xy) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

dove $P_{0,lm} \equiv P_{lm}(xy0 \dots 0)$, $P_{i,lm} \equiv P_{lm}(xyz_i\, p_{i,10} \dots p_{i,0\nu})$. Dimostreremo che per le ipotesi fatte le z_i successive ammettono tutte le derivate dei primi n ordini, e convergono ad una funzione z la quale soddisfa alle condizioni iniziali, ammette le derivate dei primi $n-1$ ordini e soddisfa a (6). Naturalmente quest'ultima affermazione devesi intendere nel senso che, costrutte le P_{lm} (il che è possibile poichè z ammette le derivate dei primi $n-1 \geq \nu$ ordini), esiste ancora quella particolare derivata n^{esima} di z che si ha considerando il primo membro di (6) come un unico simbolo operatorio, e che questo ha il valore del secondo membro. Quando (6) provenga da una equazione di ordine inferiore ad n per la via indicata al n. 2, si potrà dire che la z soddisfa all'equazione primitiva.

Vale la pena di notare come il sistema (11) che determina le successive approssimazioni non si trova nelle condizioni in cui comunemente si applica il metodo del Picard, poichè le varie equazioni differiscono per il mutare del termine noto non solo, ma anche perchè mutano i coefficienti delle derivate di ordine massimo. In questo si deve cercare la ragione delle differenze che compariranno nel dedurre la convergenza delle funzioni z_i ad un limite in confronto col metodo che ordinariamente si tiene (¹).

4. Distingueremo la dimostrazione in due parti: 1° dimostrazione dell'esistenza delle soluzioni delle successive equazioni (11); 2° dimostrazione della convergenza ad un limite.

Si osservi che le (11) sono tutte lineari: e che ogni volta che sia dimostrato che in un certo campo δ' di valori di xy esiste la funzione z_{i-1} ed ha le derivate dei primi n ordini, e sia essa che le sue derivate di ordine $\leq n-1$ soddisfanno alle (8), la i^{esima} equazione delle (11) si può costruire, ed è tale che ad essa si può applicare il teorema del § V di (L_2) facendovi $g = 1$, $M = M$, $\mathfrak{M}_1 = 0$ e $\mu = \mu$. Infatti dalle ipotesi fatte su z_{i-1} segue che le prime ν radici $\alpha_{i-1,1}, \alpha_{i-1,2}, \dots, \alpha_{i-1,\nu}$ dell'equazione delle caratteristiche corrispondente alla i^{esima} equazione (11), le quali sono le sole che non siano delle costanti, ammetteranno tutte le derivate dei primi ν ordini e che queste saranno tutte inferiori ad M: basti ricordare che queste *dipendono solo dalle derivate di ordine* $\leq 2\nu \leq n-1$ di z_{i-1}. Inoltre la funzione $f_{i-1}(xy)$ ammetterà le derivate prime; onde intanto risulta evidente che si può fare $g = 1$, $M = M$, $\mu = \mu$ (²). Infine, siccome nelle equazioni (11) mai non compaiono termini di ordine $n-1$, avremo $\mathfrak{M}_1 = 0$.

(¹) Si noti in particolare ad es. che per potere determinare la *convergenza* delle z_i e delle loro derivate di *ordine* $n-1$ occorre dimostrare l'*esistenza* delle derivate di *ordine* n delle z_i e trovare per esse una conveniente *limitazione*.

(²) Si noti come qui abbia efficacia la grande economia delle ipotesi da me introdotta nel teorema citato. Ove non fosse dimostrato in quel luogo che perchè la soluzione di un'equazione lineare di ordine n ammetta le derivate di ordine $n+g-1$ è sufficiente che: 1° tutte le α ammettano le derivate dei primi $g\,\mathfrak{q}$ ordini; 2° che le α si possano ordinare in modo che α_i ammetta le derivate di ordine $\leq i\,\mathfrak{q}$, *l'innalzare*

Se noi quindi supponiamo che il campo δ' in cui si è ammessa l'esistenza della z_{i-1} sia un rombo avente la diagonale sull'asse delle y ed i lati paralleli alle rette di coefficiente angolare $+M$ e $-M$, l'i^{ima} equazione (11) determinerà, in virtù del teorema citato, nel campo δ' medesimo una soluzione z_i che si annulla sull'asse delle y, ed ammette tutte le derivate di ordine n. E, se si potrà accertare, mediante le limitazioni assegnate a z_i dal teorema medesimo, che la z_i soddisfaccia ancora alle (8) come la z_{i-1}, si potrà anche costruire la $(i+1)^{\text{esima}}$ di queste equazioni e da questa determinare z_{i+1}, e così procedere. Ma conviene notare che i numeri $\varkappa_n$, $\varkappa_n^{(1)}$ che compaiono in quel teorema essendo funzioni di n, M, $\mathfrak{M}_1$, μ soltanto non varieranno affatto al passare da una equazione alla successiva per quanto varii la forma dell'equazione medesima.

Andiamo dunque a trovare un campo in cui tutte le z_i successive soddisfacciano a queste condizioni.

Intanto dalla prima delle (11) risulta senz'altro, applicando il teorema citato col porre $F = F_1 = \Phi$, $t = t_1 = 0$, che nel campo δ_1, costituito dal massimo rombo contenuto in δ il quale ha una diagonale sull'asse delle y ed i lati paralleli alle rette di coefficiente angolare $+M$ e $-M$, essa determina una funzione z_1 tale che

$$(12)\quad \begin{cases} |z_1| < \varkappa_n\Phi|x|^n,\ [|p_{1,10}|,|p_{1,01}|] < \varkappa_n\Phi|x|^{n-1},\ \ldots \\ \qquad\qquad \ldots [|p_{1,n-10}|,|p_{1,n-21}|,\ldots,|p_{1,0n-1}|] < \varkappa_n\Phi|x|, \\ [|p_{1,n0}|,|p_{1,n-11}|,\ldots,|p_{1,0n}|] < \varkappa_n^{(1)}\Phi[1+|x|]. \end{cases}$$

Prendiamo in δ_1 un campo δ' che sia ancora un rombo colla diagonale sull'asse delle y e coi lati paralleli alle rette di coefficiente angolare $+M$ e $-M$, e tale che in esso si abbia

$$(13)\qquad \varkappa_n\Phi|x| < d_2,$$

e quindi a fortiori $\varkappa_n\Phi|x|^i < d_2$ $(1 \leq i \leq n)$. Allora z_1 soddisfa per (12) a tutte le proprietà richieste sopra, e quindi la seconda delle (11) determina in δ' la z_2. Ma per (10) e (12) si ha, osservando che $|x| < d_1 < 1$, $1+|x| < 2$,

$$(14)\qquad |f_1(xy)| < \Phi,\quad \left[\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|\right] < 2\sigma\,\varkappa_n^{(1)}\Phi.$$

Quindi applicando il nostro teorema alla seconda delle (11) col farvi $F = \Phi$, $F_1 = 2\sigma\,\varkappa_n^{(1)}\Phi$, $t = t_1 = 0$ otterremo che z_2 soddisfa alle limitazioni

$$(15)\quad \begin{cases} |z_2| < \varkappa_n\Phi|x|^n,\ [|p_{2,10}|,|p_{2,01}|] < \varkappa_n\Phi|x|^{n-1}\ \ldots \\ \qquad\qquad \ldots [|p_{2,n-10}|,|p_{2,n-21}|,\ldots,|p_{2,0n-1}|] < \varkappa_n\Phi|x|, \\ [|p_{2,n0}|,|p_{2,n-11}|,\ldots,|p_{2,0n}|] < \varkappa_n^{(1)}\Phi(2\sigma\,\varkappa_n^{(1)}|x|+1) < \\ \qquad\qquad < 2\varkappa_n^{(1)}\,.\,2\sigma\,\varkappa_n^{(1)}\,.\,\Phi, \end{cases}$$

poichè si può sempre supporre $2\sigma\,\varkappa_n^{(1)} > 1$.

---

l'ordine dell'equazione come si fece al n. 2 non avrebbe avuto alcuna efficacia, e non avremmo potuto affatto procedere nel modo che qui teniamo.

E per (13) si avrà allora che z_2 soddisfa ancora alle condizioni notate sopra perchè si possa applicare il nostro teorema. E la terza delle (11) determinerà z_3 ancora in δ'; e, tosto che si osservi che per (13) (15) e (10) si ha

$$(16)\qquad |f_2(xy)| < \Phi\,,\qquad \left[\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|\right] < (2\sigma\varkappa_n^{(1)})^2\,\Phi\,,$$

si otterranno le limitazioni per z_3 facendo nel nostro teorema $F = \Phi$, $F_1 = (2\sigma\varkappa_n^{(1)})^2\,\Phi$, $t = t_1 = 0$. E così procedendo, otterremo che in generale in δ' esistono tutte le z_i successive e soddisfanno alle limitazioni seguenti:

$$(17)\qquad \begin{cases} |z_i| < \varkappa_n\Phi\,|x|^n\,,\ [|p_{i,10}|\,,\,|p_{i,01}|] < \varkappa_n\Phi\,|x|^{n-1}\ \ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ [|p_{i,n-10}|\,,\,|p_{i,n-21}|\,,\,\ldots\,,\,|p_{i,0n-1}|] < \varkappa_n\Phi\,|x|\,, \\ [|p_{i,n0}|\,,\,|p_{i,n-11}|\,,\,\ldots\,,\,|p_{i,0n}|] < \varkappa_n^{(1)}\,[(2\sigma\varkappa_n^{(1)})^{i-1}|x| + 1]\,\Phi < \\ \qquad\qquad < 2\varkappa_n^{(1)}(2\sigma\varkappa_n^{(1)})^{i-1}\Phi\,. \end{cases}$$

Onde risulta esaurita la prima parte della nostra dimostrazione.

5. Per mostrare la convergenza delle z_i si osservi che dalle (11), posto $\zeta_i = z_{i+1} - z_i$, si ha

$$(18)\qquad \begin{cases} \pi_{1,n0} + P_{1,n-11}\,\pi_{1,n-11} + \cdots + P_{1,0n}\,\pi_{1,0n} = \psi_1(xy) \\ \pi_{2,n0} + P_{2,n-11}\,\pi_{2,n-11} + \cdots + P_{2,0n}\,\pi_{2,0n} = \psi_2(xy) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \pi_{i,n0} + P_{i,n-11}\,\pi_{i,n-11} + \cdots + P_{i,0n}\,\pi_{i,0n} = \psi_i(xy) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

dove si pose $\pi_{j,ik} \equiv \dfrac{\partial^{i+k}\zeta_j}{\partial x^i\,\partial y^k}$ e

$$(19)\qquad \psi_i(xy) \equiv f_i(xy) - f_{i-1}(xy) + \sum_{\substack{l+m=n \\ m\gtrless 0}} p_{i,lm}(P_{i-1,lm} - P_{i,lm})\,.$$

Incominciando dalla prima delle (18) e ricordando che è $f_1(xy) - f_0(xy) \equiv f(xyz_1\,p_{1,10}\ldots p_{1,0n-1}) - f(xy0\ldots 0)$, e che le derivate parziali di f sono inferiori ad M, si trae intanto dalle (12), tenendo conto che $|x| < d_1 < 1$

$$(20)\qquad |f_1(xy) - f_0(xy)| < m_1\,M\,\varkappa_n\Phi\,|x|$$

$m_1 = \dfrac{(n+1)\,n}{2}$ essendo il numero delle variabili $z\,,\,p_{10}\ldots p_{0n-1}$. Ed analogamente

$$(21)\qquad |P_{0,lm} - P_{1,lm}| < m_2\,M\,\varkappa_n\Phi\,|x|^{n-\nu}\qquad \left(m_2 = \frac{(\nu+2)(\nu+1)}{2}\right).$$

Quindi, ricordando l'ultima delle (12), si avrà

$$|\psi_1(xy)| < \mathrm{M}\,\varkappa_n \Phi(m_1 + n\, m_2\, \varkappa_n^{(1)} \Phi(1 + |x|)\,|x|^{n-\nu-1})\,|x|\,;$$

od anche più brevemente,

$$|\psi_1(xy)| < \mathrm{A}\Phi\,|x|\,, \tag{22}$$

dove si è chiamato A un numero tale che

$$\mathrm{A} > (m_1 + 2n\, m_2\, \varkappa_n^{(1)}\Phi)\, \mathrm{M}\varkappa_n\,. \tag{23}$$

Segue dalla prima delle (18) applicando il solito teorema relativo alle equazioni lineari di (L_2) § V, col farvi $\mathrm{F} = \mathrm{A}\Phi$, $\iota = 1$ che in δ' è

$$\begin{gathered}|\zeta_1| < \frac{1}{2}\varkappa_n \mathrm{A}\Phi\,|x|^{n+1}\,, [|\pi_{1,10}|\,, |\pi_{1,01}|] < \frac{1}{2}\varkappa_n \mathrm{A}\Phi\,|x|^n \ldots \\ \ldots [|\pi_{1,n-10}|\,, \ldots, |\pi_{1,0n-1}|] < \frac{\varkappa_n}{2}\mathrm{A}\Phi\,|x|^2\,;\end{gathered} \tag{24}$$

mentre, pure sapendo che le derivate n^{esime} di $\zeta_1 = z_2 - z_1$ esistono poichè esistono le derivate n^{esime} di z_2 e di z_1, non possiamo conchiudere nulla relativamente ad esse dall'equazione (18), perchè non abbiamo provato che $\psi_1(xy)$ abbia le derivate prime.

Da (24) si trae ancora

$$|f_2(xy) - f_1(xy)| < m_1\, \mathrm{M}\,\frac{\varkappa_n \mathrm{A}\Phi}{2}\,|x|^2\,, |\mathrm{P}_{1,lm} - \mathrm{P}_{2,lm}| < m_2\, \mathrm{M}\,\frac{\varkappa_n \mathrm{A}\Phi}{2}\,|x|^{n-\nu+1}\,.$$

E quindi per le (15) si avrà

$$|\psi_2(xy)| < \frac{\mathrm{M}\,\varkappa_n \Phi \mathrm{A}}{2}\,(m_1 + 2m_2\, n\, \varkappa_n^{(1)}\Phi\,.\,2\sigma\, \varkappa_n^{(1)}\,|x|^{n-\nu})\,|x|^2\,.$$

E da questa se si suppone che il campo δ' soddisfaccia oltre che a (13) anche alla nuova limitazione

$$2\sigma\, \varkappa_n^{(1)}\,|x| < 1\,, \tag{25}$$

si deduce

$$|\psi_2(xy)| < \frac{\mathrm{A}^2}{2}\,\Phi\,|x|^2\,. \tag{26}$$

Ed oramai basterà continuare a ripetere questo stesso procedimento, sempre tenendo conto delle limitazioni (17) ed osservando la condizione (25). E si dedurrà in generale che per le funzioni ζ_ι successivamente determinate dalle (18), valgono le

$$\begin{gathered}|\zeta_\iota| < \varkappa_n \mathrm{A}^\iota \Phi\,\frac{1}{(\iota+1)!}\,|x|^{n+\iota}\,. [|\pi_{\iota,10}|\,, |\pi_{\iota,01}|] < \varkappa_n \mathrm{A}^\iota \Phi\,\frac{1}{(\iota+1)!}\,|x|^{n+\iota-1} \ldots \\ \ldots [|\pi_{\iota,n-10}|\,, \ldots, |\pi_{\iota,0n-1}|] < \varkappa_n \mathrm{A}^\iota \Phi\,\frac{1}{(\iota+1)!}\,|x|^{\iota+1}\,.\end{gathered} \tag{27}$$

E da queste relazioni segue senz'altro che nel campo δ' che soddisfa alle limitazioni (13) e (25) le funzioni $z_i = z_1 + \sum_1^i \zeta_i$ e le loro derivate di ordine $\leq n-1$ convergono uniformemente ad una funzione z ed alle derivate di essa dei primi $n-1$ ordini, e questa funzione z soddisferà alle limitazioni (8). Segue allora, ricordando sempre che la $f(xyz \dots p_{0n-1})$ ammette, quando z soddisfa ad (8), derivate parziali inferiori in modulo ad M, che le funzioni $f_1(xy)$, $f_2(xy) \dots$ convergono uniformemente alla funzione $f(xyz, \dots, p_{0n-1})$; e quindi ancora, in virtù delle medesime equazioni (11), che anche la successione dei primi membri $p_{i,n0} + \sum P_{i,lm} p_{i,lm}$ delle (11) convergono uniformemente ad un limite. Ma noi sappiamo che anche le $P_{i,lm}$ convergono uniformemente alle funzioni $P_{lm}(xyz, \dots, p_{0\nu})$, quindi converge uniformemente anche la successione di funzioni $p_{i,lm} + \sum P_{lm} p_{i,lm}$ e converge a $f(xyz p_{10} \dots p_{0n-1})$; e quindi, pur non potendo affermare l'esistenza delle derivate di ordine n di z, si può affermare che ha senso per z il primo membro di (4) interpretato come un unico simbolo derivatorio di ordine n: e che in tale accezione la z soddisfa all'equazione (4) medesima.

6. Se si ritorna alla forma primitiva dell'equazione proposta, all'equazione (1), noi possiamo dire che nelle ipotesi fatte al n. 2 la z esiste ed ammette le derivate dei primi $2n$ ordini. Se si volesse che z avesse le derivate di ordine $2n+h$, basterebbe procedere ancora oltre col metodo detto al n. 2 e da (1) passare ad una equazione di ordine $2n+h+1$.

7. Tralascio oramai di insistere sul teorema di unicità corrispondente al teorema di esistenza sopra dimostrato. La dimostrazione per approssimazioni successive data sopra vale con procedimenti noti anche per dimostrare il teorema di unicità [1].

Od anche si potrebbe dedurre il teorema di unicità dal teorema analogo relativo alle equazioni lineari dato in (L_1) ed (L_2) seguendo il metodo esposto dall'Hadamard nella Nota I delle *Leçons sur la propagation des ondes* [2].

[1] Cfr. ad es. Goursat, *Cours d'Analyse*, tomo II, pag. 372.
[2] Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes* etc., pp. 352 e sg.

Offerto dall' Autore.

ESTRATTO

DAGLI *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.*

Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse.

(*Di* Eugenio Elia Levi, *a Genova*.)

§ 1.

1. Sia $f(x\,y)$ una funzione monodroma (*) analitica di due variabili complesse $x = x_1 + i\,x_2$, $y = y_1 + i\,y_2$. Si dice che $f(x\,y)$ *è regolare* nel punto (ξ, η) se nell'intorno di questo punto è sviluppabile in serie di potenze di $x - \xi$, $y - \eta$; si dice che in (ξ, η) ha un *punto singolare non essenziale*, se è possibile trovare una serie di potenze $p_0(x - \xi, y - \eta)$ tale che il prodotto $p_0(x - \xi, y - \eta)\, f(x\,y)$ sia regolare nel punto (ξ, η); e cioè quando la $f(x\,y)$ si può porre nella forma $f(x\,y) = \dfrac{p_1(x - \xi, y - \eta)}{p_0(x - \xi, y - \eta)}$ dove $p_1(x - \xi, y - \eta)$ indica essa pure una serie di potenze di $x - \xi$, $y - \eta$. Ogni altro punto sarà per la funzione un punto *singolare essenziale* (**).

Nel presente lavoro mi propongo di mostrare che le varietà formate dai punti singolari *essenziali* soddisfanno a condizioni assai restrittive; o, il che è lo stesso, che i campi in cui una funzione può essere meromorfa (***) sono di natura particolare. Così verrà mostrato che è erronea l'affermazione del Weierstrass che, analogamente a quanto avviene per le funzioni di una sola

(*) Sovente per la validità di quanto segue si potrà anche considerare un ramo monodromo di una funzione polidroma.

(**) Così sono punti singolari essenziali anche quelli di un campo (lacunare) cui non si possa giungere per prolungamento analitico.

(***) E cioè in cui la funzione può non avere punti regolari e punti singolari non essenziali: secondo Weierstrass si direbbe: *in cui una funzione può avere comportamento di una funzione razionale.*

variabile, assegnato ad arbitrio un campo continuo a 4 dimensioni nello spazio in cui sono rappresentate le variabili complesse $x\,y$, esiste sempre una funzione meromorfa in esso, che ha singolarità essenziali in ogni punto del contorno di questo (*).

La natura degli insiemi di punti singolari di una funzione analitica è già stata studiata dall'Hartogs (**) nei suoi bei lavori partendo sia dalla formula di Cauchy sia dagli sviluppi in serie di potenze: però l'Hartogs non riesce a scindere nelle sue considerazioni i punti singolari essenziali dai non essenziali, cosicchè i suoi risultati nulla ci dicono sui punti singolari essenziali limiti di punti singolari non essenziali; e limitano la natura dei campi in cui la funzione può essere regolare, e non di quelli in cui può essere meromorfa.

Le deduzioni di questo lavoro hanno comune fondamento nel semplicissimo teorema del § I (n. 4 e 5) secondo il concetto esposto nel n. 6. Nel § II mostro come da questo solo principio e nel campo più ampio ora ricordato si possano facilmente dedurre tutti i principali risultati che l'Hartogs ottenne per varie vie. Nel § III determino alcune proprietà differenziali delle *ipersuperficie* che possono costituire la frontiera di un campo in cui una funzione analitica di due variabili complesse è meromorfa.

Tutti i risultati di questo lavoro si estendono senza difficoltà essenziali alle funzioni di più variabili.

2. Un'equazione $\varphi(x\,y) = 0$, dove φ è una funzione analitica di x ed y, determina nello spazio a 4 dimensioni, in cui si rappresentano i punti (x, y), una varietà a due dimensioni di natura particolare: indicherò queste varietà

(*) Weierstrass, *Untersuchungen uber die 2 r-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen*. Crelles Journal, 89. Werke II, pag. 123-133: Wird aus dem Gebiete von r complexen Veränderlichen $u_1\, u_2 \dots u_r$ auf irgend eine Weise ein 2 r-fach ausgedehntes Continuum ausgeschieden, so lassen sich stets eindeutige Functionen von $u_1, \dots u_r$ bestimmen, welche sich an allen Stellen im Innern dieses Continuums, aber an keiner Stelle seiner Begrenzung wie rationale Functionen verhalten.

(**) Fritz Hartogs: — 1.° *Zur Theorie der analytischen Functionen mehrerer unabhängiger Veranderlichen, etc.* Math. Annalen, Bd. 62, pag. 1-88. — 2.° *Einige Folgerungen aus der Cauchy'schen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veranderlichen*. Münchener Sitzungsberichte, Bd. 36 (1906). — 3.° *Ueber die aus den singularen Stellen einer analytischen Funktion mehrerer Veranderlichen bestehenden Gebiete*. Acta Mathematica, Vol. 32 (1909), pag. 57-79.

Vedi anche il rapporto riassuntivo dell'Hartogs nei Jahresber. der Deutscher Math. Vereinigung, 16 (1907), pag. 223 e ss. *Ueber neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Veranderlichen.*

col nome di *varietà* o *superficie caratteristiche* (*): in particolare un'equazione lineare tra x ed y rappresenta un *piano caratteristico*.

Un punto di una superficie caratteristica $\varphi(x\,y) = 0$ può essere: *regolare* o *critico* se la superficie può nell'intorno di esso essere rappresentata col dare x (od y) in serie di potenze intere o fratte di y (od x): *singolare* se è un punto singolare di $\varphi(x\,y)$ limite di punti in cui è $\varphi(x\,y) = 0$.

Con queste definizioni risulta che noi potremo parlare di *multiplicità di intersezione* di un piano caratteristico con una superficie caratteristica in un punto regolare o critico per questa: risulta pure che, data una superficie caratteristica che in $(\xi\,\eta)$ abbia un punto regolare o critico, esiste un intorno σ di $(\xi\,\eta)$ sufficientemente piccolo ed un numero m tale che ogni piano caratteristico $x = \text{cost.}$ ha in σ al più m punti — contato ognuno colla sua molteplicità, — comuni con essa, fatta eccezione per il piano $x = \xi$ che può appartenere alla superficie medesima.

Applichiamo queste considerazioni ai punti singolari non essenziali di una funzione $f(x\,y)$. Se (ξ, η) è un tale punto, e se precisamente nell'intorno di esso è $f(x\,y) = \dfrac{p_1(x - \xi,\ y - \eta)}{p_0(x - \xi,\ y - \eta)}$, i soli punti singolari di $f(x\,y)$ che esistono nell'intorno di $(\xi\,\eta)$ sono punti singolari non essenziali i quali appartengono alla varietà caratteristica $p_0(x - \xi,\ y - \eta) = 0$: (ξ, η) è su essa un punto regolare o critico. Ne segue:

Osservazione I. Se $(\xi\,\eta)$ è un punto regolare o singolare non essenziale di $f(x\,y)$ si può trovare un intorno σ di esso ed un numero m, tale che ogni piano $x = \text{cost.}$ abbia in σ al più m punti singolari di $f(x\,y)$ tutti non essenziali, fatta eventualmente eccezione per il piano $x = \xi$ che può far parte della varietà caratteristica di punti singolari non essenziali cui appartiene $(\xi\,\eta)$. Infatti se $(\xi\,\eta)$ è regolare non esistono punti singolari nel suo intorno: si può fare $m = 0$. Se $(\xi\,\eta)$ è singolare non essenziale è questa un'immediata conseguenza del fatto che i punti singolari di $f(x\,y)$ nell'intorno di $(\xi\,\eta)$ costituiscono una varietà caratteristica per cui $(\xi\,\eta)$ è regolare o critico.

L'osservazione precedente vale pure quando si conti ogni punto $(\xi'\,\eta')$ singolare non essenziale per $f(x\,y)$ come multiplo secondo il numero che

(*) Seguendo la terminologia proposta dal Levi-Civita: *Sulle funzioni analitiche di due o più variabili complesse*. Rend. della R. Accademia dei Lincei, (1905) vol. XIV, sem. 2, pag. 492-9. Tali varietà sono invero le varietà caratteristiche rispetto al problema di Cauchy per il noto sistema di equazioni cui devono soddisfare la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione di due variabili.

rappresenta l'ordine del polo che $f(\xi\, y)$ ha in $y=\eta$ (*). Invero tale ordine è sempre inferiore all'ordine infinitesimale di $p_n(x-\xi,\ y-\eta)$ in $x=\xi$, $y=\eta$.

Osservazione II. Se un piano $x=\xi$ non è tutto di punti singolari non essenziali per $f(x\,y)$, ma su esso esistono infiniti punti singolari non essenziali di $f(x\,y)$, ogni punto $(\xi\,\eta)$ limite di questi punti singolari non essenziali è un punto singolare essenziale di $f(x\,y)$. Infatti tale punto per l'osservazione precedente non può essere nè regolare, nè singolare non essenziale.

3. Aggiungiamo un lemma sullo sviluppo di LAURENT.

LEMMA. *Sia $f(x\,y)$ una funzione regolare nei punti in cui*

$$|x| \leq \delta, \quad k_1 \geq |y| \geq k_2 .$$

Essa si svilupperà in serie di LAURENT *rapporto ad y con coefficienti funzioni analitiche di x per $|x| \leq \delta$:*

$$f(x\,y) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, y^n. \tag{1}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè questa funzione sia meromorfa nel campo $|x| \leq \delta$, $|y| \leq k_1$ è che esista un numero finito $l+1$ di funzioni analitiche di x: $A_0(x), A_1(x), \dots, A_l(x)$ tali che sia identicamente per $n<0$:

$$A_0(x)\, g_{n+l}(x) + A_1(x)\, g_{n+l-1}(x) + \cdots + A_l(x)\, g_n(x) = 0. \tag{2}$$

Per maggior chiarezza premettiamo l'osservazione che, se delle funzioni $A_0, A_1, \dots, A_l$ esistono le quali soddisfano alle (2), esse potranno certamente ritenersi funzioni regolari analitiche di x per $|x| \leq \delta$. Infatti osserviamo che le $g_n(x)$ sono funzioni analitiche regolari per $|x| \leq \delta$; e quindi, se le (2) sono equazioni compatibili nelle $A_i(x)$, esse si possono risolvere con funzioni analitiche di x regolari per $|x| \leq \delta$.

Ciò posto, la condizione è sufficiente. Infatti la funzione

$$\varphi(x\,y) = f(x\,y)\,.\,[A_0(x)\, y^l + A_1(x)\, y^{l-1} + \cdots + A_l(x)]$$

sarà come la $f(x\,y)$ una funzione regolare per $|x| \leq \delta$, $k_1 \geq |y| \geq k_2$. Ma

(*) È noto che i soli punti in cui la funzione $f(\xi\, y)$ della variabile y può avere un polo sono i punti $(\xi\,\eta)$ in cui $f(x\,y)$ ha una singolarità non essenziale: non viceversa.

per (1) e (2) essa si svilupperà in questo campo nella forma

$$\varphi(x\,y) = \sum_0^\infty \left[A_0(x)\, g_\nu(x) + A_1(x)\, g_{\nu+1}(x) + \cdots + A_l(x)\, g_{\nu+l}(x) \right] y^\nu$$

e cioè per sole potenze positive di y: onde segue che essa è regolare analitica per $|x| < \delta$, $|y| \leq k_1$. Quindi si avrà che

$$f(x\,y) = \frac{\varphi(x\,y)}{A_0(x)\, y^l + A_1(x)\, y^{l-1} + \cdots + A_l(x)},$$

come quoziente di due funzioni analitiche regolari nel campo $|x| < \delta$, $|y| \leq k_1$, sarà meromorfa nel campo medesimo.

La condizione è necessaria. Infatti poichè $f(x\,y)$ è regolare per $|x| < \delta$, $k_1 \geq |y| \geq k_2$, nessun piano $x = x_0$ con $|x_0| < \delta$ è una varietà di punti singolari non essenziali di $f(x\,y)$: onde per l'osservazione II del n. 2 su esso esiste nel cerchio $|y| \leq k_2$ un numero finito di punti singolari non essenziali. Sia m_{x_0} il numero di tali punti sul piano $x = x_0$, ognuno contato colla multiplicità che ha il polo di $f(x_0\,y)$ in esso: m_{x_0} avrà per $|x_0| < \delta$ un massimo l. Infatti ove questo non esistesse, vi sarebbe un punto $(\xi\,\eta)$ con $|\xi| \leq \delta$ e $|\eta| \leq k_2$ tale che si troverebbero piani $x = x_0$ che dentro ad un intorno arbitrariamente piccolo di esso, avrebbero un numero di punti singolari non essenziali superiore ad ogni numero fissato grande a piacere: e ciò contraddice per l'osservazione I del n. 2 all'ipotesi che $\xi\,\eta$ sia un punto regolare non essenziale.

Concludendo su ogni piano $x = x_0$ (con $|x_0| < \delta$) $f(x_0\,y)$ ha al più l poli, distinti o coincidenti, entro il cerchio $|y| \leq k_2$ e quindi entro il cerchio $|y| \leq k_1$; onde potremo costrurre un'equazione

$$A_0(x)\, y^l + A_1(x)\, y^{l-1} + \cdots + A_l(x) = 0 \tag{3}$$

tale che per ogni valore di x i poli di $f(x\,y)$ siano tra le radici di essa, ciascuno contato colla sua molteplicità. La funzione

$$f(x\,y) \left[A_0(x)\, y^l + A_1(x)\, y^{l-1} + \cdots + A_l(x) \right]$$

sarà quindi su ogni piano $x =$ cost. una funzione della variabile y regolare entro il cerchio $|y| \leq k_1$ onde il suo sviluppo per potenze di y deve mancare di potenze negative. E ciò richiede che le $A_i(x)$ così costruite soddisfacciano identicamente alle equazioni (2).

Osservazione. Il numero l che compare nel precedente enunciato è un limite superiore per il numero dei punti singolari non essenziali di $f(x\,y)$ appartenenti ad un piano $x = x_0$ con $|x_0| < \delta$.

4. Premesso questo lemma possiamo dimostrare il seguente

Teorema. *Sia $f(x\,y)$ una funzione analitica di x ed y che nel punto $(0\,0)$ abbia una singolarità essenziale, mentre nei punti di un certo intorno $|y| \leq k$ dell'origine appartenenti al piano $x = 0$ sia meromorfa. Dato un numero ε piccolo a piacere, è sempre possibile trovare un numero δ tale che in ogni piano $x = x_0$ con $|x_0| < \delta$ esista sempre almeno un punto singolare essenziale per $f(x\,y)$ per cui è $|y| \leq \varepsilon$* (*).

Intanto possiamo supporre che nei punti del piano $x = 0$ la funzione sia generalmente regolare: poichè altrimenti i punti generici del piano $x = 0$ sarebbero tutti punti singolari non essenziali, e quindi esisterebbe un numero n tale che $x^n f(x\,y)$ avrebbe ancora come $f(x\,y)$ il punto $(0\,0)$ come punto singolare essenziale, e sarebbe meromorfa, ma generalmente regolare per $x = 0$, $y \neq 0$.

Ciò posto le nostre ipotesi dicono che $f(x\,y)$ può avere dei punti singolari non essenziali nei punti $(0\,y)$ con $y \neq 0$, ma l'unico punto limite che essi possono avere è, per l'osservazione II del n. 2, il punto $(0\,0)$. Onde fissato ε, potremo trovare nel piano $(0\,y)$ una corona circolare di centro l'origine limitata dai cerchi di raggio k_1 e k_2 $(k_1 > k_2)$, interna ad ambedue i cerchi $|y| \leq k$, $|y| \leq \varepsilon$, tale che in qualunque punto di essa e del suo contorno $f(x\,y)$ sia regolare: onde per il teorema di Laurent nel campo medesimo si potrà sviluppare in serie di potenze positive e negative di y:

$$f(x\,y) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, y^n$$

dove le $g_n(x)$ sono funzioni analitiche di x per $|x| \leq \delta$. E poichè il punto $(0\,0)$ è un punto singolare essenziale, per il lemma precedente le $g_n(x)$ non soddisfanno alcun sistema del tipo (2) per $|x| \leq \delta$.

Ne viene che per $|x_0| < \delta$ la $f(x\,y)$ ha sul piano $x = x_0$ entro il cerchio $|y| \leq k_2$ (e quindi a fortiori entro il cerchio $|y| \leq \varepsilon$) almeno un punto singolare essenziale. Invero, ove ciò non fosse, la $f(x\,y)$ sarebbe meromorfa

(*) Pel caso che $f(x\,y)$ sia regolare nei punti $x = 0$, $0 < |y| \leq k$, questo teorema è stato dimostrato dall'Hartogs, l. c. 2°; e poi con una dimostrazione del tipo di quella usata nel testo in l. c. 3°.

in tutti i punti del piano $x = x_0$, $|y| = k$, e vi avrebbe un numero finito di punti singolari non essenziali, poichè altrimenti per l'osservazione II del n. 2 esso sarebbe tutto di punti singolari non essenziali il che è contrario all'ipotesi che per $x = x_0$, $k_1 \geq |y| \geq k_2$, $f(x\,y)$ sia regolare. Quindi esisterebbe un campo $|x_0 - x| < \delta'$, $|y| \leq k_1$ in cui la funzione $f(x\,y)$ avrebbe solo un numero finito di punti singolari non essenziali su ogni piano $x =$ cost.: e quindi si svilupperebbe in una serie di LAURENT:

$$f(x\,y) = \sum_{-\infty}^{\infty} g'_n(x)\, y^n, \tag{5}$$

le $g'_n(x)$ essendo funzioni regolari analitiche di x per $|x - x_0| < \delta'$: e per il lemma del n. precedente esisterebbe un numero l tale che le $g'_n(x)$ soddisfanno (per $n < 0$) ad un sistema del tipo (2). Ma poichè i campi $|x - x_0| < \delta'$, $k_1 \geq |y| \geq k_2$, e $|x| < \delta$, $k_1 \geq |y| \geq k_2$ hanno un campo a quattro dimensioni comune, i due sviluppi (4) e (5) coincidono: e ciò è assurdo poichè le $g_n(x)$ di (4) non possono soddisfare alcun sistema del tipo (2).

Corollario. L'insieme dei punti singolari essenziali di una funzione analitica di due variabili complesse è perfetto (*). Infatti esso è chiuso: e per il teorema precedente non contiene alcun punto isolato.

5. Il teorema precedente si può immediatamente estendere quando al punto $(0\,0)$ si sostituisca un punto $(\xi\,\eta)$ generico, alla famiglia dei piani caratteristici $x =$ cost., una famiglia di varietà caratteristiche *regolare* nell'intorno del punto (ξ, η). Con quest'ultima espressione vogliamo indicare una famiglia di superficie caratteristiche regolari nell'intorno di $(\xi\,\eta)$ dipendenti analiticamente da un parametro α per modo che per ogni punto dell'intorno passi una ed una sola superficie della famiglia. Perchè l'equazione $\varphi(x, y, \alpha)$ rappresenti una tale famiglia occorre quindi e basta: 1.° che per $\alpha = \alpha_0$ sia $\varphi(\xi, \eta, \alpha_0) = 0$; 2.° che per ogni punto $(x\,y)$ dell'intorno di $(\xi\,\eta)$ passi una ed una sola superficie della famiglia, in altri termini che l'equazione $\varphi(x, y, \alpha) = 0$ si possa risolvere rapporto ad α, e cioè che sia $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{\xi\,\eta\,\alpha_0} \neq 0$; 3.° che $(\xi\,\eta)$ ed ogni punto dell'intorno sia regolare per la superficie passante per esso.

(*) Era noto che un punto singolare non può essere isolato, e quindi che l'insieme dei punti singolari è perfetto. Il corollario ci dice che esso rimane perfetto se ne sopprimiamo l'insieme dei punti singolari non essenziali.

e cioè che una almeno delle variabili x oppure y si possa esprimere per una serie di potenze intere di y od x rispettivamente: deve esser quindi $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\xi\eta} \neq 0$, oppure $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{\xi\eta} \neq 0$.

Ciò posto, a dimostrare la nostra affermazione, si scriva l'equazione della famiglia regolare di superficie nella forma $\psi(x\, y) = z$, il che per 2.° è possibile: e sia ad es.: $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{\xi\eta} \neq 0$. Si faccia la trasformazione di variabili $x' = \psi(x\, y) - z_0$, $y' = y - \eta$: poichè è $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{\xi\eta} \neq 0$, è questa una trasformazione regolare nel punto $(\xi\, \eta)$. Una funzione $f(x\, y)$ che abbia in (ξ, η) una singolarità essenziale e che sia meromorfa nei punti della superficie $\psi(x\, y) = z_0$ diversi da (ξ, η), diviene una funzione $F(x'\, y')$ avente una singolarità essenziale in $(0, 0)$ e meromorfa negli altri punti di $x' = 0$. Essa avrà quindi nell'intorno di $x' = 0$ $y' = 0$ un punto singolare essenziale almeno su ogni piano $x' = \text{cost.}$; e cioè la $f(x\, y)$ avrà un punto singolare essenziale almeno nell'intorno di (ξ, η) su ogni superficie $\psi(x\, y) = z$. Concluderemo dunque col seguente

Teorema. *Se $(\xi\, \eta)$ è un punto singolare essenziale per la funzione analitica, monodroma $f(x\, y)$, e si ha una famiglia regolare analitica di superficie caratteristiche nell'intorno di $(\xi\, \eta)$ tale che in questo intorno sulla superficie passante per $(\xi\, \eta)$, la $f(x\, y)$ è meromorfa tranne che nel punto $(\xi\, \eta)$, sopra ogni superficie della famiglia esiste nell'intorno di $(\xi\, \eta)$ un punto singolare essenziale almeno di $f(x\, y)$.*

6. Sarà questo il teorema fondamentale per le considerazioni che seguono. Poichè ogni volta che, dato un insieme di punti, si può prendere una famiglia analitica di superficie caratteristiche regolare in un punto $(\xi\, \eta)$ dell'insieme, tale che una di esse contenga il solo punto $(\xi\, \eta)$ dell'insieme, ma infinite ne esistono che non ne contengono alcuno, potremo conchiudere che l'insieme dato non può essere l'insieme dei punti singolari essenziali di una funzione analitica.

Ci verrà sovente utile la seguente osservazione: *Se $\varphi(x\, y) = 0$ è una superficie caratteristica regolare in $(\xi\, \eta)$, la famiglia che se ne ottiene assoggettandola a tutte le traslazioni che portano (ξ, η) nei varii punti di un piano caratteristico per (ξ, η) non tangente a $\varphi(x\, y) = 0$, è regolare in $(\xi\, \eta)$.*

Infatti se $X - \xi - p(Y - \eta) = 0$ è un tal piano, la famiglia è data da $\varphi(x - pz, y - z) = 0$; e si ha:

1.° per $z = 0$, $\varphi(\xi\,\eta) = 0$;

2.° poichè $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,0)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\xi,\eta} + p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta,0)}$ ed il piano $X - \xi = p(Y - \eta)$ non è tangente a $\varphi(x\,y) = 0$ sarà certamente $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{\xi,\eta,0} \neq 0$.

3.° poichè $\varphi(x\,y) = 0$ è regolare in $(\xi,\ \eta)$, è $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\xi,\eta} \neq 0$ oppure è $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta,0)} \neq 0$.

§ II.

7. *Sia E un insieme perfetto di punti, O un punto arbitrario fisso dello spazio, $r(O\,P)$ la distanza di O dal punto generico P di E. Se esiste un punto P' di E tale che $r(O\,P')$ sia il massimo dei valori che $r(O\,P)$ prende nell'intorno di P', non può esistere una funzione analitica monodroma la quale abbia l'insieme E come insieme di punti singolari essenziali.*

Si supponga per semplicità che O sia l'origine, che le coordinate di P' siano $(\xi,\ \eta)$ e che ad es. sia $\xi \neq 0$.

Osserviamo anzitutto che è sempre possibile costruire una superficie caratteristica data da un'equazione

$$x = \xi + a(y - \eta) + b(y - \eta)^2 + c(y - \eta)^3 + \cdots \tag{1}$$

passante per P', regolare in questo punto e tale che i suoi punti nell'intorno di P' diversi da P' abbiano da O una distanza maggiore (non mai uguale) di $r(O\,P')$: basta perciò disporre convenientemente dei valori di a e b. Invero, posto $a = a_1 + i\,a_2$, $b = b_1 + i\,b_2$, le equazioni reali contenute in (1) sono

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \xi_1 &= a_1(y_1 - \eta_1) - a_2(y_2 - \eta_2) + b_1(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\qquad - b_1(y_2 - \eta_2)^2 - 2\,b_2(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \cdots \\ x_2 - \xi_2 &= a_2(y_1 - \eta_1) + a_1(y_2 - \eta_2) + b_2(y_1 - \eta_1)^2 - \\ &\qquad - b_2(y_2 - \eta_2)^2 + 2\,b_1(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Quindi posto $\varphi(y_1\,y_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{2} r^2(O\,P')$ dove x_1, x_2

[illegible] dalle (2) sarà:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)_{\xi\eta} &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \eta_1 \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)_{\xi\eta} = \xi_2 a_1 - \xi_1 a_2 + \eta_2 \\
\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}\right)_{\xi\eta} &= 1 + |a|^2 + 2(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) \; \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\right)_{\xi\eta} = 1 + |a|^2 - 2(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) \\
&\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_{\xi\eta} = 2(\xi_2 b_1 - \xi_1 b_2).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Affinchè dunque la φ e quindi la distanza da O dei punti di (1) abbia un minimo effettivo nel punto (ξ, η) basterà che: 1.° le $a_1\, a_2$ siano determinate per modo che

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)_{\xi\eta} &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \eta_1 = 0 \\
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)_{\xi\eta} &= \xi_2 a_1 - \xi_1 a_2 + \eta_2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

il che è sempre possibile poichè il determinante di queste equazioni lineari è uguale a $-|\xi|^2 \neq 0$ per ipotesi: 2.° inoltre b_1 e b_2 siano tali che

$$0 > \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\right]_{\xi\eta} = 4\,|\xi|^2 . |b|^2 - (1 + |a|^2)^2 \tag{5}$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}\right)_{\xi\eta} > 0. \tag{6}$$

Ma quanto a (5) basterà prendere $|b| < \dfrac{1 + |a|^2}{2\,|\xi|}$ perchè risulti soddisfatta; ed allora la (6) sarà soddisfatta di necessità poichè $\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}\right)_{(\xi\eta)}$ e $\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\right)_{(\xi\eta)}$ avranno certamente il medesimo segno, e precisamente lo stesso segno della loro somma, che per le (3) è

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}\right)_{\xi\eta} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\right)_{\xi\eta} = 2\,(1 + |a|^2) > 0.$$

Ciò posto, supponiamo dato un insieme E quale è stato detto nell'enunciato. Costruiamo come si è fatto ora una superficie caratteristica S passante per P' regolare in P', tale che tutti i suoi punti nell'intorno di P' abbiano da O una distanza maggiore di $r(OP')$ ed assoggettiamo S a tutte le traslazioni che portano P' in un punto del piano caratteristico passante per OP'. Questo piano non può essere il piano tangente in $(\xi\eta)$ a S; infatti le (4) esprimono precisamente che il piano caratteristico tangente a S giace nell'iperpiano $\xi_1(X_1 - \xi_1) + \xi_2(X_2 - \xi_2) + \eta_1(Y_1 - \eta_1) + \eta_2(Y_2 - \eta_2) = 0$, normale alla retta che congiunge O con P', la quale è invece contenuta nel piano caratteristico OP'. Quindi pel n. 6 la famiglia di superficie caratteristiche così costruita è regolare nel punto P'. E delle superficie di questa famiglia, la superficie S ha nell'intorno di P' il solo punto P' comune con E; mentre le infinite superficie S' che si hanno per una traslazione sufficientemente piccola lungo la retta $\overrightarrow{OP'}$ nel verso da O a P', non hanno nell'intorno di P' alcun punto comune con E (*). Se ora fosse E l'insieme dei punti singolari essenziali di una funzione $f(xy)$ meromorfa e monodroma, la superficie S non avrebbe nell'intorno di P' che il solo punto P' singolare essenziale per $f(xy)$, e le superficie S' non avrebbero punti singolari essenziali per $f(xy)$: ora questo contraddice al teorema del n. 5: quindi è assurda l'esistenza di $f(xy)$.

Corollarii. I. *L'insieme dei punti singolari di una funzione $f(xy)$ non può contenere una parte perfetta isolata tutta al finito.* Poichè evidentemente in una tale parte esisterebbe un punto quale il punto P' del teorema precedente.

In particolare si può dare a questo corollario la forma seguente:

II. *Se una funzione $f(xy)$ è meromorfa in tutti i punti di una ipersuperficie chiusa, è meromorfa all'interno di essa* (**). Onde segue ad esempio che *una funzione monodroma, meromorfa di due variabili non può avere spazii lacunari tutti al finito.* È questo un primo teorema che contraddice all'affermazione del Weierstrass richiamata al n. 1: ne vedremo tosto altri anche più interessanti nei nn. seguenti e nel § III.

8. Dal precedente teorema è però agevole trarre conseguenze un po' più nascoste che i precedenti corollarii.

Consideriamo nei piani $y = cost.$ il cerchio $|x| \leq r$, nei piani $x = cost.$

(*) Poichè per tale traslazione il punto P' si allontanerà da O e lo stesso accadrà dei punti di un intorno di P'.

(**) Per le funzioni olomorfe in tutti i punti di una ipersuperficie chiusa vedi Hartogs, l. c., Münch. Sitz. Ber.

un campo B_1, che supponiamo tutto interno al cerchio $|y| \leq r_1$, e chiamiamo C_1 il suo contorno. Supponiamo che una funzione $f(x\, y)$ sia meromorfa:

a) *in tutti i punti $(0,\, y)$ dove y è in B_1 o su C_1,*

b) *in tutti i punti $(x\, y)$ dove y è su C_1 e $|x| < r$:*

allora potremo affermare che la funzione $f(x\, y)$ è meromorfa in tutti i punti $(x\, y)$ dove $|x| < r$ ed y è in B_1.

Se il teorema non fosse vero, esisterebbe un punto singolare essenziale $(\xi\, \eta)$ per cui $|\xi| < r$ ed η è in B_1: poniamo $|\xi| = \rho$.

Facciamo allora la trasformazione $X = \dfrac{k}{x}$ dove $k = \dfrac{r_1\, r\, \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$. La funzione $f(x\, y)$ diverrà una funzione $F(X\, y)$; e siccome la funzione $f(x\, y)$ è meromorfa nei punti $(0,\, y)$ quando y è in B_1 o su C_1, e quindi pure esiste un numero σ tale che $f(x\, y)$ è meromorfa in tutti i punti $(x\, y)$ per cui y è in B_1 o su C_1 e $|x| \leq \sigma$, anche la $F(X\, y)$ è meromorfa in tutti i punti $(X,\, y)$ per cui $|X| \geq \dfrac{k}{\sigma}$ e y è in B_1 o su C_1; e poichè la funzione $f(x\, y)$ è meromorfa in tutti i punti $(x\, y)$ per cui $|x| < r$ ed y è su C_1, la $F(X\, y)$ è pure meromorfa in tutti i punti $(X\, y)$ per cui $|X| > \dfrac{k}{r} = \dfrac{r_1\, \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$ e y su C_1; ed infine $F(X\, y)$ avrà nel punto $\left(\dfrac{k}{\xi},\, \eta\right)$, per l'ipotesi fatta su $f(x\, y)$, un punto singolare essenziale interno al campo $\left[|X| > \dfrac{r_1\, \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},\ y \text{ in } B_1\right]$.

Consideriamo l'insieme E_1 dei punti singolari essenziali di $F(X\, y)$ all'interno o sul contorno del campo $\left[|X| > \dfrac{r_1\, \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},\ y \text{ in } B_1 \text{ o su } C_1\right]$; sarà questo un insieme perfetto tutto al finito, e di più, poichè la funzione $F(X\, y)$ è meromorfa per y su C_1 ed $|X| > \dfrac{r_1\, \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^3}}$, se esistono punti di E_1 sul contorno del campo essi appartengono necessariamente alla varietà $\left[|X| = \dfrac{r_1\, \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},\ y \text{ in } B_1\right]$. D'altra parte se diciamo R il massimo della distanza di un punto di E_1 dall'origine, poichè $\left(\dfrac{k}{\xi},\, \eta\right)$ è un punto di E_1 sarà certamente $R \geq \sqrt{\left|\dfrac{k}{\xi}\right|^2 + |\eta|^2} > \dfrac{k}{\rho} = \dfrac{r\, r_1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$. Ne segue che un punto P' di E_1 il quale disti dall'origine di R è certamente interno al campo $\left[|X| > \dfrac{r_1\, \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},\right.$

y in B_1 o su $C_1\Big]$, perchè la sfera $|X|^2 + |y|^2 = R^2$ incontra la varietà

$|X| = \dfrac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$ in punti per cui è $|y| = \sqrt{R^2 - \dfrac{r_1^2 \rho^2}{r^2 - \rho^2}} > r_1$ e quindi certo all'esterno del campo B_1.

Trovandosi P' all'interno — e non sul contorno — del campo $\left[|X| > \dfrac{r_1 \rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \ y \text{ in } B_1\right]$, ne segue che nell'intorno di P' non si trovano altri punti singolari essenziali di $F(X\, y)$ oltre a quelli di E_1; onde il punto P' si troverà nelle condizioni del teorema del n. precedente: il che è assurdo. Quindi anche $f(x\, y)$ non può certamente avere un punto singolare essenziale all'interno del campo $|x| < r$, y in B_1 c. v. d.

9. Invece di considerare sui piani $y = \text{cost.}$ il cerchio $|x| = r$, si potrà evidentemente considerare un campo B che si possa rappresentare conformemente su un cerchio di raggio r: poichè se $x' = \psi(x)$ è la funzione analitica della variabile x che dà questa rappresentazione conforme, la trasformazione $x' = \psi(x)$, $y = y$ sarà regolare per x interno a B ed y qualunque, onde muta la funzione $f(x\, y)$ in una funzione $F(x'\, y)$ che sarà meromorfa all'interno del campo $[|x'| < r, \ y$ in $B]$, allora ed allora soltanto che la funzione $f(x\, y)$ è meromorfa per x interno al campo B ed y interno al campo B_1. Onde potremo conchiudere:

Se B rappresenta un campo qualunque nei piani $y = \text{cost.}$ che si possa rappresentare conformemente su un cerchio ed $x = a$ è un punto di esso, se B_1 rappresenta un campo interno al cerchio $|y| \leq r_1$ e C_1 ne indica il contorno, se infine $f(x\, y)$ è una funzione meromorfa

a) *in tutti i punti $(a\, y)$ dove y è in B_1 o su C_1,*

b) *in tutti i punti $(x\, y)$ dove x è in B e y su C_1,*

allora potremo affermare che la funzione $f(x\, y)$ è meromorfa in tutti i punti $(x\, y)$ per cui x è in B ed y in B_1 o su C_1 (*).

10. Sia $f(x\, y)$ una funzione meromorfa sul piano $x = 0$ quando y è interno ad un certo campo B_1 tutto al finito o sul contorno C_1 di esso; sopra ogni piano $y = y_0$, y_0 essendo un punto di B_1 o C_1, esisterà un massimo

---

(*) Pel caso che la $f(x\, y)$ sia olomorfa vedi Hartogs, l. c. 2.º cerchio di centro $x = 0$ entro cui $f(x\, y)$ è meromorfa. Diciamo R_{y_0} il raggio di tale cerchio (*): sarà R_{y_0} la minima distanza dal piano $x = 0$ dei punti singolari essenziali di $f(x\, y)$ appartenenti al piano $y = y_0$. Osserviamo subito per la R_y la seguente proprietà:

La funzione R_y è semicontinua inferiormente: ossia, *assegnato un numero ε, è sempre possibile trovare un numero δ tale che per $|y - y_0| < \delta$ sia $R_y \geq R_{y_0} - \varepsilon$.*

Infatti ove ciò non fosse esisterebbero infiniti valori $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$ tali che $\lim_{i=\infty} y_i = y_0$ e $R_{y_i} < R_{y_0} - \varepsilon$. I punti singolari essenziali $(x_i\, y_i)$ con $|x_i| = R_i$ che si trovano nei piani $y = y_i$ avrebbero allora un punto limite $(x_0\, y_0)$ con $|x_0| \leq R_{y_0} - \varepsilon$, e questo sarebbe necessariamente un punto singolare essenziale, il che è assurdo poichè per ipotesi entro al cerchio $|x| < R_{y_0}$ sul piano $y = y_0$ non esistono punti singolari essenziali.

Ma dal teorema del n. 8 segue una proprietà ancora più notevole:

Se p_y è una funzione reale di y_1 ed y_2, definita in B_1, che sul contorno C_1 soddisfa alla limitazione $0 < p_y \leq R_y$ ed all'interno di B_1 all'equazione $\Delta''_2 \log p_y = 0$ (**), in tutti i punti di B_1 sarà pure

$$p_y \leq R_y . \tag{7}$$

Infatti su C_1, poichè è $0 < p_y \leq R_y$, $\log p_y$ è sempre finito: l'ipotesi che in B_1 sia $\Delta''_2 \log p_y = 0$ porta che $\log p_y$ sia sempre finita e regolare: quindi sarà sempre $p_y > 0$ anche all'interno di B_1.

Indichiamo con q_y la funzione coniugata di $\log p_y$ — fissandone arbitrariamente la costante additiva —; le funzioni

$$\varphi(y) = \log p_y + i\, q_y$$

$$\psi(y) = e^{\varphi(y)} = p_y\, e^{i q_y}$$

sono funzioni regolari analitiche di y in B_1; e sarà $|\psi(y)| = p_y > 0$.

(*) L'Hartogs chiama analogamente R'_{x_0} la minima distanza di un punto singolare essenziale o no del piano $x = x_0$ dal piano $y = 0$. Cfr. l. c., *Math. Ann.* E mediante considerazioni sugli sviluppi in serie dimostra per questa funzione proprietà analoghe a quelle che seguono nel testo. Cfr. specialmente i §§ 5, 6, 8, 10.

(**) Poniamo qui e nel seguito $\Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $\Delta''_2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$.

Facciamo allora la trasformazione

$$X = \frac{x}{\psi(y)} \qquad\qquad Y = y. \tag{8}$$

È questa una trasformazione regolare invertibile in tutti i punti per cui y è interno a B_1 o su C_1: e se, come segue dall'ipotesi che su C_1 sia $R_y > p_y$, la $f(x\, y)$ è meromorfa

$a)$ nei punti $(0\, y)$ per cui y è in B_1 o su C_1.

$b)$ nei punti $(x\, y)$ quando y è su C_1 e $|x| < p_y$:

la funzione $F(X\, Y)$ trasformata di $f(x\, y)$ per la (8) è meromorfa

$a')$ nei punti $(0\, Y)$ per cui Y è in B_1 o su C_1.

$b')$ nei punti $(X\, Y)$ per cui Y è su C_1 e $|X| < 1$.

Segue dal teorema del n. 8 che $F(X\, Y)$ è meromorfa in tutti i punti $(X\, Y)$ per cui Y è in B_1 o su C_1, e $|X| < 1$; ossia che $f(x\, y)$ è meromorfa in tutti i punti per cui y è in B_1 o su C_1, e $|x| < |\psi(y)| = p_y$. Quindi sarà certo $R_y \geqq p_y$: c. v. d.

Dai due teoremi dimostrati per R_y seguono, ragionando come fa l'Hartogs nella Memoria citata dei *Math. Ann.* al § 8 (n. 1, Zusatz, pag. 47 e 48; e n. 3), i seguenti corollarii:

1.° *Mantenute le notazioni del teorema precedente, se anche in un sol punto y_0 interno a B_1 è $R_{y_0} = p_{y_0}$ sarà allora ovunque in B_1*

$$R_y = p_y:$$

2.° *Se R_y ammette le derivate dei primi due ordini rapporto ad y_1 e y_2, essa soddisfa alla disuguaglianza*

$$\Delta''_2 \log R_y \leqq 0.$$

Il teorema precedente ed il suo primo corollario sono — insieme col teorema fondamentale del § 1 — i teoremi su cui fonda l'Hartogs tutti i ragionamenti che svolge nella Memoria citata degli *Acta Mathematica*: senza ripeterli quindi noi potremo conchiudere coi seguenti enunciati che si ottengono da quelli dell'Hartogs mutando le parole « funzione regolare » e « punto singolare » nelle parole « funzione meromorfa » e « punto singolare essenziale. »

I. *Se $x = 0$ $y = 0$ è un punto singolare essenziale per una funzione ana-*

tile $f(x\,y)$ *monodroma* (*) *di* x *ed* y; *e se l'insieme dei punti singolari essenziali di* $f(x\,y)$ *in un certo intorno* $|x| < \rho$, $|y| < \rho'$ *dell'origine è così costituito che in ogni piano* $x = x_0$ *di esso vi sia al più un punto singolare essenziale mentre nei residui la funzione è meromorfa, esiste allora su ogni piano* $x = \xi$ *dove* ξ *appartiene ad un conveniente intorno dello zero un punto singolare essenziale* $(\xi, \varphi(\xi))$, *e la funzione* $\varphi(\xi)$ *è una funzione analitica regolare di* ξ (l. c., pag. 70).

II. *Se nelle stesse condizioni del teorema precedente su ogni piano* $x = \xi \neq 0$ *esistono proprio* r *punti singolari essenziali di* $f(x\,y)$ $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$, *le loro funzioni simmetriche elementari sono funzioni regolari analitiche di* ξ; *od in altri termini le* $\tau_i(\xi)$ *sono funzioni analitiche di* ξ *le quali per* $\xi = 0$ *hanno al più un punto di diramazione* (l. c., pag. 76).

Non tralasceremo di notare che la proprietà dimostrata per la funzione R è in certa qual guisa *caratteristica* per essa: precisamente che *se è assegnata una funzione* U, *reale, finita, avente derivate prime e seconde finite e continue e soddisfacente alla condizione* $\Delta^2_2 U_1 = 0$ *in un campo* T, *è sempre possibile trovare una funzione* $f(x\,y)$ *per cui la funzione* R_n *sia in* T *uguale ad* e^{U_y}. Infatti in queste ipotesi l'HARTOGS costruisce (**) una funzione $\varphi(x\,y)$ che ha in ogni piano $y = y_0$ sopra il cerchio di raggio e^{U_y} e centro l'origine un punto singolare essenziale o no, ed è regolare all'interno del cerchio: basterà allora considerare la funzione $f(x\,y) = e^{\varphi(x\,y)}$, perchè la nuova funzione ottenuta pure restando regolare all'interno di quei cerchi abbia sul contorno di essi una singolarità essenziale.

§ III.

11. Sia $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ una ipersuperficie S dello spazio a 4 dimensioni: vogliamo esaminare quando essa possa essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica meromorfa: in altri termini vogliamo

(*) Evidentemente si può anche supporre $f(x\,y)$ un ramo monodromo nell'intorno del punto (0 0) di una funzione polidroma. L'HARTOGS tratta anche il caso in cui $f(x\,y)$ abbia un punto critico in (0 0), non sarebbe difficile anche a noi raggiungere con qualche complemento la stessa estensione.

(**) L. c., *Math. Ann.*, § 10.

vedere quando la S è tale che esiste una funzione analitica meromorfa in una delle regioni R che hanno S per frontiera per cui tutti i punti di S siano singolari essenziali. Cambiando al più il segno di φ possiamo supporre che la regione R sia quella in cui è

$$\varphi(x_1\, x_2\, y_1\, y_2) > 0.$$

Applicheremo ancora il teorema del § 1. Consideriamo un punto $P \equiv (\xi\, \eta)$ di S, e supponiamo di poter costruire una superficie caratteristica Σ che passi per P, ed ivi sia regolare e tocchi l'ipersuperficie S, ed infine non abbia nell'intorno di P altri punti comuni con S. Essa cadrà nell'intorno di P tutta in una delle due regioni in cui S divide lo spazio: affinchè nella regione $\varphi > 0$ possa esistere una funzione $f(x\, y)$ che ammetta S come frontiera, è necessario che *ogni tale superficie caratteristica cada nella regione* $\varphi < 0$.

Infatti assoggettiamo Σ alle traslazioni che portano P nei punti del piano caratteristico che contiene la normale a S per P; poichè questo piano non è tangente a Σ, la famiglia di superficie così generata è una famiglia regolare in P. Inoltre le superficie corrispondenti ad una traslazione sufficientemente piccola diretta secondo la normale a S in P volta verso la regione in cui cade Σ non hanno nell'intorno del punto P punti comuni con S (*). Se quindi Σ giacesse nella regione $\varphi > 0$, la $f(x\, y)$ sarebbe meromorfa in tutti i punti di Σ dell'intorno di P, fuori che in P, e meromorfa in tutti i punti dell'intorno di P di queste superficie: e ciò per il teorema I è assurdo.

12. Cerchiamo dunque di costruire una superficie caratteristica Σ che goda rispetto a S nel punto $(\xi\, \eta)$ delle proprietà dette sopra. Supporremo che la φ abbia le derivate dei primi due ordini finite e continue. In un punto regolare di S non si avrà $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0$; onde sarà $\Delta'_1 \varphi \neq 0$ oppure $\Delta''_1 \varphi \neq 0$ (**).

(*) Tale affermazione è geometricamente evidente: ci si può ridurre all'intuizione geometrica nello spazio a 3 dimensioni segando con un iperpiano variabile attorno alla normale a S in P.

(**) In modo analogo a quanto si fece al n. 10 poniamo

$$\Delta'_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2;\quad \Delta''_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2;\quad \Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2};\quad \Delta''_2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}.$$

Supporremo, per fissare le idee, che nel punto $(\xi\,\eta)$ sia $\Delta'_1\varphi \neq 0$.

La superficie Σ sia allora data come nel § II dall'equazione tra le variabili complesse:

$$x = \xi + a(y-\eta) + b(y-\eta)^2 + c(y-\eta)^3 + \cdots \tag{1}$$

e cioè dal sistema di equazioni tra le variabili reali:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \xi_1 + a_1(y_1-\eta_1) - a_2(y_2-\eta_2) + b_1(y_1-\eta_1)^2 - \\ b_1(y_2-\eta_2)^2 - 2b_2(y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2) + \cdots \\ x_2 = \xi_2 + a_2(y_1-\eta_1) + a_1(y_2-\eta_2) + b_2(y_1-\eta_1)^2 - \\ b_2(y_2-\eta_2)^2 + 2b_1(y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2) + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Calcolando il valore di $\varphi(x_1\,x_2\,y_1\,y_2)$ nei punti di Σ avremo dunque, ricordando che P è su S ossia che $\varphi(\xi_1\,\xi_2\,\eta_1\,\eta_2) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x_1\,x_2\,y_1\,y_2) = (y_1-\eta_1)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}a_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}a_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right] + \\ (y_2-\eta_2)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}a_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}a_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right] + \\ (y_1-\eta_1)^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_2 + A_1\right] + \\ (y_2-\eta_2)^2\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_2 + C_1\right] + \\ 2(y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}b_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}b_2 + B_1\right] + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

i termini tralasciati essendo di ordine maggiore del secondo nelle quantità $y_1-\eta_1$, $y_2-\eta_2$. Nella (3) si deve intendere che le $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}$ siano calcolate nel punto $(\xi\,\eta)$; inoltre A_1, B_1, C_1 non dipendono da b_1 e b_2 e precisamente è:

$$\left.\begin{aligned} 2A_1 &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}a_1^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}a_1a_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}a_2^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}a_1 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}a_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}, \\ B_1 &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\right)a_1a_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}(a_1^2 - a_2^2) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right)a_1 - \\ &\qquad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right)a_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1\partial y_2}, \\ 2C_1 &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}a_2^2 - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}a_1a_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}a_1^2 - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2}a_2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}a_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dove però le derivate seconde debbono intendersi tutte calcolate in un punto intermedio del segmento che unisce $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ con (x_1, x_2, y_1, y_2). Affinchè la superficie Σ data da (2) abbia il solo punto P comune con S occorrerà intanto che sia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0. \tag{5}$$

Per l'ipotesi che in $(\xi \eta)$ sia $\Delta'_1 \varphi \neq 0$ queste equazioni ammettono sempre soluzione; e precisamente si ha

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{\Delta'_1 \varphi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right\} \\ a_2 &= \frac{1}{\Delta'_1 \varphi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Affinchè Σ sia dunque una delle superficie richieste occorre che a_1 ed a_2 siano dati dalle (6); riconosciamo subito con ciò che necessariamente è anche soddisfatta la condizione che Σ ed S siano tangenti poichè le (5) esprimono precisamente che il piano tangente a Σ giace nell'iperpiano tangente a S.

Ma le condizioni precedenti non bastano ad assicurare che Σ abbia il solo punto P comune con S; perciò basterà invece determinare b_1 e b_2 per modo che la forma quadratica costituita dai termini di secondo grado di (3) sia definita: ed anzi per la supposta continuità delle derivate seconde di φ, basterà che sia definita quella forma che si ottiene da questa col prendere per le derivate seconde delle φ che compaiono nei coefficienti di quella forma i valori che esse assumono nel punto $(\xi \eta)$: — e così intenderemo di fare d'ora in poi —. Ed allora affinchè Σ giaccia nel campo $\varphi < 0$ occorrerà che la forma sia definita negativa.

Ora affinchè questa forma sia definita occorre si abbia

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_2 + B_1\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 + A_1\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} b_2 + C_1\right) < 0 \tag{7}$$

ed allora essa sarà definita positiva o negativa a seconda che è >0 oppure <0 la somma dei coefficienti di $(y_1 - \eta_1)^2$ e $(y_2 - \eta_2)^2$: ossia secondo che

$$A_1 + C_1 > 0 \quad \text{oppure} \quad A_1 + C_1 < 0.$$

Ma perchè b_1 e b_2 si possano determinare per modo che (7) sia soddisfatta occorre e basta che sia $A_1 + C_1 \neq 0$: perchè se $A_1 + C_1 \neq 0$ basta determinare b_1 e b_2 colle condizioni che $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} b_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} b_2 + B_1 = 0$ e che $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} b_2$ sia compreso fra $-A_1$ e C_1 perchè risulti soddisfatta la (7), mentre se $A_1 = - C_1$ il primo membro di (7), come somma di due quadrati, risulterà ≥ 0.

Concludiamo dunque che se $A_1 + C_1 > 0$ si può rendere la nostra forma definita positiva, se $A_1 + C_1 < 0$, la si può rendere definita negativa. E quindi infine che affinchè non si possa costruire una superficie Σ come quella indicata al n. precedente, oppure che essa cada necessariamente nella regione $\varphi < 0$, occorre sia

$$A_1 + C_1 \leq 0. \tag{8}$$

Sostituiamo ad A_1, C_1, a_1, a_2 i valori dati da (4) e (6): la (8) diviene

$$\left.\begin{aligned} A_1 + C_1 = \frac{1}{2\Delta'_1\varphi}\Big\{\Delta'_2\varphi . \Delta''_1\varphi + \Delta''_2\varphi . \Delta'_1\varphi - 2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right]\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right] - \\ - 2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right]\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right]\Big\} \leq 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Poichè si è supposto $\Delta'_1\varphi \neq 0$ e quindi > 0, la (9) si tradurrà quindi nel chiedere che la parte tra parentesi del secondo membro di (9) sia ≤ 0. In tale forma la condizione (9) viene ad essere simmetrica nelle due coppie di variabili x_1, x_2 ed y_1, y_2, onde essa risulta indipendente dalla ipotesi che sia $\Delta'_1\varphi \neq 0$ piuttosto che $\Delta''_1\varphi \neq 0$.

Raccogliendo:

Affinchè una ipersuperficie S di equazione $\varphi(x_1\, x_2\, y_1\, y_2) = 0$ possa essere frontiera per una funzione $f(x\, y)$ analitica, monodroma, meromorfa in uno dei campi in cui essa divide lo spazio (od in parte di esso) è necessario che la quantità

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}\varphi = \Delta'_2\varphi . \Delta''_1\varphi + \Delta''_2\varphi . \Delta'_1\varphi - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right) - \\ - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

conservi nei punti di S un segno determinato.

Se si ha sempre $\mathfrak{C}\varphi < 0$ una funzione $f(x\,y)$ che abbia S come frontiera può esistere solo nel campo in cui è $\varphi > 0$; se si ha sempre $\mathfrak{C}\varphi > 0$ una funzione $f(x\,y)$ che abbia S per frontiera può esistere solo nel campo $\varphi < 0$.

Corollario. *Le sole ipersuperficie $\varphi = 0$ che possono essere frontiera comune per due funzioni $f(x\,y)$ meromorfe l'una nel campo $\varphi > 0$, l'altra nel campo $\varphi < 0$ sono le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$\mathfrak{C}\varphi = 0. \tag{11}$$

13. Sarebbe ora assai interessante rispondere alla domanda: *Le condizioni precedenti sono caratteristiche per le ipersuperficie che possono essere frontiera di qualche funzione analitica?* Con maggior precisione: *data una funzione $\varphi(x_1\,x_2\,y_1\,y_2) = 0$ tale che nei punti della ipersuperficie $\varphi = 0$ (o di un pezzo di essa) sia sempre $\mathfrak{C}\varphi > 0$, esiste sempre una funzione $f(x\,y)$ analitica, monodroma, meromorfa nei punti del campo $\varphi < 0$ dell'intorno della ipersuperficie, che abbia l'ipersuperficie medesima (o quella parte di essa) come frontiera e cioè come varietà di punti singolari essenziali?*

Non mi è riuscito di dare a questa domanda una risposta esauriente; mi pare tuttavia che non sia privo di interesse il mostrare come *nel caso particolare in cui la funzione $\varphi(x_1\,x_2\,y_1\,y_2)$ soddisfaccia nei punti in cui $\varphi = 0$ all'equazione*

$$\mathfrak{C}\varphi = 0 \tag{11}$$

è realmente possibile costrurre funzioni meromorfe sia nel campo $\varphi < 0$ che nel campo $\varphi > 0$ che abbiano per frontiera l'ipersuperficie S od almeno una parte di essa sufficientemente limitata: risultato che mi pare renda molto probabile che anche alla domanda più generale fatta sopra si dovrà rispondere affermativamente.

Dimostreremo perciò il seguente lemma che mi pare anche interessante per se medesimo:

Le ipersuperficie $\varphi(x_1\,x_2\,y_1\,y_2) = 0$ tali che nei loro punti la funzione φ soddisfa l'equazione (11) *sono tutte e sole le ipersuperficie dello spazio a quattro dimensioni composte con una semplice infinità di superficie caratteristiche.*

Affinchè l'ipersuperficie

$$\varphi(x_1\,x_2\,y_1\,y_2) = 0 \tag{12}$$

sia composta con ∞^1 superficie caratteristiche è necessario e sufficiente che si possa trovare una funzione $\psi(x_1\,x_2\,y_1\,y_2)$ tale che associando alla (12) l'e-proposta

$$\psi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \alpha \tag{13}$$

ove α indica un parametro arbitrario, si possano dalle (12) e (13) ricavare α e z le x_1, x_2 in funzione di y_1, y_2 in modo che risultino soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial y_1}. \tag{14}$$

Al sistema formato dalle (12) e (13) se ne può evidentemente sostituire uno equivalente in cui la ψ risulti indipendente da x_1 (o da x_2): onde al posto della (13) potremo supporre di avere un'equazione del tipo

$$\psi(x_2, y_1, y_2) = \alpha. \tag{15}$$

Le equazioni (14) si possono allora scrivere

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial y_2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

e queste dovranno essere soddisfatte per x_1, x_2, y_1, y_2 soddisfacenti a (12).

Le (16) sono un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali per la $\psi(x_2, y_1, y_2)$: affinchè esso ammetta una soluzione non costante occorre che sia completo (*). Formiamo l'alternata delle due equazioni, ricordando che nell'eseguire questo calcolo occorre pensare le variabili x_1, x_2, y_1, y_2

(*) Può essere utile la considerazione che segue, la quale permette di prevedere, diremo così, sinteticamente che il risultato del calcolo del testo che esprime che il sistema (16) è completo, deve riportarci all'equazione $\mathfrak{E}\varphi = 0$. Si ammetta perciò che, come è dimostrato nel n. seguente, una ipersuperficie composta di superficie caratteristiche possa sempre essere frontiera comune per due funzioni $f(x\, y)$ meromorfe l'una nel campo $\varphi > 0$, l'altra nel campo $\varphi < 0$. Ne segue pel n. 12 che per $\varphi = 0$ dovrà necessariamente essere soddisfatta l'equazione di *secondo ordine* $\mathfrak{E}\varphi = 0$. Ma d'altro canto l'esprimere che il sistema (16) è, per $\varphi = 0$, completo porta evidentemente ad un'equazione *di secondo ordine che φ deve soddisfare nei punti $\varphi = 0$. Questa equazione non può quindi differire dall'equazione* $\mathfrak{E}\varphi = 0$.

legate dalla (12): otterremo l'equazione

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\Delta''_2\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_1}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\\
+&\left|\Delta'_2\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_1}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right|\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\\
+&\left|-\Delta_2\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_1}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right|\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Ed affinchè questa equazione sia conseguenza di (16) occorrerà che il determinante dei coefficienti di (16) e (17) sia nullo: sviluppando i calcoli si ottiene che deve essere perciò — nei punti di (12)

$$\mathfrak{C} = 0.$$

Inversamente, soddisfatta questa equazione, il sistema (16) è completo: e presa una qualunque sua soluzione quale primo membro di (15), le (15) segano sulla varietà (12) un sistema semplicemente infinito di superficie caratteristiche. La simmetria rapporto alle variabili $x_1\,x_2$, e $y_1\,y_2$ del risultato indica che questo è indipendente dall'avère supposto la (12) risolubile rapporto a x_1. Il lemma è quindi pienamente dimostrato.

14. Per provare ora che preso un pezzo sufficientemente piccolo di una ipersuperficie S soddisfacente a (11) è sempre possibile costruire una funzione analitica esistente nell'intorno di S da una parte prefissata e che ha S per frontiera noi dimostreremo che, almeno quando si suppone il campo che si considera sufficientemente piccolo, si può sempre immergere la semplice infinità di superficie caratteristiche costituenti S in una doppia infinità tale che per ogni punto del campo passi una ed una sola superficie S caratteristica. Costruiremo poi una funzione analitica ($\neq 0$) che si annulli sopra infinite delle superficie caratteristiche così costruite aventi per insieme limite tutte le superficie di S: una tale funzione avrà evidentemente su S tutti punti singolari essenziali.

Il primo punto è quasi evidente. Supponiamo che l'origine sia un punto di S e che ad essa corrisponda il valore $z = 0$ del parametro z nelle (15). Supponiamo come precedentemente che il sistema (12), (15) sia nell'intorno dell'origine risolubile rapporto x_1 ed x_2: avremo

$$x_1 = \Phi_1(y_1\,y_2\,z) \qquad x_2 = \Phi_2(y_1\,y_2\,z)$$

[illegible] sono funzioni armoniche coniugate di $y_1\, y_2$, e funzioni derivabili [illegible] in un certo campo attorno ai valori $y_1 = y_2 = z = 0$. Potremo adunque scrivere:

$$x = \Phi(y\, z) \tag{18}$$

essendo Φ funzione analitica della variabile complessa y e derivabile della variabile reale z. Avremo inoltre

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)^2 = \frac{\Delta_1 \varphi}{\left|\frac{\partial(\varphi\, \psi)}{\partial(x_1\, x_2)}\right|^2} \neq 0.$$

Consideriamo allora l'insieme di superficie caratteristiche

$$x = \Phi(y\, z) + k\beta, \tag{19}$$

dove β è una variabile reale, k è un numero complesso $\neq 0$, e, tale che il rapporto $\dfrac{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{y,z=0}}{k}$ è ancora un numero complesso (non reale). Le (19) comprendono come caso particolare per $\beta = 0$ le superficie (18): di più in ogni punto dell'intorno dell'origine passa una ed una sola superficie caratteristica (19). Basta osservare che le (19) equivalgono alle

$$x_1 - \Phi_1(y_1\, y_2\, z) - k_1 \beta = 0 \qquad x_2 - \Phi_2(y_1\, y_2\, z) - k_2 \beta = 0$$

e che nel punto $x = y = z = \beta = 0$ si ha che il determinante funzionale di queste equazioni rapporto ad z e β è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} k_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} k_1 = - k\, \Im\left[\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{y,z=0}}{k}\right]$$

dove $\Im(\gamma)$ indica il coefficiente dell'immaginario di γ: e quindi per le ipotesi fatte su k è certo $\neq 0$.

Noi potremo quindi nell'intorno dell'origine determinare un campo C' interno al campo $|x| < \rho$, $|y| < \rho$ tale che per ogni punto appartenente a C' passa una ed una sola superficie caratteristica (19) corrispondente ad [illegible] σ, $|\beta| < \sigma$, ed inversamente ad ogni valore $|z| < \sigma$, $|\beta| < \sigma$ corrisponde una superficie (19) i cui punti aventi coordinata y minore in modulo a ρ sono interni a C'. È chiaro per continuità che le superficie (19) per cui $\beta > 0$

apparterranno ad una medesima delle regioni in cui S divide lo spazio, ad es.: alla $\rho > 0$, le superficie per cui $\beta < 0$ apparterranno all'altra.

Passiamo ora alla costruzione della funzione $f(x\,y)$. Consideriamo perciò un insieme di punti (α_n, β_n) tale che sia sempre $\beta_n > 0$ (o sempre $\beta_n < 0$) e che l'insieme derivato di esso sia l'insieme $\alpha \leq \sigma$, $\beta = 0$. Basta, perciò per es.: numerare al modo solito i valori razionali di α minori di σ e prendere per α_n l'n-esimo punto in tale numerazione, per β_n il valore $\frac{1}{n}$.

Consideriamo allora il prodotto infinito (*):

$$\Pi_n \left(\frac{x - \Phi(y, \alpha_n) - k\beta_n}{x - \Phi(y, \alpha_n)} \right) e^{p_n(xy)} = \Pi_n \left(1 - \frac{k}{n\,(x - \Phi(y, \alpha_n))} \right) e^{p_n(xy)} \tag{20}$$

dove

$$\left. \begin{aligned} p_n(x\,y) = \frac{k}{n\,(x - \Phi(y, \alpha_n))} + \frac{1}{2}\,\frac{k^2}{n^2\,(x - \Phi(y, \alpha_n))^2} + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{n}\,\frac{k^n}{n^n\,(x - \Phi(y, \alpha_n))^n}\,. \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

È facile vedere che il prodotto (20) è uniformemente convergente in ogni campo Γ appartenente a C il quale non contenga alcun punto di S. Se ammettiamo per un momento tale convergenza, esso rappresenterà evidentemente una funzione analitica di x ed y, nulla su tutte le superficie caratteristiche (19) corrispondenti ai valori α_n e β_n di α e β; e quindi, come dicemmo, una funzione che esiste nel campo $\beta > 0$ ossia $\rho > 0$, ed ha necessariamente S come frontiera. È chiaro che si potrebbe costruire una funzione analoga nel campo $\rho < 0$ col porre $\beta_n = -\frac{1}{n}$; e con ciò resta dimostrato il nostro teorema.

Occorre quindi solo dimostrare la convergenza uniforme in un qualunque campo Γ del prodotto (20). Indichiamo perciò con d la minima distanza dei punti di Γ da S. Sarà per un qualunque punto $(x_0\,y_0)$ di Γ, $|x_0 - \Phi(y_0\,\alpha_n)| \geq d$: infatti $|x_0 - \Phi(y_0, \alpha_n)|$ rappresenta la distanza del punto $(x_0\,y_0)$ dal punto in cui il piano $y = y_0$ incontra la superficie $x = \Phi(y, \alpha_n)$, la quale appartiene tutta ad S. Fissato allora un numero ε piccolo a piacere, dividiamo i numeri n

(*) Il ragionamento che segue non è che la ripetizione sotto forma leggermente diversa del classico ragionamento del WEIERSTRASS relativo alla scomposizione di una funzione intera in fattori primarii.

dividerassi a seconda che $\left|\frac{k}{nd}\right| \geq 1 - \varepsilon$ oppure che $\left|\frac{k}{nd}\right| < 1 - \varepsilon$: la prima conterrà solo un numero finito di valori di n: poichè sarà $n \leq \frac{k}{(1-\varepsilon)d}$: noi nel considerare il prodotto (20) lasceremo da parte questi valori di n. Per gli altri valori di n si ha

$$\left|\frac{k}{n(x - \Phi(y, z_n))}\right| \leq \left|\frac{k}{nd}\right| < 1 - \varepsilon,$$

quindi i fattori corrispondenti di n in (20) non si annulleranno mai per $(x\,y)$ in Γ: e per dimostrare che (20) converge uniformemente ad un limite $\neq 0$ basterà dimostrare la convergenza della serie dei logaritmi dei singoli termini. Ora per (21) tale serie è

$$\sum_n \left(\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{n+m} \, \frac{k^{n+m}}{n^{n+m}(x - \Phi(y, z_n))^{n+m}} \right). \tag{22}$$

Ma per $(x\,y)$ in Γ è

$$\left|\sum_1^\infty \frac{1}{n+m} \, \frac{k^{n+m}}{n^{n+m}(x - \Phi(y, z_n))^{n+m}}\right| <$$

$$< \frac{1}{n+1} \, \frac{k^{n+1}}{n^{n+1} d^{n+1}} \left| \sum_0^\infty \left| \frac{k^m}{n^m d^m} \right| \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \, \frac{k^{n+1}}{n^{n+1} d^{n+1}};$$

onde segue che la serie dei moduli di (22) converge più rapidamente della serie

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum (1 - \varepsilon)^{n+1} < \frac{1}{\varepsilon^2}$$

e quindi converge uniformemente in Γ.

Onde resta pienamente dimostrato il nostro enunciato.

15. Ove si interpretino i risultati degli studii precedenti come risultati relativi al sistema di equazioni alle derivate parziali cui soddisfa la parte reale di una funzione di due variabili complesse, si ottengono indicazioni non prive di valore. È noto che, assegnare i valori di una tale funzione sopra l'ipersuperficie contorno di campo, è assegnare condizioni sovrabbon-

danti; quali siano le condizioni cui devono soddisfare tali valori è un problema ancora assai oscuro non ostante gli sforzi di parecchi studiosi. Orbene, da quanto precede risulta che dette condizioni portano non solo sulla natura della funzione assegnata, ma anche e principalmente su quella dell'ipersuperficie considerata; in quanto che, se, per es., si suppone questa ipersuperficie analitica, non potrebbe assegnarsi su essa una funzione non analitica a meno che l'ipersuperficie stessa non soddisfaccia, rispetto al campo che essa limita, alle condizioni del n. 12.

Ottobre 1909.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XVII della Serie III, pag. 61 e seguenti

Tipo-Lit. Rebeschini di Turati e C.
Milano, 1910

MILANO — TIPO-LIT. REBESCHINI DI TURATI E C.

Sonderabdruck.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

IN HALLE A. S.

19. BAND.

11/12. (DOPPEL-)HEFT. NOVEMBER/DEZEMBER.

MIT DEM BILDNIS VON PHILIPP WEINMEISTER UND 5 FIGUREN IM TEXT.

AUSGEGEBEN AM 20. DEZEMBER 1910.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1910.

☞ **Das nächste Heft wird im Januar 1911 ausgegeben werden.**

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Wettinerstraße 17,

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrucke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen als die genannte zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für das Ausland Mark 16.—, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. rund 750 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bzw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN (DOPPEL-)HEFTES.

1. Abteilung.

2. Abteilung.

Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XIX. 1910. Heft 11/12.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Sui postulati della metrica generale projettiva.

Di Beppo Levi a Cagliari.

1. Il Klein ha rilevato che tutte le *costruzioni* della geometria projettiva possono condursi a operazioni in un campo limitato; felice osservazione da cui egli potè dedurre la prima completa dimostrazione della indipendenza della geometria projettiva dal postulato d'Euclide[1]), e quindi la consistenza logica delle metriche cayleyane. Invero i postulati da cui dipende una dimostrazione esprimono necessariamente proprietà di quei soli elementi di cui nella dimostrazione medesima è questione: solo apparentemente si fa talora uso di postulati più generali, in quanto, se così si fa per ovvie ragioni di opportunità (non solo pratica, ma logica[2]) è però evidente che in una determinata dimostrazione si fa

1) Oggi, più semplicemente, si assumono come primitive quante e quali proposizioni *projettive* son necessarie per fondare la ordinaria geometria projettiva (Cfr. anche per la bibliografia: Enriques. Encykl. d. math. W. III A B 1 n. 18) e, precisamente dalla possibilità di definire, sulla base di essa, le metriche cayleyane, si conclude alla indipendenza loro dal postulato euclideo.

2) Che si tratti realmente di una opportunità logica mostreranno le considerazioni seguenti

uso di quella sola parte di essi postulati che consiste nell' enunciarli per gli elementi in discorso.

Era però una dimostrazione per così dire virtuale: restava il problema di enunciare effettivamente postulati i quali permettessero di realizzare queste dimostrazioni in campo limitato e non presupponessero alcuna delle tre metriche. Ne seguirono gli studi del Pasch *(Neuere Geometrie)* e di altri, del Schur particolarmente.[1]) Il Schur ci ha dato ultimamente, sempre con questo programma, i suoi interessanti „*Grundlagen der Geometrie*".[2])

Non si può però dire che da queste ricerche il problema *logico* sia stato completamente risolto. Si deve infatti osservare che l'espressione stessa „postulati in una parte limitata di spazio"[3]) è in sè una contraddizione. Infatti lo spazio altro non è — nelle moderne trattazioni logico-geometriche — che l'aggregato di tutti i punti: e punti sono enti (primitivi) caratterizzati dalla condizione di soddisfare ad un determinato sistema di proposizioni (postulati). Onde necessariamente i postulati si verificano in tutto lo spazio, perchè lo spazio è l'aggregato degli enti „punti" che verificano i postulati — per un determinato valore delle altre idee primitive. E se, abbracciando nelle nostre considerazioni una parte sufficientemente estesa dello spazio, s'incontra contraddizione fra i postulati (o fra essi è una determinata ipotesi supplementare), si deve concludere senz' altro che dette proposizioni sono contradittorie. Il pensare diversamente è lo stesso come chi affermasse compatibili i postulati d'una teoria perchè una eventuale contraddizione si otterrebbe solo con un ragionamento implicante l'applicazione mille volte ripetuta dei postulati medesimi.

L'osservazione non è nuova: la geometria di Bolyai e Lobatcewski precedette di molto quella di Riemann perchè con perfetta ragione questa era esclusa dal fatto che gli ordinari postulati geometrici implicavano la retta aperta e infinita.

Ogni sistema di postulati in cui si ammetta che due punti individuano un segmento (così il Pasch, il Veronese, il Schur) *esclude lo spazio ellittico, secondo l'ordinaria accezione di geometria a retta chiusa* (cfr. n. 8).

2. Prima di riprendere la richiesta del Klein, per vedere di risponderle soddisfacentemente dal punto di vista logico, mi sia permesso di dar rilievo alla posizione di questa questione rispetto all' evoluzione subita dal modo di stabilire i primi elementi geometrici.

---

1) Cfr. Enriques. Encykl. d. math. W. III A B 1 *(Prinzipien der Geometrie)* n. 17 *(Postulate in einem Raumstück)*.

2) Leipzig und Berlin, Teubner 1909. Cfr. la prefazione.

3) Cfr. Enriques l. c. — Schur l. c. p. IV.

Nelle antiche trattazioni geometriche si suppose come prima la nozione di *spazio:* si introdusssero poi le nozioni di *superficie*, *linea*, *punto* mediante apparenti definizioni (facenti capo alla nozione di *dimensione*, ovvero allo spezzamento dello spazio in parti). L'analisi logica moderna ha fatto rifiutare questo indirizzo, mostrando appunto la non consistenza di quelle definizioni (che nella migliore ipotesi potevansi solo accettare come illustrazioni o chiarimenti). Si è venuti così ad assumere come idea primitiva il *punto*[1]), definendo in conseguenza lo *spazio* come *l'aggregato dei punti.* Ora, l'intuizione kleiniana si ritrova in contraddizione col nuovo indirizzo e più vicina al più antico: lo spazio degli antichi era bene lo *spazio della comune esperienza*, non così quello dei moderni che, colla sua definizione logica precisa, non può più adattarsi alla intuizione un po' vaga. Così la semplificazione logica si è avuta a prezzo di qualche rinuncia psicologica: lo *spazio „aggregato dei punti"* è stata la causa che ha maggiormente contribuito a render vani i tentativi degli autori citati per rispondere alla richiesta del Klein.

3. Queste considerazioni consigliano di superare la difficoltà logica ora rilevata aggiungendo, accanto allo „spazio-aggregato dei punti" una nuova idea primitiva, quella di „porzione finita di spazio": per brevità la chiameremo *regione.*

Ed ecco come converrà allora collegare questa idea primitiva alle altre. che, per semplicità di riferimento, assumeremo, come Pasch, Peano e Schur: *punto*, *segmento* e *moto;* (supporremo così senz'altro enunciate quelle proposizioni che legano fra loro queste idee primitive, — per le quali rimando agli autori citati[2]), — in quanto non urtino nelle obbiezioni rilevate al n. 1).

Occorre anzitutto mutare leggermente la definizione della *retta*[3]): *retta congiungente due punti dati* è il più grande aggregato di punti il quale: 1° contiene detti due punti; 2° contiene ogni segmento congiungente due suoi punti; 3° due segmenti qualunque contenuti in esso ed aventi un punto interno comune hanno comune un segmento.

1) La critica logica ci dice che non esistono idee necessariamente primitive; ma il *punto* è assunto come idea primitiva in tutte le moderne trattazioni, nè è facile pensare come si potrebbe evitarlo se non facendo una geometria in cui fosse diverso l'elemento generatore dello spazio: si avrebbe un cambiamento di nomi, non di sostanza.

2) Si veda pure l'articolo *Prinzipien der Geometrie* dell'Enriques nella Encyklop. d. math. W.-Rilevo che i postulati enunciati dal Schur nei recenti *Grundlagen* per la nozione „segmento" rappresentano però un progresso notevole.

3) La definizione della retta come insieme di un segmento e dei suoi prolungamenti (V. Schur *Grundlagen*) è contraddittoria alla geometria ellittica.

Ciò posto, la nozione *regione* dovrà soddisfare alle proposizioni seguenti: *Regione* è un aggregato di punti il quale contiene quattro punti non complanari e contiene ogni segmento congiungente due suoi punti. Ogni regione è contenuta in un'altra, la quale contiene punti non appartenenti ad essa (è cioè contenuta in un'altra diversa da essa). — Assegnati una regione R ed un moto T esiste sempre una regione r contenuta in R che da detto moto è trasformata in una regione. I segmenti di r sono trasformati da T in segmenti: (nulla però si deve nè si può affermare sul modo in cui si trasforma per T un segmento qualunque (cfr. n. 8)). — Assegnata una regione R esiste sempre una regione r contenuta in essa, tale che i ribaltamenti intorno alle congiungenti coppie di punti di r trasformano r in regioni tutte contenute in R.

Al postulato d'Archimede dovrà sostituirsi il seguente: Se due segmenti appartengono ad una stessa regione e non sono uguali, esiste sempre un multiplo del minore che, tolto dal maggiore, lascia un resto minore del segmento minore medesimo.[1])

4. Ben si comprende il significato dei postulati dianzi enunciati relativi alla trasformazione d'una regione per effetto di un moto. La „porzione finita di spazio" della nostra intuizione è per sua natura indefinita; quando noi affermiamo le proprietà del moto, noi ci riferiamo solo a quella parte dello spazio che cade sotto la nostra comune esperienza; e non può esser diversamente se non vogliamo che dette proprietà involgano completamente la natura metrica dello spazio[2]); ma dove siano i confini di questa parte non possiamo dire, onde è naturale si debba immaginare una „porzione finita di spazio" (= regione R) comprendente ogni „porzione finita di spazio" di cui possa esser questione come spazio della nostra comune esperienza (= regione r), senza esserne mai riempita. Notevole però che questa necesssità di non varcare i confini della regione di cui si ragiona conduca a dare al postulato d'Archimede una forma non più completamente naturale in rapporto all'intuizione.

5. All'idea di *regione* assunta nel n°. 3 come primitiva si può sostituire una nozione definita. Si può perciò procedere così: Si dice

---

1) Non si può affermare che un multiplo di un segmento sia un segmento, se non si sa a priori ch' esso è *contenuto* in un segmento dato o in una data regione. Di qui la forma del postulato.

2) Se cioè, restanto al punto di vista dei geometri, a capo il Klein, che considerano i postulati geometrici come un prodotto dell'esperienza, e vogliono richiamarsi alla limitazione del campo e dei mezzi sperimentali per riservare ogni giudizio sulla natura metrica dello spazio.

tetraedro l'aggregato dei segmenti che uniscono i punti d'un triangolo con un punto fisso fuori del piano di questo. Si dice *regione* ogni aggregato di punti appartenenti tutti ad uno stesso tetraedro e tale che: 1° contenga quattro punti non complanari; 2° contenga ogni segmento congiungente due suoi punti.

A questa definizione devono farsi seguire i postulati relativi a *regione* e *moto* enunciati nel n°. 3 (i quali ora divengono postulati relativi alle nozioni primitive di *segmento* e *moto*) e il postulato d'Archimede nella forma dianzi enunciata.

Per tal modo si evita l'introduzione di una nuova idea primitiva; ma l'acquisto logico si fa a prezzo di una notevole perdita rispetto all'intuizione, perchè si richiede di concepire un tetraedro esterno al campo dell'esperienza, tetraedro a cui, già nei postulati, non è possibile attribuire la proprietà dei tetraedri sperimentali di restar tetraedri per effetto di uno qualunque dei comuni movimenti.

6. A queste obbiezioni non si presta la risposta che alla domanda di postulati che non esprimano più di quanto è necessario per operare in campo limitato (e non pregiudichino quindi la natura metrica dello spazio) ho dato io nella mia memoria „*Fondamenti della metrica projettiva*" pubblicata nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino (Serie 2. T. 54, 1904). Ed in confronto dei sistemi di cui è questione nei n^i. precedenti ho raggiunto in essa anche il vantaggio dal punto di vista logico-deduttivo di ridurre a due le idee primitive. Assunte cioè come primitive le idee di *punto* e di *congruenza di due coppie di punti*, ho introdotto anzitutto la nozione di *coppie di punti coerenti* definendo come tale una coppia di punti di ciascuno dei quali esista il simmetrico rispetto all'altro (distinto dai due dati).[1]) La nozione di *regione* non si presenta necessaria in nessuna parte del lavoro, ma è ben chiaro come mediante la nozione di coppie di punti coerenti si potrebbe darne una definizione conveniente. Supposto cioè definito il segmento (il che però non avviene esplicitamente nella memoria citata, per ragioni cui farò tosto cenno (n. 7)) può identificarsi la „regione" con un „aggregato di punti tutti a due a due coerenti e tale che: 1° contenga ogni segmento determinato da due suoi punti; 2° contenga almeno 4 punti non complanari": queste sono infatti le proprietà dello spazio dell' esperienza, e l'ammettere che lo spazio sperimentale sia immerso in uno spazio ellittico equivale appunto ad ammettere che, fuori dei confini dell' esperienza, non tutte le coppie di punti siano coerenti.

1) Naturalmente la nozione di „punti simmetrici rispetto a un dato" è introdotta nella memoria mediante postulati e definizioni convenienti.

7. In quella memoria d'altronde io ho esteso ancora le esigenze che derivano dall' osservazione del Klein e che informano le ricerche del Pasch e del Schur. Osservai cioè che, come gran parte delle proprietà geometriche non dipendono dalle ipotesi circa l'esistenza e il numero delle parallele a una retta, o dalla infinita lunghezza della retta, come molte ancora non dipendono dal postulato d'Archimede, è noto che in molte la nozione d'ordine è assolutamente accessoria; basti osservare che la geometria projettiva e molta parte della metrica si estendono immediatamente allo spazio di punti complessi. Cionondimeno in tutte le ricerche sui fondamenti la nozione di ordine ha parte preponderante.[1]) Io volli evitarla.

Il problema di enunciare i postulati in tal forma che bastasse richiederne la validità in una regione finita di spazio aveva imposto necessariamente di restringere notevolmente i casi in cui si postulavano intersezioni, e precisamente potevano postularsi quelle sole intersezioni che cadono nell' interno di segmenti assegnabili a priori. Caduta la nozione di „ordine“ e quindi quella di „segmento“, qual limitazione poteva sostituirsi a questa? Evidentemente occorreva evitare quanto possibile l'affermazione di intersezioni in *punti effettivi*, riservando alle definizioni il completamento dello spazio con convenienti *punti improprii* o *ideali* i quali soli permettessero poi di affermare le intersezioni che occorrono alla ordinaria geometria projettiva. Nella citata mia memoria questo scopo è raggiunto in quanto un sol postulato afferma l'esistenza di una configurazione di un numero finito di rette d'una stella che incontrano tutte un particolar piano.

8. Non è a mia conoscenza che nè prima nè poi sia stato proposto un altro sistema di postulati che possa completamente servire di fondamento alla metrica generale: non infatti i sistemi del Pasch, del Schur e analoghi, per le ragioni dianzi addotte, se non si completano come è detto nei n^{i}. 3 e 5; nemmeno i sistemi in cui si stabiliscono i postulati projettivi prima e indipendentemente dai metrici (Pieri, Vahlen ecc.) perchè questi postulati contraddicono senz' altro alle metriche iperbolica e parabolica.

Voglio però ancora notare come, se si escludesse il postulato d'Archimede e le sue conseguenze, e si modificassero convenientemente i postulati del moto, cesserebbe la contraddizione rilevata al n^{o}. 1 fra il sistema dei postulati proposti recentemente dal Schur (*Grundlagen*

---

1) La memoria del Pieri „*Nuovi principii di geometria projettiva complessa*“ si propone tutt'altri scopi, come il titolo dice, ed è d'altronde posteriore alla mia. L'*ordine* vi è, naturalmente, estraneo.

der Geometrie) e la geometria ellittica. Mi limiterò a considerare la geometria piana.

Si chiami *piano* un emisfero dell' ordinaria metrica in cui sia soppressa una metà della circonferenza terminatrice e della semicirconferenza conservata sia soppresso un estremo, conservato l'altro. In questo *piano* si chiamino *rette* le semicirconferenze massime e *non si faccia nessuna ipotesi atta a chiudere il sistema dei punti su ciascuna di queste rette* (l'ipotesi che queste rette-semicirconferenze si chiudano in sè si fa invece ordinariamente e naturalmente quando l'emisfero si considera come rappresentante della stella di raggi). È chiaro che sopra un tal *piano* sarà verificata la geometria projettiva, e la metrica sarà ellittica: ma cesseranno di verificarsi quelle proposizioni che chiedono l'omogeneità del piano: in particolare sopra ogni retta esiste un punto ed uno solo che non può essere interno a nessun segmento della retta medesima. Non sarà allora più vero che, a partire da un punto arbitrario, su una retta assegnata e in un verso assegnato possa portarsi un segmento uguale ad un segmento dato; un movimento non trasformerà cioè necessariamente un segmento in un segmento (potendo trasformarlo invece nell' insieme aperto e discontinuo dei prolungamenti di un segmento). Cadrà quindi il postulato d'Archimede nel suo enunciato ordinario, come si è osservato al n°. 3.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali

Estratto dal vol. XX, serie 5ª, 2º sem. [illegible]

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al [illegible] ottobre

e Seduta del [illegible] novembre 1911

SULLE CONDIZIONI SUFFICIENTI

PER

IL MINIMO NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

(GLI INTEGRALI SOTTO FORMA NON PARAMETRICA)

NOTA

DI

EUGENIO ELIA LEVI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni* (*Gli integrali sotto forma non parametrica*). Nota di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nel presente assetto del calcolo delle variazioni, il concetto di campo di estremali, introdotto dal Weierstrass, ha singolare importanza, come quello che solo fin qui permette di dimostrare la sufficienza delle condizioni di minimo. Tanto che, — mentre il Weierstrass dimostrava la necessità delle condizioni di Legendre e di Jacobi, seguendo questi suoi predecessori, mediante la teoria della variazione seconda, e su quelle fondava poi la dimostrazione dell'esistenza del campo, — parve allo Kneser, che, non potendosi fare a meno del concetto di campo, maggiore unità per la teoria si potesse raggiungere soltanto col lasciare da parte la teoria della variazione seconda, e col cercare di mostrare sia la necessità che la sufficienza delle condizioni di minimo basandosi sul concetto di campo; a ciò egli pervenne col bel teorema sugli inviluppi di estremali (Enveloppensatz).

Tale procedimento non è però scevro di inconvenienti assai gravi. Intanto da una parte per quanto riguarda la dimostrazione della *necessità* delle condizioni di minimo, mentre la teoria della variazione seconda si estende con discreta facilità ai casi più complessi, il procedimento ora ricordato dello Kneser non risulta sempre di facile applicazione (¹). D'altra parte, per quanto riguarda la *sufficienza* delle condizioni di minimo, non sempre è possibile e sempre è assai faticoso il mostrare che l'esistenza del campo segue dalle condizioni di Legendre e di Jacobi; invero tale dimostrazione richiede uno studio assai accurato delle soluzioni dell'equazione di Eulero: tanto che ad es. nel caso degli integrali multipli, i teoremi di esistenza delle soluzioni delle equazioni ellittiche alle derivate parziali non sono per ora sufficienti a stabilire tale proposizione (se pure è vero che i progressi fatti recentemente in tale campo di studî possono farci sperare che in tempo non lontano anche queste difficoltà possano essere superate); onde la teoria dei massimi e dei minimi degli integrali multipli presenta qui per ora una grave lacuna.

Nè basta: appena lasciamo il caso del più semplice problema del calcolo delle variazioni *è lo stesso concetto di campo che risulta deficiente* nella dimostrazione della sufficienza delle condizioni di minimo. Così nell'ordinario problema isoperimetrico già il Weierstrass, si incontrava in una

(¹) Cfr. le osservazioni del Bolza a pag. 634 delle *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Teubner (1909).

tale difficoltà, e solo recentemente il Lindeberg [1] riusciva a superarla con un procedimento assai elegante, ma del tutto lontano da quelli usati nel resto della teoria. Similmente nei problemi con estremi variabili il campo viene ad avere necessariamente punti singolari [2]; onde convenne allo Hahn completare lo studio ricorrendo alle spezzate di estremali [3]. Ed infine nei problemi di massimo e di minimo per gli integrali contenenti derivate di ordine $p \geq 2$, il concetto di campo non serve che nell'ipotesi che le curve variate restino in un intorno di ordine $p-1$ della curva studiata [4], onde ancora non si conoscono le condizioni sufficienti per il minimo forte.

Mi pare quindi che possa non essere privo di qualche interesse, sia per i risultati effettivi che per l'esposizione sistematica, il mostrare come, lasciato da parte il concetto di campo, gli antichi metodi di trasformazione di Legendre e di Jacobi possano servire a provare la sufficienza delle condizioni del minimo forte. A tale uopo è dedicata questa Nota ed alcune altre che seguiranno; l'osservazione fondamentale è che la funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass rappresenta la parte della variazione totale dell'integrando che non diviene infinitesima col tendere a zero della massima distanza della curva variata dalla curva che si studia: e che quindi i ragionamenti di Legendre e di Jacobi relativi alla variazione seconda, quando in questa all'insieme dei termini in cui entrano solo le variazioni delle derivate si sostituisca la funzione $\mathcal{E}$ dovranno esser capaci di darci la dimostrazione del minimo. Qui mi limiterò a sviluppare questo concetto nei suoi particolari per il più semplice problema del calcolo delle variazioni, affinchè risulti più evidente la struttura del ragionamento. Mi riserbo di tornare più tardi sull'applicazione di esso a problemi meno semplici, onde mostrare la capacità che questo metodo ha di risolvere in modo uniforme i problemi sopra ricordati, in cui il concetto di campo non pare sufficiente.

2. Comincerò collo studiare il problema in forma non parametrica: si avrà da cercare quando una curva dà all'integrale

$$\mathrm{I} = \int_{x_1}^{x_2} f(xyy')\, dx \qquad (x_1 \leq x_2) \tag{1}$$

il minimo valore rispetto alle curve $\mathfrak{C}$ di equazione $y = y(x)$, che stanno in una certa regione $\mathfrak{R}$ del piano xy, e passano per i due punti $\mathrm{P}_1 \equiv (x_1 y_1)$,

[1] Lindeberg, *Ueber einige Fragen der Variationsrechnung*. Math. Ann. (1909), vol. 67, pag. 346. Vedi pure Lindeberg, *Zur Theorie des relativen Extremums* etc. Math. Ann. (1904), vol. 59, pag. 332; Bolza, loc. cit., § 94.

[2] Tali difficoltà furono segnalate da Bolza (loc. cit., pag. 523), Bliss e Mason (Am. Transactions (1908), vol. 9, pag. 440), Radon (Wiener Berichte 119, pag. 1294).

[3] Hahn, *Ueber Variationsprobleme mit variablen Endpunkten*. Monatshefte für Math. und Phys., vol. XXII (1911), pag. 127. Tale considerazione servì allo Hahn già in molti problemi.

[4] Cfr. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, vol. I, pp. 458-465.

$P_2 \equiv (x_2 y_2)$. Ammetterò con Bolza che f sia di classe C''' quando (xy) sia in $\mathfrak{R}$ ed y' sia finito; dirò $M_{\varrho'}$ il massimo delle sue derivate di terz'ordine fatte rapporto a y e y' per (xy) in $\mathfrak{R}$ ed $|y'| < \varrho'$. Indicherò con $\overset{0}{\mathfrak{C}}$ un estremale $y = \overset{0}{y}(x)$ passante per i punti P_1 e P_2: porrò

$$(1) \qquad P = f''_{y^2}(x\overset{0}{y}\overset{0}{y'}) \quad , \quad Q = f''_{yy'}(x\overset{0}{y}\overset{0}{y'}) \quad , \quad R = f''_{y'^2}(x\overset{0}{y}\overset{0}{y'}) ;$$

e supporrò che sia $|\overset{0}{y'}| \leq \varrho'_1$. Mi propongo di mostrare anzitutto che: *se nei punti di* $\overset{0}{\mathfrak{C}}$ *sono soddisfatte le condizioni seguenti*

1° (2) $R > 0$

2° (3) $\mathcal{E}(x\overset{0}{y}\,;\overset{0}{y'}y') > 0$ *per* $0 < |y' - \overset{0}{y'}| \leq r'$,

3° *il punto coniugato* x'_1 *di* x_1 *su* $\overset{0}{\mathfrak{C}}$ *precede* x_2,

si può trovare un numero r *tale che* $\overset{0}{\mathfrak{C}}$ *dia ad* I *il minimo valore rispetto a tutte le curve* $\mathfrak{C}$, *per cui è*

$$(4) \qquad |y - \overset{0}{y}| < r \quad , \quad |y' - \overset{0}{y'}| \leq r'$$

e che passano per P_1 *e* P_2.

Occorre perciò dare alla variazione totale ΔI che I subisce quando si passa da $\overset{0}{\mathfrak{C}}$ a $\mathfrak{C}$ una particolare espressione. Nel fare le trasformazioni a ciò necessarie, noi supporremo senz'altro $\mathfrak{C}$ di classe C'': è noto che se $\overset{0}{\mathfrak{C}}$ dà ad I il minimo rispetto a tali curve, lo dà pure rispetto alle curve di classe D' ([1]).

Ciò posto, si indichi per brevità, con η la funzione $y - \overset{0}{y}$; rammentando che $\mathcal{E}(xy\,;\overset{0}{y'}y') = f(xyy') - f(xy\overset{0}{y'}) - \eta' f'_{y'}(xy\overset{0}{y'})$, si ha

$$(5) \qquad \begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_1}^{x_2} [f(xyy') - f(x\overset{0}{y}\overset{0}{y'})]\,dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [\mathcal{E}(xy\,;\overset{0}{y'}y') + (f(xy\overset{0}{y'}) - f(x\overset{0}{y}\overset{0}{y'})) + \eta' f'_{y'}(xy\overset{0}{y'})]\,dx \,. \end{aligned}$$

Sviluppando $f(xy\overset{0}{y'}) - f(x\overset{0}{y}\overset{0}{y'})$ mediante la formula di Taylor e rammentando che $\overset{0}{\mathfrak{C}}$ è un estremale, si ha

$$(6) \qquad \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [f(xy\overset{0}{y'}) - f(x\overset{0}{y}\overset{0}{y'})]\,dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \eta f'_y(x\overset{0}{y}\overset{0}{y'}) + \frac{1}{2}\eta^2 P + \eta^3 \lambda_1 \right\} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ -\eta' f'_y(x\overset{0}{y}\overset{0}{y'}) + \frac{1}{2}\eta^2 P + \eta^3 \lambda_1 \right\} dx \,. \end{aligned}$$

([1]) Cfr. Bolza, loc. cit., pp. 85-86. Basterebbe anzi supporre $\overset{0}{\mathfrak{C}}$ analitica; cfr. Hadamard, loc. cit. pp. 51 e sg.

dove si è posto, indicando $\overline{y}$ un conveniente valore compreso fra $\mathring{y}$ e y,

$$\lambda_1(xy\mathring{y}\mathring{y}') = \frac{1}{3!} f'''_{y^3}(x\overline{y}\mathring{y}'). \tag{7}$$

Sostituendo (6) in (5) otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') + \frac{1}{2} P\eta^2 + \eta'[f'_{y'}(xy\mathring{y}') - f'_{y'}(x\mathring{y}\mathring{y}')] + \eta^3\lambda_1 \right\} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') + \frac{1}{2}(P\eta^2 + 2\eta\eta' Q) \right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} (\eta^3\lambda_1 + \eta^2\eta'\lambda_2)\, dx\,, \end{aligned} \tag{8}$$

dove in modo analogo a (7) si è posto, indicando con $\overline{\overline{y}}$ un valore compreso fra $\mathring{y}$ e y,

$$\lambda_2(xy\mathring{y}\mathring{y}') = \frac{1}{2!} f'''_{y'y^2}(x\overline{\overline{y}}\mathring{y}'). \tag{9}$$

3. La (8) si può ancora trasformare. Si noti che

$$\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') = \left[\frac{1}{2} f''_{y'^2}(xy\mathring{y}') + \lambda_4\eta'\right]\eta'^2 = \left[\frac{1}{2} R + \lambda_3\eta + \lambda_4\eta'\right]\eta'^2, \tag{10}$$

dove si è posto

$$\lambda_3(xy\mathring{y}\mathring{y}') = \frac{1}{2!} f'''_{y'^2y}(x\overline{\overline{\overline{y}}}\mathring{y}')\ ,\quad \lambda_4(xy\mathring{y}'y') = \frac{1}{3!} f'''_{y'^3}(xy\overline{y}')\,, \tag{11}$$

$\overline{\overline{\overline{y}}}$, $\overline{y}'$ indicando valori intermedii rispettivamente tra y e $\mathring{y}$, y' e $\mathring{y}'$.

Sicchè sostituendo (10) in (8) avremo

$$\begin{aligned} \Delta I &= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)\, dx + \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1\eta^3 + \lambda_2\eta^2\eta' + \lambda_3\eta\eta'^2 + \lambda_4\eta'^3)\, dx\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Questa formula non differisce realmente nell'aspetto da quella che si otterrebbe sviluppando $f(xyy') - f(x\mathring{y}\mathring{y}')$ mediante la formula di Taylor arrestata ai termini di 3° ordine: però il modo speciale di dedurla conferisce alle λ_3, λ_4 proprietà che ci permettono di dimostrare il teorema sopra enunciato.

Introduciamo perciò le ipotesi del nostro teorema. Le ipotesi 1° e 2° si possono riassumere in questa che $\dfrac{\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')}{(\mathring{y}' - y')^2}$ è sempre > 0 per $y = \mathring{y}(x)$, $|y' - \mathring{y}'| < r'$: ne segue che si possono determinare due numeri r_1 e μ positivi e tali che per $|y - \overset{\circ}{y}(x)| \leq r_1$, $|y' - \overset{\circ}{y}'| \leq r'$ sia

$$\frac{\mathcal{E}(xy\,;\overset{\circ}{y}'y')}{(\overset{\circ}{y}' - y')^2} > \mu. \tag{13}$$

Per (10) avremo dunque per $|\eta| \leq r_1$, $|\eta'| \leq r'$,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{R} + \lambda_3\eta + \lambda_4\eta' > \mu. \tag{14}$$

D'altra parte l'ipotesi 3° ci dice che esiste una soluzione $u(x)$ dell'equazione

$$(\mathrm{P} - \mathrm{Q}')\,u - \frac{d}{dx}\,(\mathrm{R}u') = 0$$

sempre $\neq 0$ per $x_1 \leq x \leq x_2$: poniamo che si abbia

$$0 < m_1 \leq u \leq m_2\,,\quad |u'| \leq m_3\,. \tag{15}$$

Si ponga infine

$$\eta(x) = p(x)\,u(x)\,, \tag{16}$$

sarà $p(x)$, come $\eta(x)$, una funzione finita e continua, di classe C'', nulla negli estremi x_1 e x_2. Si avrà quindi [1]

$$\int_{x_1}^{x_2} p^2\,dx < k\int_{x_1}^{x_2} p'^2\,dx \qquad\qquad k = \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}\,. \tag{17}$$

[1] Cfr. Hadamard, loc. cit., pp. 334-335, n. 272. L'Hadamard deduce questa formula coi metodi del calcolo delle variazioni — ma indipendentemente dal teorema che qui vuolsi dimostrare. Del resto si può facilmente dedurre una limitazione un po' più larga, ma ai nostri scopi equivalente fondandosi solo sulle formule di Schwarz e Dirichlet. Si può supporre che sia $x_2 > x_1$. Per la prima di queste formule essendo $p(x_1) = 0$, si ha, per $x \geqq x_1$

$$p^2(x) = \left(\int_{x_1}^{x} p'(\xi)\,d\xi\right)^2 \leq (x - x_1)\int_{x_1}^{x} p'^2(\xi)\,d\xi\,:$$

ed allora per la formula di Dirichlet è

$$\int_{x_1}^{x_1+\frac{x_2-x_1}{2}} p^2(x)\,dx \leq \int_{x_1}^{x_1+\frac{x_2-x_1}{2}} (x - x_1)\,dx\int_{x_1}^{x} p'^2(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_1+\frac{x_2-x_1}{2}} p'^2(x)\left[\frac{(x_2 - x_1)^2}{4} - (x - x_1)^2\right]dx \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{8}\int_{x_1}^{x_1+\frac{x_2-x_1}{2}} p'^2(x)\,dx.$$

Similmente essendo $p(x_2) = 0$ si ottiene

$$\int_{x_1+\frac{x_2-x_1}{2}}^{x_2} p^2(x)\,dx \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{8}\int_{x_1+\frac{x_2-x_1}{2}}^{x_2} p'^2(x)\,dx\,:$$

onde sommando

$$\int_{x_1}^{x_2} p^2\,dx \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}\int_{x_1}^{x_2} p'^2\,dx\,.$$

E di qui, osservando che $|pp'| \leq \frac{1}{2}\{p^2 + p'^2\}$:

$$\int_{x_1}^{x_2} |pp'|\, dx \leq \frac{1}{2}(k+1)\int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx\,. \tag{18}$$

Ciò posto, applicando la nota trasformazione di Jacobi e cioè sostituendo in (12) a η ed η' i valori tratti da (16), si ha

$$\begin{aligned}
\Delta \mathrm{I} &= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{R} u^2 p'^2\, dx + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 \eta^3 + \lambda_2 \eta^2 \eta' + \lambda_3 \eta'^2 \eta + \lambda_4 \eta'^3)\, dx = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}\mathrm{R} + \lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta'\right) u^2 p'^2\, dx + \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} [\lambda_1 \eta^3 + \lambda_2 \eta^2 \eta' + (\lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta')(u'^2 p^2 + 2\eta u' p')]\, dx\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Ma per (14), (15), se $|\eta| \leq r_1$, $|\eta'| \leq r'$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}\mathrm{R} + \lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta'\right) u^2 p'^2\, dx \geq \mu m_1^2 \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx\,. \tag{20}$$

D'altra parte, se rammentiamo che $|\overset{\circ}{y}'| \leq \varrho_1'$, e, indicando con r una quantità $\leq r_1$ per ora indeterminata, supponiamo $|\eta| \leq r$, avremo per (7), (15), (16), (17):

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_1 \eta^3\, dx\right| \leq \frac{1}{3!}\mathrm{M}_{\varrho_1'} m_2^2 r \int_{x_1}^{x_2} p^2\, dx \leq \frac{1}{3!}\mathrm{M}_{\varrho_1'} k m_2^2 r \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx\,. \tag{21}$$

Analogamente per (9), (11), (15), (16), (17), (18)

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 \eta^2 \eta'\, dx\right| &\leq \frac{1}{2!}\mathrm{M}_{\varrho_1'} r \int_{x_1}^{x_2} |\eta\eta'|\, dx = \frac{1}{2}\mathrm{M}_{\varrho_1'} r \int_{x_1}^{x_2} |uu'p^2 + u^2 pp'|\, dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\mathrm{M}_{\varrho_1'} m_2 r \left\{k m_3 + \frac{1}{2}(1+k) m_2\right\} \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx \\
\left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_3 \eta (u'^2 p^2 + 2\eta u' p')\, dx\right| &\leq \frac{1}{2}\mathrm{M}_{\varrho_1'} r \int_{x_1}^{x_2} |u'^2 p^2 + 2 uu' pp'|\, dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\mathrm{M}_{\varrho_1'} m_3 r \left\{k m_3 + (1+k) m_2\right\} \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx.
\end{aligned} \tag{22}$$

Infine, rammentando che per (16), (15) è $|p| < \frac{r}{m_1}$ e che essendo $|\overset{\circ}{y}'| \leq \varrho_1'$, $|y' - \overset{\circ}{y}'| \leq r'$, la quantità $\overline{y}'$ della formula (11) è in modulo inferiore a $\varrho' = \varrho'_1 + r'$, avremo

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda_4 \eta'(u'^2 p^2 + 2\eta u' p')\, dx \leq$$

$$(23) \qquad \leq \frac{1}{3\,!} M_{\rho'} \int_{x_1}^{x_2} |u'^3 p^3 + 2\eta u'^2 p p' + \eta u'^2 p'^2 + 2\eta u u' p p'|\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{3\,!} M_{\rho'} m_3 r \left\{ \frac{m_3^2 k}{m_1} + m_3(2+k) + m_2(1+k) \right\} \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx\,.$$

Raccogliendo da (19), (20), (21), (22), (23) deduciamo che se $|\eta| \leq r \leq r_1$

$$(24) \qquad \Delta \mathrm{I} > (\mu m_1^2 - r\mathrm{H}) \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx$$

dove

$$(25) \qquad \begin{aligned} \mathrm{H} = \frac{1}{3\,!} M_{\rho'_1} \left[\frac{3}{2} m_2^2 + \frac{5}{2} k m_2^2 + 6 k m_2 m_3 + 3 m_2 m_3 + k m_3^2 \right] + \\ + \frac{1}{3\,!} M_{\rho'} m_3 \left[\frac{m_3^2 k}{m_1} + m_3(2+k) + m_2(1+k) \right]. \end{aligned}$$

Basterà quindi prendere per r un numero inferiore a $\frac{\mu m_1^2}{\mathrm{H}}$ perchè ne segua $\Delta \mathrm{I} \leq 0$, c. v. d.

Matematica. — *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni. (Gli integrali sotto forma non parametrica).* Nota II di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

4. Nel teorema dimostrato nella Nota precedente [1] si impose all'inclinazione delle curve variate $\mathfrak{C}$ di soddisfare ad una disuguaglianza della forma $|y'-\overset{\circ}{y}'|\leq r'$. Ciò è naturale: perchè è ben noto per un'osservazione del Bolza che solo in questa ipotesi è possibile, per il problema in forma non parametrica, ridurre le condizioni di minimo a condizioni relative al solo estremale $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$, quali sono quelle del teorema del n. 2. Quando si voglia trattare il problema senza imporre una limitazione di tale tipo, generalmente si enuncia che condizione sufficiente per il minimo è che, oltre alle solite condizioni di Legendre e di Jacobi, esista un campo attorno all'estremale $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ tale che, detta $\pi(xy)$ l'inclinazione [2] del campo nel punto (xy), sia $\mathcal{E}(xy\,;\pi(xy)y')>0$ per $|y'-\pi(xy)|\neq 0$. Volendo noi escludere dai nostri ragionamenti il concetto di campo non potremo naturalmente dimostrare un tale enunciato, nel quale entra esplicitamente questo concetto medesimo. Dimostreremo invece il teorema seguente:

Se $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ è tale che, indicando con r_1 un numero convenientemente piccolo, si abbia che:

1° (2) $\quad \mathrm{R}>0$,

2° $(3)^{bis}$ $\quad \mathcal{E}(xy\,;\overset{\circ}{y}'y')>0$ *per* $\quad |y-\overset{\circ}{y}(x)|\leq r_1 \qquad y'\neq\overset{\circ}{y}'$,

3° *il punto x'_1 coniugato di x_1 su $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ segue x_2,*

si può trovare un $r\leq r_1$ tale che $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ dia ad I il valore minimo rispetto alle curve $\mathfrak{C}$ per cui è $|y(x)-\overset{\circ}{y}(x)|<r$ e che congiungono P_1 *e* P_2.

Prima di dimostrare questo teorema, confrontiamolo coll'ordinario teorema sopra rammentato. Intanto esso non è punto equivalente a questo, perchè per quanto, fissato un campo ed un numero σ convenientemente piccolo, sia sempre possibile prendere un intorno tanto piccolo di $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ che in esso sia $|\pi(xy)-\overset{\circ}{y}'(x)|<\sigma$, tuttavia quando y' varia da $-\infty$ a $+\infty$ non si può dalla condizione $\mathcal{E}(xy\,;\overset{\circ}{y}'y')>0$ dedurre la $\mathcal{E}(xy\,;\pi(xy)\,y')>0$, nè

(1) Questi Rendiconti, pag. 125. Nella presente Nota per maggiore comodità la numerazione dei § e delle formule continua quella della Nota precedente.

(2) Cioè, se $y=\mathrm{Y}(x)$ è l'equazione dell'estremale del campo che passa per il punto xy, si ponga $\pi(xy)=\mathrm{Y}'(x)$: i tedeschi chiamano tale funzione Gefällsfunktion.

viceversa. Esso esprime quindi una nuova condizione sufficiente per il minimo: ed anzi a me pare che il *nuovo criterio* che viene pertanto da noi enunciato, presenti qualche vantaggio *pratico*, in quanto per applicarlo non occorre il calcolo della funzione $\pi(xy)$ per i punti che non appartengano all'estremale che si studia [1].

Non mancheremo di notare del resto che evidentemente *sia il criterio ordinario, che questo nostro sono certo soddisfatti se il problema è regolare, e cioè se è $f''_{y'^2}(xyy') > 0$ qualunque sia y'.*

5. Per dimostrare questo nuovo teorema non si può senz'altro seguire il ragionamento che usammo nel n. 3. Perchè è vero che le condizioni (2) $(3)^{bis}$ si possono ancora scrivere dicendo che è soddisfatta la (13) qualunque sia y': ma ciò non basta, perchè il numero $M_{\varrho'}$ che compare in (23) nel formare la limitazione per λ_4, può crescere oltre ogni limite col crescere di ϱ': e con esso crescerà H.

Per superare tale difficoltà fissiamo un numero r' arbitrario; e presa una qualunque curva $\mathfrak{C}$ chiamiamo χ l'insieme di punti di $(x_1 x_2)$ in cui è $|\eta'| < r'$, χ_1 l'insieme complementare in cui $|\eta'| \geq r'$. È noto che potremo parlare — almeno quando gli integrali si prendano nel senso di Lebesgue — di integrali estesi ai campi χ e χ_1.

Riprendiamo, ciò posto, la formula (8) e trasformiamola subito col fare la posizione (16): avremo aggiungendo e togliendo $\frac{1}{2}\,\mathrm{R}\eta'^2$, colla solita trasformazione di Jacobi:

$$\Delta \mathrm{I} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\mathcal{E}(xy\,;\,\mathring{y}'y') - \frac{1}{2}\,\mathrm{R}(u'^2 p^2 + 2\eta u' p') \right] dx + \tag{26}$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 \eta^3 + \lambda_2 \eta^2 \eta')\, dx\,.$$

Spezziamo il primo di questi integrali in due parti, l'uno esteso a χ, e l'altro a χ_1: per quanto riguarda il primo scriveremo procedendo come al n. 3 e mantenendo quelle stesse notazioni,

$$\int_{\chi} \left[\mathcal{E}(xy\,;\,\mathring{y}'y') - \frac{1}{2}\,\mathrm{R}(u'^2 p^2 + 2\eta u' p') \right] dx = \tag{27}$$
$$= \int_{\chi} \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{R} + \lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta' \right] u^2 p'^2\, dx + \int_{\chi} (\lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta')\,(u'^2 p^2 + 2\eta u' p')\, dx$$

[1] Nel caso degli integrali sotto forma parametrica che studieremo nelle prossime Note troveremo una più perfetta uniformità coi risultati dell'ordinaria teoria.

Per quanto riguarda invece il secondo scriveremo

$$
(28)\quad \begin{aligned}
&\int_{\chi_1}\left[\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}(u'^2p^2+2\eta u'p')\right]dx=\\
&\int_{\chi_1}\frac{\mu}{2}\,u^2p'^2\,dx+\int_{\chi_1}\left[\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')-\frac{\mu}{2}\,u^2p'^2-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}(u'^2p^2+2\eta u'p')\right]dx\,.
\end{aligned}
$$

Od infine se poniamo

$$
(29)\quad \begin{aligned}
&\mathit{\Lambda}_3=\lambda_3 \quad \mathit{\Lambda}_4=\lambda_4 \qquad \mathrm{E}_1=\frac{1}{2}\,\mathrm{R}+\lambda_3\eta+\lambda_4\eta' \quad \text{in } \chi\\
&\mathit{\Lambda}_3=0 \quad \mathit{\Lambda}_4=0 \qquad \mathrm{E}_1=\frac{\mu}{2} \qquad\qquad\qquad \text{in } \chi_1
\end{aligned}
$$

potremo, sostituendo (27) (28) in (26), scrivere

$$
(30)\quad \begin{aligned}
\Delta\mathrm{I}=&\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{E}_1u^2p'^2\,dx+\\
&+\int_{x_1}^{x_2}\left[\lambda_1\eta^3+\lambda_2\eta^2\eta'+(\mathit{\Lambda}_3\eta+\mathit{\Lambda}_4\eta')(u'^2p^2+2\eta u'p')\right]dx+\\
&+\int_{\chi_1}\left[\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')-\frac{\mu}{2}\,\eta'^2+\left(\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}\right)(u'^2p^2+2\eta u'p')\right]dx\,.
\end{aligned}
$$

Quanto ai primi due integrali si tratteranno come quelli del n. 3. Infatti per (29) si avrà sempre $\mathrm{E}_1>\frac{\mu}{2}$, mentre per il secondo integrale ove, come precedentemente, si supponga $|\eta|\leq r$ varanno ancora limitazioni della forma (21), (22), (23), perchè $\mathit{\Lambda}_4$ è nulla tranne che in χ dove è uguale a λ_4 e dove appunto è $|\eta'|\leq r'$, e $|y'|\leq\varrho_1'+r'$.

Quindi avremo, analogamente a (24):

$$
(31)\quad \begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2}\{\mathrm{E}_1u^2p'^2+\lambda_1\eta^3+\lambda_2\eta^2\eta'+(\mathit{\Lambda}_3\eta+\mathit{\Lambda}_4\eta).(u'^2p^2+2\eta u'p')\}\,dx>\\
&\qquad>\left(\frac{\mu}{2}\,m_1^2-r\mathrm{H}\right)\int_{x_1}^{x_2}p'^2\,dx\,.
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda l'ultimo integrale di (30) osserveremo che per (13)

$$
\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')-\frac{\mu}{2}\,\eta'^2\geq\frac{\mu}{2}\,\eta'^2\,;
$$

e che, se supponiamo $\mathrm{R}<\mathrm{M}\ (\geq\mu)$, è

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}\right)(u'^2p^2+2\eta u'p')\right|=&\left|\frac{\mu}{2}-\frac{\mathrm{R}}{2}\right|\,|2p\eta'u'-u'^2p^2|\leq\\
&\leq\frac{1}{2}\,(\mathrm{M}-\mu)\,\frac{r}{m_1}\,m_3\left(2|\eta'|+\frac{rm_3}{m_1}\right).
\end{aligned}
$$

Onde segue

$$
(32) \qquad \begin{aligned}
&\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') - \frac{\mu}{2}\,\eta'^2 + \frac{1}{2}(\mu - \mathrm{R})\,(u'^2 p^2 + 2\eta u' p') \geq \\
&\qquad\qquad \geq \frac{\mu}{2}\,\eta'^2 - \alpha r\,|\eta'| - \beta r^2
\end{aligned}
$$

dove

$$
\alpha = (\mathrm{M} - \mu)\,\frac{m_3}{m_1} \qquad \beta = \frac{1}{2}\,(\mathrm{M} - \mu)\,\frac{m_3^2}{m_1^2}
$$

sono due costanti positive. Ma ricordiamo che in χ_1 è $|\eta'| \geq r'$, ne segue che, se

$$
(33) \qquad r \leq \frac{\mu r'}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta\mu}}\,,
$$

l'integrando del secondo integrale di (30) è essenzialmente positivo.

Vale quindi ancora una formula analoga a (24)

$$
(34) \qquad \Delta\mathrm{I} > \left(\frac{\mu}{2}\,m_1^2 - r\mathrm{H}\right)\int_{x_1}^{x_2} p'^2\,dx
$$

e quindi se oltre a (33) è pure $r < \dfrac{m_1^2\mu}{2\mathrm{H}}$ è $\Delta\mathrm{I} \geq 0$ c. v. d.

Osservazione. — Le formule (24) e (34) sono entrambe capaci di dimostrare anche qualcosa di più: e precisamente di dimostrare il teorema di Osgood: invero se per un conveniente valore x è $|\eta(c)| = |y(c) - \mathring{y}(c)| = a$ avremo

$$
\int_{x_1}^{x_2} p'^2(x)\,dx \geq \int_{x_1}^{c} p'^2(x)\,dx \geq \frac{p^2(c)}{c - x_1} \geq \frac{\eta^2(c)}{(c - x_1)\,u^2} \geq \frac{a^2}{(c - x_1)\,m_1^2}\,;
$$

onde segue che $\Delta\mathrm{I}$ diviene infinitesima di ordine minore o uguale al secondo rispetto al valore che η prende per un qualunque valore prefissato c di x [1].

[1] Cfr. Hadamard, loc. cit., pag. 479; Osgood, Trans. of the American Math. Society, tomo III (1901).

Offerto dall' Autore.

ESTRATTO

DAGLI *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.*

Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse.

(*Di* Eugenio Elia Levi, *a Genova.*)

---

1. In una Memoria pubblicata in questo stesso periodico (*) ho dimostrato la proposizione seguente:

Siano $x = x_1 + i\,x_2$, $y = y_1 + i\,y_2$ due variabili complesse. Nello spazio a 4 dimensioni in cui sono coordinate $x_1\, x_2\, y_1\, y_2$ sia data un'ipersuperficie S

$$\varphi\,(x_1\, x_2\, y_1\, y_2) = 0; \tag{1}$$

e si supponga che la $\varphi\,(x_1\, x_2\, y_1\, y_2)$ possegga le derivate prime e seconde finite e continue.

Affinchè esista una funzione analitica delle due variabili complesse x ed y monodroma in uno dei campi in cui S divide lo spazio, è necessario che l'espressione

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{C}\,\varphi \equiv {} & \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2}\right\} + \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right\} - \\ & - 2\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right\}\left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial y_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2\,\partial y_2}\right\} - \\ & - 2\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right\}\left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

conservi sulla (1) un segno determinato.

E precisamente: se su (1) è $\mathfrak{C}\,\varphi \leq 0$, una funzione $f\,(x\,y)$ che abbia S come frontiera può solo esistere nel campo $\varphi > 0$; mentre se $\mathfrak{C}\,\varphi \geq 0$, una tale funzione può esistere solo nel campo $\varphi < 0$.

(*) *Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni di una o più variabili complesse.* Annali di Matematica, 1909. Tomo XVII della Serie III, pag. 61 e ss. Cfr. § III.

Cercando di invertire questo teorema sono riuscito in quel lavoro a dimostrare che: *se S è tale che nei suoi punti sia soddisfatta la $\mathfrak{C}\,\varphi = 0$, essa consta di una semplice infinità di superficie caratteristiche* — e cioè di superficie a due dimensioni determinate da un legame analitico tra le variabili complesse x ed y —: *ed allora, preso un pezzo sufficientemente piccolo S di S, si può sempre costruire una funzione analitica nel campo $\varphi > 0$ ed una nel campo $\varphi < 0$ regolari entrambe nei punti che appartengono ad un intorno sufficientemente piccolo di S che non appartengono al S, e che ammettono entrambe S come frontiera.*

In quanto segue io voglio mostrare, seguendo un metodo di poco differente, come si possa analogamente dimostrare la proposizione seguente:

Supposto che nei punti di una ipersuperficie S data da (1) *sia sempre*

$$\mathfrak{C}\,\varphi < 0, \tag{3}$$

preso un pezzo S sufficientemente piccolo di essa, si può trovare una funzione analitica di x ed y monodroma regolare nei punti dell'intorno di S in cui è $\varphi > 0$, la quale abbia S come frontiera. Tale proposizione insieme coll'ultima ora richiamata servirà così ad invertire in certa misura la proposizione fondamentale enunciata sopra: precisamente la proprietà, relativa all'espressione (2), ivi richiesta come *necessaria* perchè una ipersuperficie sia frontiera di una funzione di due variabili complesse, sarà dimostrata *sufficiente in quanto proprietà infinitesimale*, mentre resterà dubbio se essa lo sia pure in un campo comunque esteso. Qualche considerazione su questo problema più difficile aggiungeremo nel n. 6.

2. Per fissare le idee supporrò che nel campo che si considera, l'equazione (1) si possa risolvere rapporto a x_1. Potremo allora scrivere l'equazione della ipersuperficie S nella forma

$$x_1 - \psi\,(x_2\, y_1\, y_2) = 0. \tag{4}$$

Preso un punto qualunque $x_2\, y_1\, y_2$ indicherò (*) con

$$a = a_1 + i\,a_2\,, \qquad b = b_1 + i\,b_2 \tag{5}$$

(*) Cfr. per le notazioni che seguono le analoghe notazioni della pag. 77 e ss. della mia citata Memoria. Le quantità A, B, C sono le quantità A_1, B_1, C_1, delle formule (4) pag. 78 di quel lavoro calcolate per il caso presente in cui φ assume la forma $x_1 - \psi$, e cambiate di segno.

Per rendere più agevole la lettura di quanto segue, avverto che il concetto direttivo è quello di invertire la costruzione che nel n. 12 della mia Memoria serve a dedurre il teorema enunciato in principio.

le quantità — funzioni di x_2, y_1, y_2 — che si ottengono risolvendo i due sistemi di equazioni

$$a_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} a_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} a_1 + a_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \tag{6}$$

e

$$b_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} b_2 = \frac{A - C}{2}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} b_1 + b_2 = -B \tag{7}$$

dove si è posto

$$\left.\begin{aligned} 2A &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} a_2^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \, \partial y_1} a_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} \\ B &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} a_1 a_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \, \partial y_1} a_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \, \partial y_2} a_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \, \partial y_2} \\ 2C &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} a_1^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \, \partial y_2} a_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Supporremo — e lo si potrà fare cambiando, ove occorra, il senso sull'asse delle x_1 — che il campo in cui si vuole costruire la funzione analitica sia il campo

$$x_1 > \psi(x_2 \, y_1 \, y_2), \tag{9}$$

con che la condizione (3) si potrà scrivere, mediante le (8) e (6),

$$A + C > 0 \tag{10}$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2} + 2 a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \, \partial y_2} + 2 a_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \, \partial y_1} + (a_1^2 + a_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} > 0. \tag{10bis}$$

Supporremo più precisamente che il primo membro di (10) o (10^{bis}) resti, nel campo che si considera, sempre superiore ad un numero positivo d.

Dall'ipotesi che le derivate prime e seconde di ψ siano finite e continue nel campo che consideriamo, segue facilmente che tali sono pure a_1, a_2, b_1, b_2. Diremo l un numero maggiore del massimo valore assoluto delle derivate prime e seconde della ψ; diremo m un numero maggiore di 1 e del massimo valore assoluto di a_1, a_2, b_1, b_2. Ciò posto è chiaro che noi potremo restringere il campo che si considera per modo che, detti $x_1 \, x_2 \, y_1 \, y_2$, $x'_1 \, x'_2 \, y'_1 \, y'_2$ due punti qualunque di esso:

1.° si abbia

$$|y_1 - y'_1| < \delta, \qquad |y_2 - y'_2| < \delta$$

δ essendo un numero < 1 e $< \frac{d}{128\, m^2\, l^2}$;

2.° indicando con A', B', C' i valori di A, B, C, quando le derivate seconde di ψ siano calcolate in $x'_1\, x'_2\, y'_1\, y'_2$, e le a_1, a_2, siano calcolate in $x_1\, x_2\, y_1\, y_2$, sia

$$|A - A'| < \frac{d}{4}, \qquad |B - B'| < \frac{d}{4}, \qquad |C - C'| < \frac{d}{4}; \tag{11}$$

3.° il campo sia convesso, e cioè il segmento congiungente due punti del campo sia tutto di punti interni al campo.

Diremo Γ questo campo, Γ_0 la parte di esso soddisfacente a (9), $\bar{S}$ il pezzo di S interno a Γ.

Occorre dalle ipotesi fatte su Γ trarre una facile conseguenza.

Se $\delta_1\, \delta_2$ sono due variabili reali entrambe minori di δ si ha sempre

$$\left.\begin{aligned} &\delta_1^2 \pm \delta_1\, \delta_2 + \delta_2^2 > \\ &\quad > \frac{4}{d} \Big[b_2\, \delta_1^2 + 2\, b_1\, \delta_1\, \delta_2 - b_2\, \delta_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} (2\, a_2\, \delta_1 + 2\, a_1\, \delta_2 + b_2\, \delta_1^2 + \\ &\qquad\qquad + 2\, b_1\, \delta_1\, \delta_2 - b_2\, \delta_2^2) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2\, \partial y_1}\, \delta_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2\, \partial y_2}\, \delta_2 \Big]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Infatti se supponiamo per es. $|\delta_2| \leq |\delta_1| \leq \delta$, ricordando che $\delta < 1$ avremo

$$\delta_1^2 \pm \delta_1\, \delta_2 + \delta_2^2 > \frac{3}{4}\, \delta_1^2,$$

$$b_2\, \delta_1^2 + 2\, b_1\, \delta_1\, \delta_2 - b_2\, \delta_2^2 < 4\, m\, \delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} (2\, a_2\, \delta_1 + 2\, a_1\, \delta_2 + b_2\, \delta_1^2 + 2\, b_1\, \delta_1\, \delta_2 - b_2\, \delta_2^2) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2\, \partial y_1}\, \delta_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2\, \partial y_2}\, \delta_2 <$$

$$< 6\, l^2\, m\, \delta_1 \leq 6\, l^2\, m\, \delta;$$

dalle quali, per essere $\delta < \frac{d}{128 \cdot m^2 \cdot l^2}$, segue (12).

3. Ciò posto chiameremo punto razionale di S un punto le cui coordinate $x_2\, y_1\, y_2$ siano razionali: l'insieme dei punti razionali di S è un insieme numerabile, denso su S. Fissata in modo arbitrario una numerazione dei punti di questo insieme, indichiamo l'ennesimo punto con $(\xi_n\, \eta_n) = (\xi_{1n}, \xi_{2n}, \eta_{1n}, \eta_{2n})$. Ad ognuno di questi punti connettiamo una superficie caratteristica Σ_n data dall'equazione tra le variabili complesse

$$x - \xi_n = \frac{1}{n} + a_n (y - \eta_n) + b_n (y - \eta_n)^2 \qquad (13)$$

dove $a_n\, b_n$ indicano i valori di a, b nel punto $(\xi_n\, \eta_n)$.

Tale superficie si ottiene sottoponendo ad una traslazione di ampiezza $\frac{1}{n}$ nel verso delle x_1 positive, e cioè verso l'interno del campo (9), una delle superficie costruite a pag. 79 del mio citato lavoro le quali passano per il punto (ξ_n, η_n), ed inoltre, grazie all'ipotesi (3) o (10), nell'intorno di questo punto giacciono totalmente fuori di (9) e cioè nel campo $x_1 < \varphi\,(x_2\, y_1\, y_2)$ (*).

Tale insieme di superficie ammette come punti di condensazione tutti i punti di S; basta osservare che Σ passa per il punto $\left(\xi_n + \frac{1}{n}, \eta_n\right)$, e che l'insieme di questi punti ha come punti di condensazione tutti i punti di $\bar{S}$. Dimostreremo ora di più che queste superficie caratteristiche non hanno all'interno di Γ punti di condensazione appartenenti al campo Γ_0. Costruiremo poi una funzione analitica la quale si annulli sopra tutte queste superficie caratteristiche: una tale funzione avrà certamente S come frontiera.

4. Per dimostrare quanto ora si è enunciato proveremo anzitutto la proposizione seguente: Se ξ, η indica un punto di S, $x\, y$ un punto di Γ, esiste un numero h indipendente da x, y, ξ, η e tale che, se la funzione

$$\pi\,(x\, y) = (x - \xi) - a\,(y - \eta) - b\,(y - \eta)^2 \qquad (14)$$

— a, b essendo calcolati nel punto $(\xi\, \eta)$ — soddisfa alla disuguaglianza

$$\pi\,(x\, y) < \sigma, \qquad (15)$$

(*) Quando accadesse che la forma $A\,\delta_1^2 + B\,\delta_1\,\delta_2 + C\,\delta_2^2$ fosse senz'altro già essa stessa una forma definita, in luogo delle (13) si potrebbero assumere più semplicemente delle superficie piane ponendo $b = 0$; cfr. il n. 6.

per punto $x\,y$ si ha

$$x_1 - \psi(x_2\, y_1\, y_2) < h\,\sigma. \tag{16}$$

Infatti posto $\pi(x\,y) = \pi_1 + i\,\pi_2$ avremo da (14) e (15)

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \xi_1 &+ \pi_1 + a_1(y_1-\eta_1) - a_2(y_2-\eta_2) + b_1(y_1-\eta_1)^2 - \\ &- b_1(y_2-\eta_2)^2 - 2\,b_2(y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2) \\ x_2 = \xi_2 &+ \pi_2 + a_2(y_1-\eta_1) + a_1(y_2-\eta_2) + b_2(y_1-\eta_1)^2 - \\ &- b_2(y_2-\eta_2)^2 + 2\,b_1(y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2) \\ |\pi_1| < \sigma\,, &\qquad |\pi_2| < \sigma. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Sviluppando la funzione $\psi(x_2\, y_1\, y_2)$ nel punto $\xi_2\,\eta_1\,\eta_2$ mediante la formula di Taylor arrestata ai termini di secondo ordine avremo, ricordando che $\xi_1 = \psi(\xi_2\,\eta_1\,\eta_2)$:

$$x_1 - \psi(x_2\, y_1\, y_2) =$$

$$= x_1 - \xi_1 - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x_2 - \xi_2) - \frac{\partial\psi}{\partial y_1}(y_1-\eta_1) - \frac{\partial\psi}{\partial y_2}(y_2-\eta_2) -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2^2}(x_2-\xi_2)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial y_1^2}(y_1-\eta_1)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial y_2^2}(y_2-\eta_2)^2 -$$

$$- \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\,\partial y_1}(x_2-\xi_2)(y_1-\eta_1) - \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\,\partial y_2}(x_2-\xi_2)(y_2-\eta_2) - \frac{\partial^2\psi'}{\partial y_1\,\partial y_2}(y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2)$$

dove coll'apice pensiamo indicare che le derivate debbono essere prese in un conveniente punto intermedio tra $(x\,y)$ e $(\xi\,\eta)$, e senza l'apice intendiamo che siano calcolate nel punto $(\xi\,\eta)$. Sostituiamo a $x_1 - \xi_1$, $x_2 - \xi_2$ i loro valori dati da (17) e poniamo per brevità $\delta_1 = y_1 - \eta_1$, $\delta_2 = y_2 - \eta_2$: avremo allora tenendo conto di (5) (6) (7) (8):

$$x_1 - \psi(x_2\, y_1\, y_2) =$$

$$= \pi_1 - \pi_2\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2^2}(\pi_2 + 2a_2\delta_1 + 2a_1\delta_2 + 2b_2\delta_1^2 - 2b_2\delta_2^2 + 4b_1\delta_1\delta_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\,\partial y_1}\delta_1 + \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\,\partial y_2}\delta_2\right| +$$

$$+ \delta_1^2\left|A' - \frac{C'}{2} - A\right| + \delta_1\delta_2\,[B' - B] + \delta_2^2\left|C' - \frac{A'}{2} - C\right|$$

$$-[b_2\delta_1^2-b_2\delta_2^2+2b_1\delta_1\delta_2]\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2^2}(2a_2\delta_1+2a_1\delta_2+b_2\delta_1^2-b_2\delta_2^2-2b_1\delta_1\delta_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_1}\delta_1+\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_2}\delta_2\right].$$

E potremo anche scrivere, indicando per brevità con D il coefficiente di π_2:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1-\psi(x_2y_1y_2)=\pi_1-\pi_2D-\\
&-\delta_1^2\left[\frac{A+C}{2}+A'-A\right]+\delta_1\delta_2[B-B']-\delta_2^2\left[\frac{A+C}{2}+C'-C\right]\\
&-[b_2\delta_1^2-b_2\delta_2^2+2b_1\delta_1\delta_2]\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2^2}(2a_1\delta_2+2a_1\delta_1+b_2\delta_1^2-b_2\delta_2^2-2b_1\delta_1\delta_2)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_1}\delta_1+\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_2}\delta_2\right].
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Ora per le ipotesi fatte nel n. 2 si avrà per (11) che finchè $(x\,y)$ è in Γ

$$\frac{A+C}{2}+A'-A>\frac{A+C}{2}-|A'-A|>\frac{d}{2}-\frac{d}{4}=\frac{d}{4}$$

$$|B-B'|<\frac{d}{4}$$

$$\frac{A+C}{2}+C'-C>\frac{A+C}{2}-|C'-C|>\frac{d}{2}-\frac{d}{4}=\frac{d}{4}.$$

Quindi dalla formula (12) si ha che la somma degli ultimi quattro termini di (18) è negativa: onde segue

$$x_1-\psi(x_2\,y_1\,y_2)<\pi_1-\pi_2\,D. \tag{19}$$

Ora D è una quantità che, quando $x_2\,y_1\,y_2$ è in Γ, resta sempre in modulo inferiore a $l\,m\left|1+8\,\delta+\frac{\sigma}{2}\right|$. Quindi posto $h=l\,m\left|1+8\,\delta+\frac{\sigma}{2}\right|+1$, avremo

$$x_1-\psi(x_2\,y_1\,y_2)<h\,\sigma$$

come avevamo enunciato.

5. Risulta subito dalla proposizione precedente che fissato un numero positivo ρ piccolo a piacere esiste soltanto un numero finito di superficie Σ,

le quali abbiano dei punti appartenenti al campo Γ_ρ in cui è

$$x_1 - \psi(x_2\, y_1\, y_2) > \rho : \tag{20}$$

invero per (13) su Σ_n è

$$\pi_n(x\,y) = \frac{1}{n} \quad \text{dove} \quad \pi_n(x\,y) = x - \xi_n + a_n(y - \eta_n) + b_n(y - \eta_n)^2, \tag{21}$$

e quindi perchè una tale superficie abbia punti interni a Γ_ρ occorre sia $n < \frac{h}{\rho}$ (*). E con ciò risulta senz'altro provato che l'insieme di superficie Σ_n non ha punti di condensazione in Γ interni al campo Γ_0.

Per costruire ora una funzione analitica regolare nel campo Γ_0 la quale si annulli nei punti delle Σ_n, consideriamo, seguendo il noto procedimento di WEIERSTRASS, il prodotto infinito

$$\prod_n \left(1 - \frac{1}{n\,\pi_n(x\,y)}\right) e^{p_n(x\,y)} \tag{22}$$

dove si è posto

$$p_n(x\,y) = \left[\frac{1}{n\,\pi_n(x\,y)} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2\,\pi_n^2(x\,y)} + \cdots + \frac{1}{n}\,\frac{1}{n^n\,\pi_n^n(x\,y)}\right]. \tag{23}$$

È facile vedere che tale prodotto infinito è convergente uniformemente in un qualunque campo Γ_ρ; esso rappresenta quindi in Γ_0 una funzione analitica regolare la quale ha S per frontiera.

Per dimostrare che il prodotto (12) è uniformemente convergente in ogni campo Γ_ρ fissiamo un numero arbitrario positivo $\varepsilon < 1$, e distinguiamo i numeri n in due classi a seconda che $\frac{h}{n\rho} \geq 1 - \varepsilon$ o $\frac{h}{n\rho} < 1 - \varepsilon$. I valori di n appartenenti alla prima classe sono in numero finito, noi potremo trascurare i fattori corrispondenti nella dimostrazione di convergenza. Per dimostrare che il prodotto dei fattori residui è convergente basterà dimostrare la convergenza della serie dei logaritmi. Ora per (23) tale serie è

$$\sum_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\,\frac{1}{n^{n+m}\,\pi_n^{n+m}(x\,y)}\right). \tag{24}$$

(*) Riferendoci alla (19) ed osservando che qui è $\pi_2 = 0$ potremmo porre $h = 1$.

Ma se $(x\,y)$ è in Γ_ρ, per il n. precedente si ha

$$\pi_n(x\,y) > \frac{\rho}{h}$$

quindi sarà

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{n+m} \frac{1}{n^{n+m}\,\pi_n^{n+m}(x\,y)} < \frac{h^{n+1}}{n^{n+1}\,\rho^{n+1}} \sum_0^\infty \frac{h^m}{n^m\,\rho^m} \leqq \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{h^{n+1}}{n^{n+1}\,\rho^{n+1}}.$$

E quindi la serie dei moduli di (24) converge più rapidamente della serie

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum(1-\varepsilon)^{n-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\,.$$

E questo dimostra il nostro enunciato.

6. Il ragionamento precedente non è sufficiente ad invertire la proposizione iniziale del n. 1 in un campo comunque esteso per questa ragione soltanto, che non possiamo asserire che le superficie Σ_n da noi costruite non abbiano come punti di condensazione punti appartenenti a regioni sufficientemente lontane dal punto $(\xi_n\,\eta_n)$ cui esse corrispondono ed in cui sia $\varphi > 0$. Ogni qual volta si possa escludere questo caso si potrà completare il ragionamento, e ciò avverrà ben sovente in casi particolari: così avverrà se l'ipersuperficie è tale che giace sempre tutta da una parte di un qualunque suo iperpiano tangente ed abbia comune con questo il solo punto di contatto: tali sono ad esempio le ipersfere, le ipersuperficie ellissoidiche, ecc. Chiamiamo S l'ipersuperficie: chiamiamo interna all'ipersuperficie la regione che non contiene punti degli iperpiani tangenti (*). Osserviamo che presa una tale iper-

---

(*) È interessante mostrare direttamente che una tale ipersuperficie S soddisfa alle condizioni necessarie esposte al principio del n. 1. Supponiamo invero che il campo interno ad S sia il campo $\varphi > 0$: il gruppo dei termini di secondo grado dello sviluppo di φ in un suo punto qualunque deve allora costituire una forma definita negativa. Essa è

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}u_1^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}u_2^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}u_3^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}u_4^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}u_1\,u_2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_1}u_1\,u_3 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_2}u_1\,u_4$$
$$+ 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}u_2\,u_3 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_2}u_2\,u_4 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1\,\partial y_2}u_3\,u_4\,.$$

Ora l'espressione $\mathfrak{C}\,\varphi$ si ottiene precisamente sommando le due quantità che si hanno superficie S, fissato un numero positivo ε piccolo a piacere, si può trovare un numero $\delta(\varepsilon)$ tale che, se Π è un iperpiano parallelo all'iperpiano tangente in un punto P di S condotto per un qualunque punto P' della normale ad S in P che disti da P di meno di $\delta(\varepsilon)$, i punti di Π interni ad S siano tutti interni ad un'ipersfera di centro P' e raggio ε (*).

Ciò posto si fissi di nuovo sopra S un insieme numerabile di punti denso sull'S: si chiami $P_n \equiv (\xi_n \, \eta_n)$ l'n-esimo punto di tale insieme, e come superficie caratteristica Σ_n si assuma il piano caratteristico perpendicolare alla normale ad S condotto per il punto P'_n di questa normale che è interno ad S e dista da $(\xi_n \, \eta_n)$ di $\frac{1}{n}\cdot$ È facile mostrare che non esistono punti limiti di questo insieme di piani caratteristici interni ad S; in altri termini che preso un campo chiuso Δ tutto di punti interni ad S esiste solo un numero finito di piani Σ_n che abbiano punti comuni con Δ. Infatti dicasi γ la minima distanza di punti di Δ da punti di S e si calcoli $\delta\left(\frac{\gamma}{2}\right)$; i piani caratteristici Σ per cui n è maggiore del massimo dei due numeri $\frac{2}{\gamma}$ e $\frac{1}{\delta\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$ non hanno

---

facendo successivamente in detta forma le posizioni:

$$u_1 = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2}}, \quad u_2 = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2}}, \quad u_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2}, \quad u_4 = 0$$

$$u_1 = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2}}, \quad u_2 = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2}}, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2};$$

quindi è certamente $\mathfrak{C}\varphi < 0$.

(*) Invero se un tal numero $\delta(\varepsilon)$ non esistesse potremmo costruire una successione di punti $P_1 \, P_2 \ldots P_n \ldots$ tali che l'iperpiano Π_n parallelo all'iperpiano tangente in P_n condotto per un punto P'_n della normale ad S in P_n volta verso l'interno per cui $P_n P'_n < \frac{1}{n}$ contiene punti interni ad S distanti da P'_n più di ε. Sia P un punto limite di questo insieme, l'iperpiano tangente in P è l'iperpiano limite degli iperpiani Π_n: esso conterrebbe quindi punti esterni all'ipersuperficie S od almeno di S stessa distanti da P almeno della lunghezza ε; e quindi diversi da P; ciò contraddice alla ipotesi fatta per l'ipersuperficie S.

punti comuni con Δ. Invero un tale Σ_n appartiene totalmente all'iperpiano parallelo all'iperpiano tangente ad S in P_n condotto per il punto P'_n: ed essendo $P_n P'_n = \frac{1}{n} < \delta\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, i suoi punti interni ad S sono tutti interni all'ipersfera di centro P'_n e raggio $\frac{\gamma}{2}$ e quindi non possono distare da S più di $\frac{1}{n} + \frac{\gamma}{2} < \gamma$: essi sono quindi tutti esterni a Δ, c. v. d.

Presi dunque questi piani caratteristici Σ_n come varietà di zero di una funzione analitica di x ed y che si può costruire con metodi analoghi a quelli del n. 5, questa sarà una funzione analitica regolare all'interno di S, la quale ha S come frontiera.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XVIII della Serie III, pag. 69 e seguenti.

Tipo-Lit. Rebeschini di Turati e C.
Milano, 1911.

MILANO — TIPO-LIT. REBESCHINI DI TURATI E C.

Offerto dall' Autore.

ESTRATTO

DAGLI *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.*

Sopra un teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

(*Di* EUGENIO ELIA LEVI, *a Genova.*)

INTRODUZIONE.

1. Sia data un'equazione alle derivate parziali di secondo ordine in due variabili indipendenti

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0. \tag{1}$$

Accanto al classico teorema di esistenza delle soluzioni di una tale equazione rispondenti ai dati iniziali di CAUCHY sopra una curva assegnata, negli ultimi decenni si rivolse l'attenzione ad un gruppo di analoghi teoremi di esistenza in cui i dati iniziali sono assegnati su due curve diverse uscenti da un punto O. Il primo forse di essi fu quello che occorre nel metodo di RIEMANN per l'integrazione delle equazioni lineari iperboliche. Tale gruppo di teoremi di esistenza ha molta importanza nella teoria generale dell'equazione (1). Così teoremi di questo tipo, e precisamente del tipo più semplice in cui almeno una delle due curve sia una caratteristica di (1) (*), sono quelli che servono da una parte, come ho rammentato, nel metodo di RIEMANN per l'integrazione delle equazioni lineari, d'altra parte servono — seguendo il GOURSAT — a dimostrare in modo rigoroso che una caratteristica semplice di (1) appartiene ad infinite superficie soluzioni (**).

Ma tutti questi studii presentano ancora grandi lacune, sia dal punto di vista delle funzioni analitiche, sia da quello delle funzioni di variabili reali.

(*) Lo studio di questo caso è dovuto a RIEMANN, DARBOUX, PICARD e GOURSAT. Si noti però che anche in questo caso particolare il teorema per le equazioni non lineari è provato soltanto nel caso analitico.

(**) Su questa applicazione vedi ancora più oltre al n. 2 e il § III.

risultati più completi ottenuti fin qui possono raccogliersi nei due enunciati seguenti:

1) *L'equazione sia lineare nelle derivate seconde con coefficienti funzioni di x ed y soltanto* (*) *ed a caratteristiche distinte: talchè con una conveniente trasformazione di variabili possa ridursi alla forma*

$$s = f(x\, y\, z\, p\, q). \tag{2}$$

Siano date sul piano $x\,y$ due curve γ_1 e γ_2 a tangente variabile con continuità che si taglino in un punto O: esiste in un campo attorno ad O una ed una sola soluzione di (2) *che su γ_1 e γ_2 si riduca a due funzioni assegnate* (*che prendono in O lo stesso valore*), *purchè il birapporto delle tangenti a γ_1 e γ_2 in O e degli assi* (che sono le caratteristiche di (2)) *sia in modulo* -1 (**).

(*) E cioè a caratteristiche *fisse sul piano $x\,y$*.

(**) Il lavoro principale è quello del Goursat: *Sur un problème relatif à la théorie des équations, etc.* (Annales de la Faculté de Toulouse, 1e Mém., vol. 5, serie 2.a, 1903, pag. 405-436, 2e Mém., vol. 6, serie 2.a, 1904, pag. 117-144). Sullo stesso argomento è tornato il Goursat recentemente nella Memoria *Sur un procédé alterné* (Annales de la Faculté de Toulouse, vol. 11, serie 2.a, 1909). Il metodo seguito in quest'ultimo lavoro è in sostanza assai simile a quello usato dal Fubini nella Nota: *Di alcuni nuovi problemi al contorno, ecc.* (Atti della R. Accademia di Torino, 1905). Citerò ancora, tra i molti altri, i lavori di Hadamard (*Résolution d'un problème aux limites, etc.* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1904, vol. 32); di Mayer (*Randwerthaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen, etc.* Math. Annalen, vol. 68, 1910, pag. 75-106); di Mason (*On the linear differential equation of hyperbolic type*, Math. Annalen, vol. 65, 1908, pag. 570-575); del Picone (*Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 30, 2.° sem. 1910, pag. 349-376, *Sopra un problema dei valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second'ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono*. Ibid., vol. 31, 1.° sem. 1911). In tutti questi lavori il teorema di Goursat viene esteso ed approfondito, sia in quanto si generalizza la natura dei dati iniziali, sia in quanto si sostituiscono alle condizioni esposte per le curve γ_1 e γ_2 nel nostro enunciato altre condizioni che nel caso che γ_1 e γ_2 abbiano un punto O a comune includono quelle da noi poste, sia infine in quanto si determina con maggiore cura il campo in cui è possibile dimostrare l'esistenza.

Rimandiamo a questi lavori per tali studii che qui non ci interessano.

La sola cosa che ci importa giustificare è una lieve differenza che compare tra il nostro enunciato e quello del Goursat: il Goursat enuncia il teorema come noi abbiamo fatto più sopra nel caso che si tratti di funzioni analitiche, nel caso che si tratti di funzioni di variabili reali aggiunge l'ipotesi che le curve γ_1 e γ_2 non separino le caratteristiche. La ragione

È da notare che quest'ultima condizione è pure *necessaria* affinchè il teorema di esistenza sia vero.

II) *L'equazione e le funzioni di cui si tratta siano regolari analitiche. Si immagini che con un conveniente cambiamento delle variabili indipendenti e della funzione incognita le condizioni iniziali siano ridotte* (come sempre è possibile se γ_1 e γ_2 non sono tangenti nel punto di incontro O) *a chiedere che la funzione si annulli sugli assi, ed abbia anche derivate prime e seconde nulle nell'origine. Sia allora l'equazione ridotta nella forma* (*)

$$A(x\,y\,z\,p\,q\,r\,t)\,r + s + B(x\,y\,z\,p\,q\,r\,t)\,t = f(x\,y\,z\,p\,q). \tag{3}$$

Esiste una ed una sola soluzione analitica del problema purchè

$$A(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0)\,B(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0) < \frac{1}{4}\ (^{**}). \tag{4}$$

Confrontiamo i due enunciati precedenti. Il campo funzionale in cui si applica il primo è assai più ampio del campo funzionale in cui si applica il secondo. Anche la condizione imposta in questo ultimo enunciato è di gran lunga più restrittiva di quella imposta nel primo: poichè con un cambiamento di variabili si può vedere che il supporre in modulo $= 1$ il birapporto delle tangenti a γ_1 e γ_2 e delle direzioni caratteristiche nell'elemento iniziale equi-

---

di ciò devesi ricercare nel fatto che per il GOURSAT in questo caso γ_1 e γ_2 sono due curve che *escono dal punto O*, o più precisamente sono *due segmenti di curva che hanno un estremo comune nel punto O:* mentre noi abbiamo richiesto che γ_1 e γ_2 *si taglino in O*, cioè a dire siano *due segmenti di curva che hanno il punto O come punto interno comune*. Come si vede, questo secondo modo di intendere ristabilisce un perfetto parallelismo tra il caso reale ed il caso analitico. Per tutte queste osservazioni vedi la seconda delle citate Memorie del PICONE.

(*) Perchè alla equazione si possa attribuire la forma (3) occorrerà che le direzioni caratteristiche nell'elemento iniziale (0000000) non siano nè coincidenti fra loro e colla direzione di uno degli assi, nè formino colle direzioni degli assi un birapporto uguale a -1.

(**) È questo teorema un caso particolare di un teorema assai generale del RIQUIER: *Sur l'existence dans certains systèmes différentiels des intégrales répondant à des conditions initiales données* (Annales de l'École Normale Sup., 1904). Questo lavoro è riprodotto nel Cap. X del volume *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (Gauthier Villars, 1910), cfr. specialmente il n. 169. Altra dimostrazione assai simile in sostanza a quella del RIQUIER, ma esposta sotto forma assai nitida ed elegante, diede il GOURSAT nella Nota *Sur un théorème d'existence* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1906).

vale al supporre, colle notazioni del secondo enunciato, che non sia

$$A(0000000)\,B(0000000)\ \textit{reale e} \geqq \frac{1}{4}\ (*) . \qquad (5)$$

Invece l'enunciato II) si riferisce ad una classe di equazioni assai più ampia che non l'enunciato I).

Resta quindi aperta anche dal punto di vista delle funzioni analitiche la questione di portare lo studio dell'equazione generale (1) quale in sostanza è studiata nell'enunciato II), allo stesso punto di compiutezza che quello dell'equazione (2); e ciò mi pare di tanto più importante in quanto che i metodi usati per l'equazione (2) non valgono affatto per la (1); e d'altra parte il trattare a fondo il caso dell'equazione (1) può indurre qualche speranza di poter portare anche qualche maggiore precisione nell'enunciato generale del RIQUIER di cui, come si disse, II) non è che un caso particolare (**).

Dal punto di vista poi delle funzioni di variabili reali resta da esaminare se e quando il teorema di esistenza è vero per equazioni di tipo diverso dalle (2).

I due primi paragrafi di questo lavoro sono dedicati per l'appunto a stabilire che la sola condizione richiesta per la risolubilità del problema, nel caso che (1) sia a caratteristiche distinte, è quella che compare nell'enunciato I).

(*) L'intima ragione per cui il metodo di RIQUIER-GOURSAT porta alla condizione (4) invece che alla (5), sta nel fatto che esso consiste essenzialmente, come pone in luce il GOURSAT, nello sviluppare la soluzione cercata di (3) in serie di potenze del parametro $\lambda = A(000000)\,B(000000)$. Ammesso quindi vero, come mostreremo nel presente lavoro, che la condizione di risolubilità sia la (5), si comprende come il GOURSAT ed il RIQUIER non riescano a provare il teorema che nell'ipotesi (4), poichè il cerchio $|\lambda| < \frac{1}{4}$ è realmente il cerchio di convergenza della loro serie di potenze.

(**) Il teorema del RIQUIER enuncia che un sistema di equazioni, soddisfacente a certe condizioni molto generali che non è qui il caso di descrivere, è sempre integrabile con certi tipi di condizioni iniziali, purchè i dati iniziali soddisfacciano a certe disuguaglianze. Se poniamo mente al caso particolare di tale teorema da noi esposto nel testo vediamo che un carattere delle disuguaglianze del RIQUIER è di escludere un insieme di dati iniziali dipendente da tanti parametri quanti sono quelli da cui dipende l'insieme dei dati per cui il problema è risolubile; talchè non si può dire che *in generale* esista la soluzione. Il sostituire la disuguaglianza (4) colla condizione (5) fa sì che l'insieme escluso venga a dipendere da un numero di parametri minore di quello da cui dipende l'insieme accettato. E fa sperare che qualcosa di analogo possa dirsi del teorema generale del RIQUIER.

2. Ho già accennato che il Goursat (*) fonda la dimostrazione del fatto che una curva di elementi di 2.° ordine caratteristica semplice per l'equazione (1) appartiene ad infinite superficie soluzioni di (1) appunto sopra il teorema precedente; egli costruisce dapprima una superficie soluzione di (1) la quale contenga la curva sostegno della curva di elementi caratteristica (**), ed un'altra curva arbitraria, e dimostra poi che gli elementi di 2.° ordine della superficie lungo la prima curva coincidono cogli elementi della caratteristica. Tale dimostrazione il Goursat non poteva fare che nel caso delle equazioni analitiche, poichè il teorema generale di esistenza mancava nel caso non analitico. Nel § III io applico il teorema dimostrato nei paragrafi precedenti appunto a completare dal punto di vista delle funzioni di variabili reali la teoria delle caratteristiche. Se associamo questo risultato colla possibilità di risolvere il problema di Cauchy quando la curva di elementi iniziale non sia una caratteristica, da me dimostrata altrove (***), possiamo così conchiudere che *anche dal punto di vista delle funzioni di variabili reali tutte e sole le curve di elementi che possono essere curve di contatto di due superficie soluzioni di un'equazione* (1) *a caratteristiche semplici, sono le sue caratteristiche* (****).

3. In tutto quanto precede non ho mai parlato del caso delle equazioni paraboliche perchè nessun risultato io conosco appartenente a questo ordine di idee e relativo ad esse. Dedico il § IV, che costituirà la parte seconda di questo lavoro, a studiare questo caso. Vi mostro come, allo stesso modo che per il problema di Cauchy, convenga distinguere una particolare classe tra queste equazioni; classe già studiata da Goursat e poi da E. von Weber ($*_*$).

(*) Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations du second ordre.* Vol. I, pag. 184 e ss. Vol. II, pag. 303 e ss.

(**) Se una caratteristica è data dalle equazioni $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$, $p = p(\tau)$, $q = q(\tau)$, $r = r(\tau)$, $s = s(\tau)$, $t = t(\tau)$, dico *curva sostegno di essa* la curva $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$.

(***) *Sul problema di* Cauchy *per le equazioni a caratteristiche reali e distinte.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5.ª, vol. XVI, 1.° sem. 1908, pag. 330-339.

(****) La domanda cui così si risponde era già stata posta più volte. Vedi a questo proposito le osservazioni contenute nella Nota I (pag. 342-53) del volume di Hadamard: *Leçons sur la propagation des ondes, etc.*

($*_*$) Goursat, *Sur une classe d'équations, etc.* Acta Mathematica, vol. 19, pag. 285-340; *Leçons sur les éq. du second ordre*, vol. I, pag. 205 e ss., vol. II, pag. 161 e ss.; E. von Weber, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, etc.* Comptes Rendus, vol. 124 (1897.

[illegible] le caratteristiche dipendono da 7 costanti arbitrarie. Per le equazioni di questa classe il problema è risolubile purchè nessuna delle due curve sia tangente alla direzione delle caratteristiche nel loro punto di incontro.

Lungo e difficile mi sarebbe stato invece l'esaminare compiutamente il problema per il caso generale delle equazioni paraboliche. Sull'esempio dell'equazione del calore ho stabilito che il problema non ammette in generale soluzione dal punto di vista delle funzioni di variabili reali: ma non m'è riuscito di vedere pienamente se nel caso analitico invece il problema sia risolubile o no — fatta astrazione naturalmente dal caso che una delle due curve tocchi la caratteristica nell'origine: allora il problema è certamente in generale irresolubile.

4. I ragionamenti che seguono valgono quando esistono le derivate degli ordini che via via si richiederà. È però facile vedere che, se le funzioni da cui si parte sono analitiche e le condizioni ad esse relative sono verificate in un campo complesso, tutte le deduzioni successive valgono pure nel campo complesso e le funzioni cui si giunge in fine sono ancora analitiche. Pertanto si può condurre la dimostrazione senza mai distinguere i due casi. Tale osservazione sarà nel seguito costantemente sottintesa.

PARTE PRIMA

§ I.

In questo paragrafo noi ci occuperemo di tre problemi preliminari su cui si fondano i ragionamenti del § II.

1. *Problema I.* Siano $a(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ funzioni finite e continue per $x \geq \alpha$, è possibile determinare una funzione $h(x)$ tale che

$$h(x) - a(x)\, h(\psi(x)) = \varphi(x)\ ? \tag{1}$$

[illegible] 1215; Goursat, *Remarque sur une Note récente de* M. Weber, ibid., pag. 1294. Vedi anche per il significato che nella teoria generale delle equazioni hanno le caratteristiche doppie del tipo di quelle appartenenti a questa classe di equazioni la mia Memoria *Caratteristiche multiple e problema di* Cauchy. Annali di Matematica, vol. XVI, della serie 3.ª, pag. 161-202.

È facile vedere che, se si suppone che per $|x| < \alpha$ sia

$$|a(x)\,\psi(x)| \leq q_1\, |x| \quad \text{con} \quad q_1 < 1 \tag{2$_a$}$$

$$|\psi(x)| \leq |x|\,, \tag{2$_b$}$$

se inoltre si suppone

$$|\varphi(x)| < M\, |x|^l \ \text{con}\ l \geq 1, \quad \varphi(0) = 0, \tag{2$_c$}$$

la soluzione di (1) esiste sempre.

Infatti si costruiscano le funzioni

$$h_0(x) = \varphi(x), \quad h_1(x) = a(x)\, h_0(\psi(x)), \ldots \quad h_i(x) = a(x)\, h_{i-1}(\psi(x)), \ldots; \tag{3}$$

esse esistono tutte per $|x| < \alpha$, grazie a $(2)_b$; ed inoltre soddisfanno per $(2)_c$ e $(2)_a$ alle disuguaglianze

$$|h_0(x)| < M\, |x|^l, \quad |h_1(x)| < q_1\, M\, |x|^l, \ldots, \quad |h_i(x)| < q_1^i\, M\, |x|^l \ldots \tag{4}$$

La serie $\sum\limits_0^\infty h_i(x)$ converge dunque uniformemente ed assolutamente per $|x| < \alpha$; essa rappresenta quindi una funzione $h(x)$ soluzione di (1)

$$h(x) = \sum_0^\infty h_i(x). \tag{5}$$

E per (4) soddisferà alla disuguaglianza

$$|h(x)| < \frac{M}{1 - q_1}\, |x|^l. \tag{6}$$

2. *Unicità della soluzione.* Dalla disuguaglianza (6) segue in particolare che la $h(x)$ così trovata soddisfa nell'origine alla condizione di Lipschitz. È facile vedere che, *se si suppone* $a(0) \neq 1$, essa è l'unica soluzione di (1) che soddisfaccia alla condizione di Lipschitz nell'origine. Invero se due tali soluzioni esistessero, la loro differenza sarebbe una funzione $H(x)$, per cui esiste un numero μ tale che $|H(x) - H(0)| < \mu\, |x|$, e che inoltre è soluzione dell'equazione

$$H(x) - a(x)\, H(\psi(x)) = 0. \tag{7}$$

Ma per essere $a(0) \neq 1$ da (7) segue, facendovi $x = 0$, $H(0) = 0$; onde si avrà

$$|H(x)| < \mu\, |x|\,. \tag{8}$$

Ma posto

$$\psi_0(x) = x, \quad \psi_1(x) = \psi(x), \quad \psi_2(x) = \psi(\psi_1(x)), \ldots, \quad \psi_i(x) = \psi(\psi_{i-1}(x)), \ldots \tag{9}$$

si ha, insieme con (7),

$$H(x) = \left[\prod_0^n{}_i\, a(\psi_i(x))\right] H(\psi_{n+1}(x)),$$

onde per (8)

$$|H(x)| < \mu\, |\psi_{n+1}(x)| \prod_0^n{}_i\, a(\psi_i(x)) . \tag{10}$$

Ma per (2)$_a$ è

$$a(\psi_{i-1}(x))\, |\psi_i(x)| \leqq q_1\, |\psi_{i-1}(x)| ,$$

onde da (10) segue

$$|H(x)| < \mu\, a(\psi_n(x))\, |\psi_{n+1}(x)| \left| \prod_0^{n-1}{}_i\, a(\psi_i(x)) \right|$$

$$\leqq \mu\, q_1 \left| \psi_n(x) \prod_0^{n-1}{}_i\, a(\psi_i(x)) \right| = \mu\, q_1\, a(\psi_{n-1}(x))\, |\psi_n(x)| \left| \prod_0^{n-2}{}_i\, a(\psi_i(x)) \right| \leqq$$

$$\leqq \mu\, q_1^2 \left| \psi_{n-1}(x) \prod_0^{n-2}{}_i\, a(\psi_i(x)) \right| \leqq \cdots \leqq$$

$$\leqq \mu\, q_1^n\, |x| .$$

Essendo $q_1 < 1$ segue $H(x) = 0$ c. v. d.

Il caso $a(0) = 1$ è realmente un caso eccezionale poichè non è difficile vedere che in tale ipotesi esistono realmente soluzioni di (1) le quali assumono nell'origine un valore prefissato arbitrario, e sono quindi diverse dalla soluzione (5) che nell'origine è nulla.

3. *Sua derivabilità.* È da notare che la condizione fondamentale (2)$_a$ relativa ad $a(x)$ e $\psi(x)$, risulta senz'altro soddisfatta se si suppone che esista la derivata di $\psi(x)$ e che si abbia

$$|a(x)\, \psi'(x)| \leqq q_1 < 1. \tag{11$_a$}$$

Se si suppone inoltre che anche $a(x)$ e $\varphi(x)$ abbiano le derivate e che sia

$$|a'(x)| < m \tag{11$_b$}$$

$$|\varphi'(x)| < \rho(|x|) \tag{11$_c$}$$

dove $\rho(|x|)$ è una funzione positiva non decrescente di $|x|$, è facile vedere che anche la funzione $h(x)$ costruita sopra ammette la derivata prima. Si osservi infatti che derivando le (3) e tenendo conto di (4), (11) si ha

$$|h'_0(x)| < \rho(|x|), \quad |h'_1(x)| < m M |x| + q_1 \rho(|x|), \ldots$$
$$|h'_i(x)| < i\, m\, q_1^{i-1} M |x| + q_1^i \rho(|x|), \ldots;$$

onde segue che la serie $\sum\limits_0^\infty h'_i(x)$ converge uniformemente per $|x| < z$; e la sua somma rappresenta quindi la derivata di (5). Si ha anzi precisamente

$$|h'(x)| < \frac{m}{(1-q_1)^2} M |x| + \frac{1}{1-q_1} \rho(|x|). \tag{12}$$

4. *Sulle soluzioni di un'equazione lineare alle derivate parziali.* Sulla risoluzione del problema precedente si fonda la risoluzione degli altri che tosto andremo a discutere. Ma prima di parlare di essi vogliamo rammentare alcune proprietà delle soluzioni delle equazioni del tipo

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \lambda(x\,y) \frac{\partial \zeta}{\partial y} = f(x\,y). \tag{13}$$

È noto come tali soluzioni si ottengano. Si supponga $\lambda(x\,y)$ finita e continua insieme colle sue derivate prime per $|x| + |y| < z_1$; si indichi con

$$y = \theta(x\,\eta) \tag{14}$$

la soluzione dell'equazione

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \lambda(x\,y) \tag{15}$$

che per $x = 0$ dà $y = \eta$; sia $\eta = \psi(x\,y)$ la funzione che si ottiene risolvendo (14) rapporto a η e cioè la soluzione di

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \lambda(x\,y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{16}$$

che per $x = 0$ si riduce a y. La soluzione generale di (13) è allora data, se $f(x\,y)$ è finita e continua ed ammette le derivate prime, da

$$\left.\begin{aligned} \zeta(x\,y) &= F(x\,y) + h(\psi(x\,y)) \\ F(x\,y) &= \left| \int_0^x f(\xi, \theta(\xi\,\eta))\, d\,\xi \right|_{\eta = \psi(x\,y)} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

dove $h(x)$ indica una qualunque funzione derivabile.

Si supponga che $\lambda(x\,y)$, $f(x\,y)$ soddisfacciano alle disuguaglianze:

$$f(x\,y) < M_1\,[\,|x| + |y|\,]^{l_1} \qquad (l_1 \geqq 0), \tag{18$_a$}$$

$$\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right] < M'_1\,[\,|x| + |y|\,]^{l'_1} \qquad (l'_1 \geqq 0)\ (^*), \tag{18$_b$}$$

$$\lambda(x\,y) \leqq q_2 < 1, \tag{18$_c$}$$

$$\left[\left|\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right|\right] < m_1. \tag{18$_d$}$$

Si vede facilmente che nel campo $|x| + |y| < \alpha_1$ le funzioni $\psi(x\,y)$, $F(x\,y)$ hanno le derivate e soddisfamno alle disuguaglianze seguenti:

$$F(x\,y) < k_1 \frac{1}{l_1+1} M_1\,[\,|x| + |y|\,]^{l_1+1}, \tag{19$_a$}$$

$$\left[\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\right] < M_1\,[\,|x| + |y|\,]^{l_1} + k_2^2\,k_1 \frac{1}{l'_1+1} M'_1\,[\,|x| + |y|\,]^{l'_1+1}, \tag{19$_b$}$$

$$\psi(x\,y) < |x| + |y|, \tag{19$_c$}$$

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right| < k_2, \qquad \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| < q_2\,k_2, \tag{19$_d$}$$

dove

$$k_1 = \frac{1}{1-q_2}, \qquad k_2 = e^{m_1\alpha_1}\ (^{**}).$$

(*) Colla notazione $[a, b, \ldots] < A$ indichiamo qui e nel seguito l'insieme delle disuguaglianze $a < A$, $b < A, \ldots$

(**) Infatti da (17) segue intanto che si può calcolare $F(x\,y)$ in tutto il campo in cui si può determinare la soluzione (14) di (15) e risolvere poi (14) rapporto a η. Ora per (18)$_c$ la soluzione (14) di (15) esiste finchè x ed η sono tali che $|x| + |y| < \alpha_1$, ed inoltre è per le (14) e (15) stesse

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = [\lambda(x\,y)]_{y=\theta(x\eta)}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = e^{\int_0^x \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi \\ y=\theta(\xi\eta)}} d\xi},$$

onde per (18)$_c$ e (18)$_d$ segue

$$\left|\frac{\partial \theta}{\partial x}\right| < q_2, \qquad e^{-m_1|x|} < \left|\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right| < e^{m_1|x|}. \tag{α}$$

Con ciò si avrà immediatamente che per $|x| + |y| < \alpha_1$, (14) è risolubile rapporto a η:

Per dedurre dalle (19) delle limitazioni per $\zeta(x\,y)$ converrà conoscere delle limitazioni per $h(x)$; e ciò dipenderà dalla natura delle condizioni iniziali assegnate alla $\zeta(x\,y)$. Così se si chiede che per $x = 0$, $\zeta(x\,y)$ si riduca

---

cioè esiste $\psi(x\,y)$ ed è

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right|} < e^{m_1 x} \leqq e^{m_1 a_1} = k_2, \tag{β}$$

e per (16)

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| < \left|\lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}\right| < q_2 k_2; \tag{γ}$$

queste disuguaglianze (β) e (γ) sono le $(19)_d$. Inoltre si ha, posto

$$\chi(x\,y) = \left[\int_0^x \lambda(\xi, \theta(\xi\,\eta))\, d\,\xi\right]_{\eta=\psi(x y)},$$

che $\chi(x\,y)$ è la soluzione dell'equazione $\frac{\partial \chi}{\partial x} + \lambda(x\,y)\frac{\partial \chi}{\partial y} = \lambda(x\,y)$ che si annulla per $x = 0$: onde da (16) viene $\psi(x\,y) = -\chi(x\,y) + y$; ma per $(18)_c$ è $|\chi(x\,y)| < q_2 |x| < |x|$ onde

$$|\psi(x\,y)| < |x| + |y|$$

che è $(19)_c$. Per trovare $(19)_a$ e $(19)_b$ si faccia anzitutto l'osservazione seguente: per (α) si ha che $\left|\frac{\partial}{\partial x}\left\{|x| + |\theta(x\,\eta)|\right\}\right| > 1 - q_2$, ed anzi che tale derivata è sempre positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$; se quindi si vuol calcolare $\int_0^x \left[|x| + |\theta(x\,\eta)|\right]^t d\,x$ si può prendere come variabile $\mu = |x| + |\theta(x\,\eta)|$, e, si avrà l'integrale $\int_0^\mu \mu^t \frac{d\,\mu}{\frac{d}{d\,x}\left\{|x| + |\theta(x\,\eta)|\right\}}$; per la disuguaglianza precedente sarà quindi

$$\left|\int_0^\mu \frac{\mu^\tau\, d\,\mu}{\frac{d}{d\,x}\left\{|x| + |\theta(x\,\eta)|\right\}}\right| < \frac{1}{1-q_2}\left|\int_0^\mu \mu^\tau\, d\,\mu\right| = \frac{1}{(\tau+1)}\,\frac{1}{1-q_2}\cdot \mu^{\tau+1} =$$

$$= \frac{1}{\tau+1}\,\frac{1}{1-q_2}\left[|x| + |\theta(x\,\eta)|\right]^{\tau+1}.$$

Applicando tali disuguaglianze si otterrà subito da (17), $(18)_a$:

$$|F(x\,y)| = \left|\left[\int_0^x f(x, \theta(x\,\eta))\, d\,x\right]_{\eta=\psi(x y)}\right| \leqq$$

$$\leqq M_1 \left[\left|\int_0^x \left\{|x| + |\theta(x\,\eta)|\right\}^{t_1} d\,x\right|\right]_{\eta=\psi(x y)} \leqq$$

$$\leqq M_1 \frac{1}{t_1+1}\,\frac{1}{1-q_2}\left\{|x| + |\theta(x\,\eta)|\right\}^{t_1+1}_{\eta=\psi(x y)} = M_1 \frac{1}{t_1+1}\,\frac{1}{1-q_2}\left[|x| + |y|\right]^{t_1+1}$$

ad una funzione assegnata $\varphi(y)$ la quale soddisfaccia alle disuguaglianze

$$|\varphi(y)| < M_2 |y|^{r_2} \tag{20$_a$}$$

sarà

$$\zeta(xy) = F(xy) + \varphi(\psi(xy)),$$

e per (19)$_a$ (19) si avrà

$$|\zeta(xy)| < k_1 \frac{1}{r_1+1} M_1 [|x| + |y|]^{r_1+1} + M_2 [|x| + |y|]^{r_2}. \tag{21$_a$}$$

E se la $\varphi(y)$ ha la derivata e questa soddisfa ad una limitazione del tipo

$$|\varphi'(y)| < M'_2 |y|^{r'_2} \tag{20$_b$}$$

si avrà per (19)$_b$ (19) e (19)$_d$

$$\left\{\begin{aligned} \left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right| &< M_1[|x| + |y|]^{r_1} + \\ &+ k_2^2 k_1 \frac{1}{r'_1+1} M'_1 [|x| + |y|]^{r'_1+1} + k_2 M'_2 [|x| + |y|]^{r'_2}. \end{aligned}\right. \tag{21$_b$}$$

Osservazione. È opportuno notare che se $f(xy)$ e $h(x)$ non avessero le derivate prime, non si potrebbe accertare che le $F(xy)$ e $h(\psi(xy))$ abbiano pure le derivate prime: tuttavia si potrebbe intendere che la $\zeta(xy)$ data da (7) soddisfaccia ancora a (13) nel senso che, posto in essa $y = \theta(x\eta)$ secondo (14) la fun-

che è (19)$_a$. Ed analogamente avendosi

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \left[\int_0^x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\substack{x=\xi \\ y=\theta(\xi\eta)}} d\xi \right]_{\eta=\psi(xy)},$$

sarà, ricordando (α) e (β) e (18)$_b$,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < k_2^2 \frac{1}{r'_1+1} \frac{1}{1-q_2} M'_1 \Big[|x| + |y| \Big]^{r'_1+1}. \tag{δ}$$

Ed in virtù dell'equazione (13) medesima sarà

$$\left\{\begin{aligned} \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| &\leq |f(xy)| + \left|\lambda(xy) \frac{\partial F}{\partial y}\right| < \\ &< M_1 \Big[|x| + |y| \Big]^{r_1} + q_2 k_2 \frac{1}{r'_1+1} \frac{1}{1-q_2} M'_1 \Big[|x| + |y| \Big]^{r'_1+1}. \end{aligned}\right. \tag{ε}$$

È chiaro che (δ) ed (ε) si possono raccogliere insieme nell'unica disuguaglianza (19)$_b$.

zione $\zeta(x\,y)$ diviene una funzione $\zeta(x\,z)$ tale che ha la derivata rapporto ad x (e non eventualmente quella rapporto a z) e soddisfa alla $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = f(x\,\theta(x\,z))$. Naturalmente in questo caso non valgono più le $(18)_b$ e $(20)_b$ e corrispondentemente non valgono più le $(19)_b$ e $(21)_b$, ma tutte le altre conclusioni rimangono immutate (*).

5. *Problema II.* Consideriamo le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \lambda_1(x\,y)\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} &= f_1(x\,y) \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \lambda_2(x\,y)\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} &= f_2(x\,y). \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

E supponiamo che nel campo $|x| + |y| < \alpha$, le $\lambda_1(x\,y)$, $\lambda_2(x\,y)$, $f_1(x\,y)$, $f_2(x\,y)$ siano finite e continue colle loro derivate prime: supponiamo precisamente che sia:

$$[\,|\lambda_1(x\,y)|,\quad |\lambda_2(x\,y)|\,] \leq q_2 < 1, \qquad (23)_a$$

$$\left[\,\left|\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right|,\quad \left|\frac{\partial \lambda_2}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\right|\,\right] < m_1, \qquad (23)_b$$

$$[\,|f_1(x\,y)|,\quad |f_2(x\,y)|\,] < M_3\,[\,|x| + |y|\,]^{l_3}, \qquad (23)_c$$

$$(l_3,\ l'_3 \geq 0)$$

$$\left[\,\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|,\quad \left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|\,\right] < M'_3\,[\,|x| + |y|\,]^{l'_3}. \qquad (23)_d$$

Ci proponiamo di trovare due funzioni soluzioni di (22) tali che

$$\left.\begin{aligned} a_1(x)\,\zeta_1(x\,0) + \qquad\quad \zeta_2(x\,0) &= \varphi_1(x) \\ \zeta_1(0\,x) + a_2(x)\,\zeta_2(0\,x) &= \varphi_2(x) \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

dove $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ sono funzioni finite e continue insieme colle loro derivate per $|x| < \alpha$; ed anzi tali che ingrandendo, ove occorra, il numero M_3, che compare in $(23)_c$, si abbia

$$[\,|\varphi_1(x)|,\quad |\varphi_2(x)|\,] < \frac{M_3}{l_3 + 1}\,|x|^{l_3+1} \text{ (**)}. \qquad (25)_a$$

(*) Cfr. la mia Nota: *Sul problema di* CAUCHY *per le equazioni lineari in due variabili a caratteristiche reali.* Rendiconti dell'Istituto Lombardo, serie II, vol. XLI, 1908, pag. 408-428, § 2, n. 2.

(**) Sarebbe facile sostituire questa disuguaglianza con altra più generale del tipo di $(25)_b$; ma non ci occorre.

$$[\,|\varphi'_1(x)|,\ \ |\varphi'_2(x)|\,] < \rho_1(|x|), \tag{25$_b$}$$

$$|a_1(x)\,a_2(y)| < m_2 \quad \text{con} \quad m_2^2\,q_2 < 1, \tag{25$_c$}$$

$$[\,|a_1(x)|,\ \ |a'_1(x)|,\ \ |a_2(x)|,\ \ |a'_2(x)|\,] < m_3\,. \tag{25$_d$}$$

dove come nel n. 3 $\rho_1(|x|)$ indica una funzione finita positiva, non decrescente di $|x|$: ed inoltre m_3 si suppone, come è legittimo, $\geqq 1$. E supporremo inoltre

$$a_1(0)\,a_2(0) \neq 1. \tag{26}$$

Le (22) sono del tipo di (13) con ciò solo che l'ufficio di x ed y è, nella seconda di esse, scambiato: noi chiameremo, sempre tenendo conto di tale scambio che occorre fare in quanto riguarda la seconda delle (22), $\psi_1(x\,y)$, $\psi_2(x\,y)$, $F_1(x\,y)$, $F_2(x\,y)$ le funzioni che rispetto a queste equazioni hanno l'ufficio di $\psi(x\,y)$ e $F(x\,y)$ rispetto alla (13).

Con ciò le soluzioni cercate di (22) si otterranno cercando due funzioni $h_1(x)$, $h_2(x)$ derivabili e tali che

$$\left.\begin{aligned} a_1(x)\,h_1(\psi_1(x\,0)) + h_2(x) &= \varphi_1(x) - a_1(x)\,F_1(x\,0) \\ h_1(x) + a_2(x)\,h_2(\psi_2(0\,x)) &= \varphi_2(x) - a_2(x)\,F_2(0\,x), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

e ponendo poi

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1(x\,y) &= F_1(x\,y) + h_1(\psi_1(x\,y)) \\ \zeta_2(x\,y) &= F_2(x\,y) + h_2(\psi_2(x\,y)). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Eliminando dalle (27) una volta h_2 ed una volta h_1, avremo per h_1 ed h_2 le equazioni

$$\left.\begin{aligned} h_1(x) - a_2(x)\,a_1(\psi_2(0\,x))\,h_1(\psi_1(\psi_2(0\,x)\,0)) &= \varphi_3(x) \\ h_2(x) - a_1(x)\,a_2(\psi_1(x\,0))\,h_2(\psi_2(0\,\psi_1(x\,0))) &= \varphi_4(x) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

dove

$$\left.\begin{aligned} \varphi_3(x) &= \varphi_2(x) - a_2(x)\,\{F_2(0\,x) - \varphi_1(\psi_2(0\,x)) + a_1(\psi_2(0\,x))\,F_1(\psi_2(0\,x)\,0)\} \\ \varphi_4(x) &= \varphi_1(x) - a_1(x)\,\{F_1(x\,0) - \varphi_2(\psi_1(x\,0)) + a_2(\psi_1(x\,0))\,F_2(0\,\psi_1(0\,x))\} \end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

Ed è facile vedere che, se alle (29) si possono applicare i risultati dei n. 13, talchè esse ammettano una soluzione formata da una coppia di funzioni finite e continue colle loro derivate prime, tale soluzione sarà per (26) totalmente determinata; ed inoltre soddisferà a (27) (*); onde (28) darà realmente la soluzione del problema proposto, ed anzi l'unica soluzione di esso.

Non rimane dunque che da esaminare la possibilità di applicare alle (29) i risultati dei n. 1-3. Ora intanto da $(19)_c$ e (23) segue

$$[\,|\psi_1(x\,y)|,\quad |\psi_2(x\,y)|\,] < |x| + |y|,$$

onde

$$[\,|\psi_1(x\,0)|,\quad |\psi_2(0\,x)|\,] < |x|, \tag{31}$$

e a fortiori sarà quindi

$$[\,|\psi_1(\psi_2(0\,x),\,0)|,\quad |\psi_2(0,\,\psi_1(x\,0))|\,] < |x|. \tag{32}$$

Queste valgono per (29) quello che $(2)_b$ vale per (1).

Inoltre se chiamiamo con α_2 il minore dei numeri α_1, $-\dfrac{1}{2\,m_1}\log(m_2\,q_2)$ (**), otterremo che nel campo

$$|x| + |y| < \alpha_2\,, \tag{33}$$

è per $(19)_d$

$$\left[\,\left|\frac{d\,\psi_1(x\,0)}{d\,x}\right|,\quad \left|\frac{d\,\psi_2(0\,x)}{d\,x}\right|\,\right] < q_2\,k_2 \leq \frac{\sqrt{q_2}}{m_2} \tag{34}$$

poichè è $k_2 = e^{m_1\alpha_2} \leq \dfrac{1}{m_2\sqrt{q_2}}$.

(*) Infatti se $h_1(x)$ e $h_2(x)$ soddisfanno a (29), posto

$$a_1(x)\,h_1(\psi_1(x\,0)) + h_2(x) - \varphi_1(x) + a_1(x)\,F_1(x\,0) = H_1(x)$$
$$h_1(x) + a_2(x)\,h_2(\psi_2(0\,x)) - \varphi_2(x) + a_2(x)\,F_2(0\,x) = H_2(x),$$

$H_1(x)$ e $H_2(x)$ hanno le derivate prime finite e soddisfanno le equazioni

$$H_1(x) - a_1(x)\,a_2(\psi_1(x\,0))\,H_1(\psi_2(0,\,\psi_1(x\,0))) = 0$$
$$H_2(x) - a_2(x)\,a_1(\psi_2(0\,x))\,H_2(\psi_1(\psi_2(0\,x),\,0)) = 0.$$

Ora queste equazioni sono della stessa forma che le (29) e quindi applicando ad esse i risultati del n. 2 segue che $H_1(x) = H_2(x) = 0$ c. d. d.

(**) Si rammenti che per $(25)_c$ è $m_2^2\,q_2 < 1$ e quindi $\log(m_2^2\,q_2) < 0$, onde α_2 resta un numero positivo, come occorre perchè si possa scrivere la (33).

Quindi per le $(25)_c$ e (34) si avrà

$$\left.\begin{aligned}&\left|a_2(x)\,a_1(\psi_2(0\,x))\frac{d}{dx}(\psi_1(\psi_2(0\,x),\ 0))\right|<q_2\,,\\&\left|a_1(x)\,a_2(\psi_1(x\,0))\frac{d}{dx}(\psi_2(0,\ \psi_1(x\,0)))\right|<q_2\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

che tengono per le (29) l'ufficio di $(11)_a$ per (1).

Dalle $(25)_d$ e (34) segue analogamente:

$$\left[\left|\frac{d}{dx}(a_2(x)\,a_1(\psi_2(0\,x)))\right|,\ \left|\frac{d}{dx}(a_1(x)\,a_2(\psi_1(x\,0)))\right|\right]<m_3^2\frac{\sqrt{q_2}}{m_2}$$

e queste tengono per (29) l'ufficio di $(11)_b$ per (1).

Infine quanto ai secondi membri di (29) si osservi che per (30), $(23)_c$, $(25)_a$, $(25)_d$, (31), (32), $(19)_a$ è

$$[\,|\varphi_3(x)|,\ \ |\varphi_4(x)|\,]<k_1\frac{(1+m_3)^2}{l_3+1}M_3\,|x|^{l_3+1}\qquad(36)_a$$

dove come nel numero precedente si pone $k_1=\dfrac{1}{1-q_2}>1$: queste sono per le (29) le analoghe delle $(2)_c$ per (1). Esisterà quindi la soluzione di (30) e soddisferà alle disuguaglianze

$$[\,|h_1(x)|,\ \ |h_2(x)|\,]<k_1^2(1+m_3)^2\frac{1}{l_3+1}M_3\,|x|^{l_3+1}.\qquad(37)_a$$

Supponiamo $\alpha_2<1$; ciò è sempre legittimo. Allora si vede subito che dalle $(25)_b$, $(19)_b$ con (34), $(25)_d$ segue che $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ hanno anche le derivate prime e che queste soddisfanno alle disuguaglianze

$$\left.\begin{aligned}&[\,|\varphi'_3(x)|,\ \ |\varphi'_4(x)|\,]<k_4\,M_3\,|x|^{l_3}+\\&\qquad+m_3\,k_3\,k_2^2\,k_1\frac{1}{l'_3+1}M'_3\,|x|^{l'_3+1}+k_3\,\rho_1(|x|)\end{aligned}\right\}\quad(36)_b$$

dove k_3 e k_4 sono due costanti dipendenti da q_2, m_2, m_3 soltanto, e precisamente ricordando che $m_3>1$ si può porre

$$k_3=1+m_3\frac{\sqrt{q_2}}{m_2},\quad k_4\leq m_3(k_1+1)(1+m_3k_3).$$

Questa si può ritenere come l'analoga di (11), per le (29), quindi si deduce che esistono $h'_1(x)$ ed $h'_2(x)$, e che per (12) si ha

$$\left.\begin{aligned} [\,|h'_1(x)|,\ \ |h'_2(x)|\,] < \left|m_3^2 \frac{\sqrt{q_2}}{m_2} k_1^3 (1+m_3)^2 + k_1 k_4\right| M_3 |x|^{r_3} + \\ + m_3 k_3 k_2^2 k_1^2 \frac{1}{r'_3+1} M'_3 |x|^{r'_3+1} + k_2 k_1 \rho_1(|x|). \end{aligned}\right\} \quad (37)_b$$

Portiamo queste funzioni h nelle (28), avremo per $(21)_a$ e $(21)_b$ che le $\zeta_1(x\,y)$, $\zeta_2(x\,y)$ soddisfanno a limitazioni della forma

$$[\,|\zeta_1(x\,y)|,\ \ |\zeta_2(x\,y)|\,] < k_5 \frac{1}{r_3+1} M_3 [\,|x|+|y|\,]^{r_3+1} \qquad (38)_a$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right|\right] < \\ &< k_5 \left\{ M_3 [\,|x|+|y|\,]^{r_3} + \frac{1}{r'_3+1} M'_3 [\,|x|+|y|\,]^{r'_3+1} + \rho_1(|x|+|y|) \right\} \end{aligned}\right\} \quad (38)_b$$

dove k_5 *è un conveniente numero che dipende soltanto, come* k_1, k_2, k_3, k_4, *da* q_2, m_2, m_3: precisamente, ricordando che si suppose $m_3 \geq 1$, e che per le espressioni date sopra è $[k_1, k_2, k_3, k_4] > 1$, si può prendere per k_5 il maggiore dei numeri

$$k_1 + k_1^2 (1+m_3)^2,\ \ 1 + m_3^2 \frac{\sqrt{q_2}}{m_2} k_1^3 k_2 (1+m_3)^2 + k_1 k_2 k_4,\ \ k_2^2 k_1 + m_3 k_3 k_2^3 k_1^2\ (*). \qquad (39)$$

OSSERVAZIONE I. Forme particolarmente semplici assumono le disuguaglianze $(37)_b$, $(38)_b$ quando si assegnino alla funzione $\rho_1(|x|)$ forme speciali. Ad es. se si suppone

$$\rho_1(|x|) = \frac{1}{r'_3+1} M'_3 |x|^{r'_3+1} \qquad (25)'_b$$

chiamando ancora k_5 un numero che, oltre ad essere maggiore dei numeri (39), superi pure

$$k_2^2 k_1 + m_3 k_3 k_2^3 k_1^2 + k_2 k_3 k_1, \qquad (39)'$$

(*) Conviene nel verificare le (38) osservare che k_5 essendo maggiore dei numeri (39) è pure maggiore di $k_2 k_3 k_1$.

che alla $(38)_b$ si può sostituire la

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right|\right] < \\ &\qquad < k_5 \left\{ M_3 \left[|x| + |y| \right]^{l_3} + \frac{1}{l'_3 + 1} M'_3 \left[|x| + |y| \right]^{l'_3+1} \right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (38)'_b$$

Osservazione II. Essendo come si è notato $[m_3, k_1, k_2, k_3, k_4] > 1$, il numero k_5 che supera i numeri (39) e (39)′ è pure maggiore di 1, di $k_1 + 1$, $k_5^2 k_1$, $k_5^2 k_1 + k_2$.

Ne segue le $(19)_a$ e $(19)_b$ si possono sostituire colle

$$|F(x\, y)| < k_5 \frac{1}{l_1 + 1} M_1 \left[|x| + |y| \right]^{l_1+1}, \qquad (19)'_a$$

$$\left[\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \right] < k_5 \left\{ M_1 \left[|x| + |y| \right]^{l_1} + \frac{1}{l'_1 + 1} M'_1 \left[|x| + |y| \right]^{l'_1+1} \right\}. \qquad (19)'_b$$

E similmente $(21)_a$, $(21)_b$ si può sostituire, ove si supponga $M_2 = \frac{1}{l_1 + 1} M_1$ $l_2 = l_1 + 1$, colle

$$|\zeta(x\, y)| < k_5 \frac{1}{l'_1 + 1} M_1 \left[|x| + |y| \right]^{l_1+1}, \qquad (21)'_a$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right| \right] < k_5 \left\{ M_1 \left[|x| + |y| \right]^{l_1} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{l'_1 + 1} M'_1 \left[|x| + |y| \right]^{l'_1+1} + M'_2 \left[|x| + |y| \right]^{l'_2} \right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (21)'_b$$

E se si suppone inoltre $M'_2 = \frac{M'_1}{l'_1 + 1}$, $l'_2 = l'_1 + 1$, a $(21)_b$ si può sostituire

$$\left[\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right| \right] < k_5 \left\{ M_1 \left[|x| + |y| \right]^{l_1} + \frac{1}{l'_1 + 1} M'_1 \left[|x| + |y| \right]^{l'_1+1} \right\}. \qquad (21)''_b$$

Osservazione III. Se non si facessero le ipotesi $(23)_a$ e $(25)_b$ i precedenti ragionamenti varrebbero ancora, con questa sola modificazione che potrebbero venire a mancare le derivate di F_1, F_2, e di h_1, h_2; e quindi in particolare non varrebbero più le $(37)_b$, nè le $(38)_b$. Resterebbe tuttavia vero che $h_1(x)$, $h_2(x)$ è l'unica soluzione di (29) che soddisfaccia ad una limitazione della forma $(37)_a$; e che parimenti le $\zeta_1(x\, y)$, $\zeta_2(x\, y)$ sono le sole soluzioni del nostro problema che soddisfacciano ad una limitazione della forma $(38)_a$; e solo si dovrebbe interpretare l'affermazione che $\zeta_1(x\,y)$, $\zeta_2(x\,y)$ soddisfanno alle equazioni (22) nel senso già spiegato nell'osservazione fatta alla fine del n. 4.

6. *Problema III.* Ci occorre nel seguito una generalizzazione del problema II. Si abbia un sistema di equazioni del tipo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \lambda_1(x\,y)\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = \sum_1^n{}_j\, c_{1j}(x\,y)\,\zeta_j(x\,y) + f_1(x\,y)\\
&\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \lambda_2(x\,y)\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = \sum_1^n{}_j\, c_{2j}(x\,y)\,\zeta_j(x\,y) + f_2(x\,y)\\
&\frac{\partial \zeta_i}{\partial x} + \lambda_i(x\,y)\frac{\partial \zeta_i}{\partial y} = \sum_1^n{}_j\, c_{ij}(x\,y)\,\zeta_j(x\,y) + f_i(x\,y) \qquad (i = 3\ldots n)
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

dove supponiamo che nel campo $|x| + |y| < \alpha_1$ le $\lambda_j(x\,y)$, $f_i(x\,y)$, $c_{jk}(x\,y)$ siano finite e continue colle loro derivate prime: ed anzi che siano soddisfatte le limitazioni seguenti

$$|\lambda_j(x\,y)| \leq q_2 < 1 \tag{41_a}$$

$$\left[\left|\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial \lambda_j}{\partial y}\right|\right] < m_1 \tag{41_b}$$

$$|f_j(x\,y)| < M_4 \qquad (j,\ k = 1\ldots n) \tag{41_c}$$

$$\left[\left|\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial f_j}{\partial y}\right|\right] < M'_4 \tag{41_d}$$

$$\left[|c_{jk}|,\quad \left|\frac{\partial c_{jk}}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial c_{jk}}{\partial y}\right|\right] < m_4. \tag{41_e}$$

Ci proponiamo di determinare delle funzioni soluzioni delle precedenti equazioni e tali che

$$\left.\begin{aligned}
&a_1(x)\,\zeta_1(x\,0) + \zeta_2(x\,0) = \sum_3^n{}_i\, l_i(x)\,\zeta_i(x\,0) + \varphi_1(x)\\
&\zeta_1(0\,x) + a_2(x)\,\zeta_2(0\,x) = \varphi_2(x)\\
&\zeta_i(0\,x) = \varphi_i(x); \qquad (i = 3\ldots n).
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

In queste condizioni supponiamo che le $a_1(x)$, $a_2(x)$, $l_i(x)$, $\varphi_j(x)$ siano funzioni finite e continue, ed ingrandendo, ove occorra, M_4 ed m_1 supponiamo precisamente che sia

$$|\varphi_j(x)| < M_4\,|x| \tag{43_a}$$

$$(j = 1\ldots n)$$

$$|\varphi'_j(x)| < M''_4 \tag{43_b}$$

$$|a_1(x)\,a_2(y)| < m_2 \quad \text{con} \quad m_2^2\, q_2 < 1 \tag{43$_c$}$$

$$[\,|a_1(x)|,\ \ |a'_1(x)|,\ \ |a_2(x)|,\ \ |a'_2(x)|\,] < m_3 \tag{43$_d$}$$

$$[\,|l_i(x)|,\ \ |l'_i(x)|\,] < m_4 \qquad (i = 3 \ldots n). \tag{43$_e$}$$

Per non complicare alcune disuguaglianze che seguono supporremo che sia $M_4 \leq M''_4 \leq M'_4$: tale ipotesi è sempre legittima, poichè basterà, ove non fosse soddisfatta, ingrandire M''_4 e M'_4.

Infine supporremo che si abbia la disuguaglianza

$$a_1(0)\,a_2(0) \neq 1. \tag{44}$$

Per risolvere questo problema procederemo per approssimazioni successive: determineremo perciò successivamente le soluzioni dei sistemi

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_{10}}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial y} = f_1(x\,y) \\
&\frac{\partial \zeta_{20}}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \zeta_{20}}{\partial x} = f_2(x\,y) \\
&\frac{\partial \zeta_{i0}}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial \zeta_{i0}}{\partial y} = f_i(x\,y) \qquad (i = 3 \ldots n)
\end{aligned}\right\} \tag{45$_0$}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_{1t}}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \zeta_{1t}}{\partial y} = \sum_1^n{}_j\, c_{1j}\,\zeta_{jt-1} \equiv f_{1t}(x\,y) \\
&\frac{\partial \zeta_{2t}}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \zeta_{2t}}{\partial x} = \sum_1^n{}_j\, c_{2j}\,\zeta_{jt-1} \equiv f_{2t}(x\,y) \\
&\frac{\partial \zeta_{it}}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial \zeta_{it}}{\partial y} = \sum_1^n{}_j\, c_{ij}\,\zeta_{jt} \quad \equiv f_{it}(x\,y) \qquad (i = 3 \ldots n)
\end{aligned}\right\} \tag{45$_t$}$$

che soddisfanno alle condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned}
&a_1(x)\,\zeta_{10}(x\,0) + \zeta_{20}(x\,0) = \varphi_1(x) \\
&\zeta_{10}(0\,x) + a_2(x)\,\zeta_{20}(0\,x) = \varphi_2(x) \\
&\zeta_{i0}(0\,x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 3 \ldots n)
\end{aligned}\right\} \tag{46$_0$}$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_1(x)\,\zeta_{1t}(x\,0) + \zeta_{2t}(x\,0) = \sum_3^n{}_i\, l_i(x)\,\zeta_{it-1}(x\,0) \equiv \varphi_{1t}(x) \\
&\zeta_{1t}(0\,x) + a_2(x)\,\zeta_{2t}(0\,x) = 0 \\
&\zeta_{it}(0\,x) = 0 \qquad (i = 3 \ldots n).
\end{aligned}\right\} \tag{46$_t$}$$

La determinazione di questi varii sistemi di funzioni consta della risoluzione del problema di CAUCHY per quanto riguarda le ζ_{jt}, della risoluzione di un problema del tipo del problema II per quanto riguarda la determinazione delle ζ_{1t}, ζ_{2t}: e per le limitazioni (41), (43), (44) è chiaro che almeno per quanto si riferisce ai coefficienti dei primi membri delle (45), (46) a tutti questi sistemi si possono applicare le considerazioni dei numeri precedenti: onde occorrerà soltanto mostrare che anche i termini noti delle (45), (46) soddisfanno alle condizioni imposte nel n. 5, e che le serie $\sum_0^\infty \zeta_{jt}$ sono convergenti e rappresentano veramente le cercate soluzioni di (40), (42).

Ci limiteremo a considerare il campo

$$|x| + |y| < \alpha_2 \tag{47}$$

dove α_2 è il minore dei numeri 1, α_1, $\frac{-1}{2 m_1} \log (m_2^2 q_2)$.

In questo campo per le formole $(38)_a$, $(38)_b$, $(21)'_a$, $(21)_a$ (pag. 17-18), avremo subito, rammentando che $M_1 \leq M''_1$,

$$\left.\begin{aligned}
&|\zeta_{j0}| < k_5 M_1 [|x| + |y|] \qquad\qquad (j = 1 \dots n) \\
&\left[\left|\frac{\partial \zeta_{j0}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_{j0}}{\partial y}\right|\right] < k_5 \left\{ M_1 + M'_1 [|x| + |y|] + M''_1 \right\} < \\
&\qquad\qquad < k_5 \left\{ 2 M''_1 + M'_1 [|x| + |y|] \right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{48$_a$}$$

Ponendo quindi

$$k_6 = m_1 n \; (> m_1 (n - 2)), \tag{49}$$

avremo, ricordando che in (47) $\alpha_2 < 1$

$$\left.\begin{aligned}
&|f_{j1}| < k_6 k_5 M_1 [|x| + |y|] < k_6 k_5 M_1 \\
&|\varphi_{11}| < k_6 k_5 M_1 |x| \\
&\left[\left|\frac{\partial f_{j1}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f_{j1}}{\partial y}\right|\right] < k_6 \left\{ k_5 M_1 [|x| + |y|] + 2 k_5 M''_1 + k_5 M'_1 [|x| + |y|] \right\} < \\
&\qquad\qquad < k_6 k_5 (3 M''_1 + M'_1 [|x| + |y|]) \\
&|\varphi'_{11}| < k_6 \left\{ k_5 M_1 |x| + 2 k_5 M''_1 + k_5 M'_1 |x| \right\} < \\
&\qquad\qquad < k_6 k_5 (3 M''_1 + M'_1 |x|).
\end{aligned}\right\} \tag{50$_1$}$$

Da queste disuguaglianze di nuovo per $(38)_a$, $(38)_b$, $(21)'_a$, $(21)'_b$, avremo

$$
\left.\begin{aligned}
&|\zeta_{j1}| < k_6 k_5^2 M_4 [\,|x| + |y|\,] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j = 1 \dots n) \\
&\left|\,\left|\frac{\partial \zeta_{j1}}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial \zeta_{j1}}{\partial y}\right|\,\right| < k_5 \left\{ k_6 k_5 M_4 + 6 k_6 k_5 M''_4 + 2 k_6 k_5 M'_4 [|x| + |y|] \right\} < \\
&\qquad\qquad < k_6 k_5^2 (7 M''_4 + 2 M'_4 [\,|x| + |y|\,]).
\end{aligned}\right\} \quad (48)_1
$$

Ma accanto a queste, che valgono per tutti i valori di j, conforme all'osservazione II del numero precedente, se ne possono dedurre altre più restrittive per le ζ_{i1} con $i \geq 3$, poichè tali funzioni non sono che le F_i del n. 4 relative alla i-esima delle (45), e ad esse si possono quindi applicare le formule $(19)'_a$, $(19)'_b$ (pag. 18). Si avrà quindi, usufruendo della prima disuguaglianza nella prima delle $(50)_1$, della seconda disuguaglianza nella terza delle $(50)_1$, e rammentando che $M_4 \leq M''_4 \leq M'_4$,

$$
\left.\begin{aligned}
&|\zeta_{i1}| < \frac{1}{2} k_6 k_5^2 M_4 [\,|x| + |y|\,]^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 3 \dots n) \\
&\left|\,\left|\frac{\partial \zeta_{i1}}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial \zeta_{i1}}{\partial y}\right|\,\right| < k_6 k_5^2 [\,|x| + |y|\,] \left\{ M_4 + 3 M''_4 + M'_4 \right\} < \\
&\qquad\qquad < 5 k_6 k_5^2 M'_4 [\,|x| + |y|\,].
\end{aligned}\right\} \quad (48)'_1
$$

Ricordiamo che φ_{12} è composta solo mediante le ζ_{i1} con $i \geq 3$; dedurremo dalle $(48)_1$ e $(48)'_1$:

$$
\left.\begin{aligned}
&|f_i| < k_6^2 k_5^2 M_4 [\,|x| + |y|\,] \\
&|\varphi_{12}| < \frac{1}{2} k_6^2 k_5^2 M_4 |x|^2 \\
&\left|\,\left|\frac{\partial f_i}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial y}\right|\,\right| < k_6^2 k_5^2 \left\{ M_4 [|x| + |y|] + 7 M''_4 + 2 M'_4 [|x| + |y|] \right\} < \\
&\qquad\qquad < 10 k_6^2 k_5^2 M'_4 \\
&|\varphi'_{12}| < k_6^2 k_5^2 |x| \left(\frac{1}{2} M_4 + 5 M'_4 \right) < 6 k_6^2 k_5^2 M'_4 |x| < \\
&\qquad < 10 k_6^2 k_5^2 M'_4 |x|.
\end{aligned}\right\} \quad (50)_2
$$

Partendo da queste formule $(50)_2$ si deducono agevolmente per via ricorrente le seguenti disuguaglianze

$$\left|f_{j,2r}\right| < \frac{1}{r!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r}\, M_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^r$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\varphi_{1,2r}\right| < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r}\, M_4\, |x|^{r+1} \\
&\left[\left|\frac{\partial f_{j,2r}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial f_{j,2r}}{\partial y}\right|\right] < \frac{4r+6}{(r-1)!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r}\, M'_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^{r-1} \\
&\left|\varphi'_{1,2r}\right| < \frac{4r+6}{r!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r}\, M'_4\, |x|^r
\end{aligned}\right\} \qquad (50)_{2r}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\zeta_{j,2r}\right| < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r+1}\, M_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^{r+1} \\
&\left[\left|\frac{\partial \zeta_{j,2r}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_{j,2r}}{\partial y}\right|\right] < \frac{4r+7}{r!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r+1}\, M'_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^r
\end{aligned}\right\} \qquad (48)_{2r}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left|f_{j,2r+1}\right| < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^{r+1} < \\
&\qquad < \frac{1}{r!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^r \\
&\left|\varphi_{1,2r+1}\right| < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M_4\, |x|^{r+1} \\
&\left[\left|\frac{\partial f_{j,2r+1}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial f_{j,2r+1}}{\partial y}\right|\right] < \frac{4r+8}{r!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M'_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^r < \\
&\qquad < \frac{4r+8}{(r-1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M'_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^{r-1} \\
&\left|\varphi'_{1,2r+1}\right| < \frac{4r+8}{r!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M'_4\, |x|^r
\end{aligned}\right\} \qquad (50)_{2r+1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\zeta_{j,2r+1}\right| < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+2}\, M_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^{r+1} \\
&\left[\left|\frac{\partial \zeta_{j,2r+1}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_{j,2r+1}}{\partial y}\right|\right] < \frac{4r+9}{r!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+2}\, M'_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^r
\end{aligned}\right\} \qquad (48)_{2r+1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\zeta_{i,2r+1}\right| < \frac{1}{(r+2)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+2}\, M_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^{r+2} \\
&\left[\left|\frac{\partial \zeta_{i,2r+1}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_{i,2r+1}}{\partial y}\right|\right] < \frac{4r+9}{(r+1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+2}\, M'_4 \left[\,|x| + |y|\,\right]^{r+1}
\end{aligned}\right\} \qquad (48)'_{2r+1}$$

$$(j = 1,\ 2, \ldots\ n;\quad i = 3,\ 4, \ldots\ n).$$

Invero le $(48)_{2r}$ seguono dalle $(50)_{2r}$ mediante le $(38)_a$ e $(38)'_b$ e $(21)'_a$, $(21)''_b$: dalle $(48)_{2r}$ seguono le $(50)_{2r+1}$; e da queste $(50)_{2r+1}$, considerando nella prima e terza formola la seconda disuguaglianza, seguono di nuovo per $(38)_a$, $(38)'_b$, $(21)'_a$, $(21)''_b$ le $(48)_{2r+1}$; mentre le $(48)'_{2r+1}$ seguono dalla prima disuguaglianza della prima e terza formula di $(50)_{2r+1}$ mediante le formule $(19)'_a$, $(19)'_b$. Ed infine, ricordando che le $\varphi_{i,2(r+1)}$ sono formate mediante le sole $\zeta_{i,2r+1}$ con $i > 2$ dalle $(48)_{2r+1}$, $(48)'_{2r+1}$ seguono per le $f_{i,2(r+1)}$, $\varphi_{i,2(r+1)}$ formule pienamente analoghe alle $(50)_{2r}$ in cui solo r sia mutato in $r+1$. Siccome ora le $(50)_{2r}$ coincidono colle $(50)_2$ per $r=1$, segue che le formule (50) (48) sono vere qualunque sia r.

Le formule (48) bastano evidentemente a dimostrare la convergenza uniforme ed assoluta delle serie $\sum_0^\infty \zeta_{ir}(x\,y)$ e delle serie delle loro derivate in tutto il campo (47) in cui esse sono state dimostrate valide: le loro somme $\zeta_i(x\,y)$ rappresentano quindi una soluzione del problema proposto. Si hanno inoltre per queste soluzioni le disuguaglianze

$$\left.\begin{aligned} |\zeta_i(x\,y)| &< k_5(1+k_6 k_5)\, M_1 \left[e^{k_5^2 k_6^2 [|x|+|y|]} - 1\right] < \\ &< k_7 M_1 [\,|x|+|y|\,] \\ \left[\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y}\right|\right] &< k_8 M''_1 + k_9 M'_1 [\,|x|+|y|\,] \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

dove k_7, k_8, k_9 sono numeri che, come k_6 e k_5, dipenderanno *soltanto* dai numeri q_2, m_1, m_2, m_3, m_4, n: si può, ricordando che $[\,|x|+|y|\,] < 1$, porre

$$k_7 = \frac{1}{k_6^2 k_5}(1 + k_6 k_5)\, e^{k_5^2 k_6^2}\,; \quad k_8 = k_5(2 + 7 k_6 k_5)\,;$$

$$k_9 = k_5 \left\{ [7 + 9 k_6 k_5 + 4 k_6^2 k_5^2 + 4 k_6^3 k_5^3]\, e^{k_6^2 k_5^2} + 1 + 2 k_5 k_6 \right\}.$$

Seguendo un noto modo di ragionare gli stessi procedimenti che ora ci hanno permesso di dimostrare la convergenza delle successive approssimazioni ci dimostrerebbero che non esiste altra soluzione del problema proposto.

Osservazione. Anche qui è opportuno notare che, ove si togliessero le ipotesi $(44)_a$, $(43)_b$, $(43)_c$ ed anche la $(44)_c$ per quanto riguarda le $\dfrac{\partial c_{jk}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial c_{jk}}{\partial y}$, si potrebbe ancora costruire le funzioni ζ_{ir} successive; però per esse non sarebbe sicura l'esistenza delle derivate, ma si saprebbe che soddisfanno alle equazioni (42) nel senso spiegato alla fine del n. 4 e nell'osservazione III del n. 5. Varrebbe però la prima di tutte le disuguaglianze $(48)_r$, le due prime di tutte le disuguaglianze (50); onde seguirebbe ancora che le serie $\sum\limits_0^\infty \zeta_{n}$ sono convergenti assolutamente ed uniformemente in (47) e le loro somme soddisfanno alla prima delle (51) e, sempre nel senso spiegato alla fine del n. 4, alle equazioni (40) e (42).

§ II.

1. *Enunciato del problema. Ipotesi.* Sia l'equazione

$$F(x\, y\, z\, p\, q\, r\, s\, t) = 0 \tag{1}$$

e se ne cerchi la soluzione che su due curve γ_1 e γ_2 che si incontrano in un punto O si riduca a funzioni assegnate, che in O prendano lo stesso valore (*). Tali condizioni determinano insieme con (1) i valori di p, q, r, s, t in O: od in altri termini determinano l'elemento di secondo ordine nel punto O della superficie da costruirsi: e quindi anche in particolare le direzioni delle caratteristiche della superficie nel punto O. Supporremo che tali direzioni siano distinte. Ci proponiamo di mostrare che se il birapporto delle direzioni delle caratteristiche e delle direzioni di γ_1 e γ_2 in O è in modulo = 1, il problema di costruire detta superficie è certo risolubile in un intorno sufficientemente piccolo del punto O, e che la soluzione è unica.

Ammetteremo che nel campo di valori di $x\, y\, z\, p\, q\, r\, s\, t$ che consideriamo la $F(x\, y\, z\, p\, q\, r\, s\, t)$ abbia le derivate dei primi quattro ordini finite e continue; ammetteremo inoltre che le funzioni che determinano le curve γ_1 e γ_2 ed i valori di z su di esse abbiano le derivate dei primi sei ordini finite e continue (**). Si vede facilmente col calcolo effettivo che, mediante i dati iniziali, la equazione (1), e le equazioni che se ne deducono facendone le derivate totali dei primi 4 ordini rapporto a x od a y, tenendo conto che il birapporto delle tangenti in O a γ_1 e γ_2 e delle direzioni caratteristiche è 1 (***), si pos-

(*) Geometricamente: la superficie soluzione che passa per due curve gobbe assegnate le quali passano per uno stesso punto.

(**) Le restrizioni imposte da queste condizioni si possono certo ridurre di qualche cosa, però una tale discussione ci porterebbe a troppe lunghezze.

(***) Per eseguire un tale calcolo è sufficiente sapere che detto birapporto non sia radice seconda, terza, quarta o quinta dell'unità.

se trovare i valori che debbono assumere in O le derivate dei primi 6 ordini della funzione z richiesta.

Ciò posto, con un conveniente cambiamento delle variabili e della funzione incognita possiamo, secondo metodi noti, fare in modo che γ_1 e γ_2 coincidano cogli assi, e che si chieda che la soluzione si annulli sugli assi, che il suo elemento corrispondente all'origine sia l'elemento

$$x = y = z = p = q = r = s = t = 0\,;$$

ed anzi che pure le derivate terze e quarte della z siano nulle nell'origine.

Se rappresentiamo ancora con $x\,y\,z$ le nuove variabili e la nuova incognita, con (1) l'equazione cui deve soddisfare la z, ciò equivarrà a supporre che per

$$x = y = z = p = q = r = s = t = 0 \tag{2}$$

la funzione F e le sue derivate parziali prime e seconde rapporto a x ed y si annullino. Grazie al fatto che le equazioni di γ_1 e γ_2 ammettono le derivate dei primi 6 ordini, per F varranno ancora le ipotesi fatte da principio: per precisarle maggiormente noi supporremo che nel campo

$$[\,|x|,\ \ |y|,\ \ |z|,\ \ |p|,\ \ |q|,\ \ |r|,\ \ |s|,\ \ |t|\,] < \alpha \tag{3}$$

esistano le derivate dei primi 4 ordini di F e siano finite e continue.

2. *Continuazione*. Indicheremo con $f^{(0)}$ il valore che una funzione $f(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)$ prende nell'elemento (2).

Abbiamo supposto che il birapporto delle tangenti alle caratteristiche e degli assi in (2) sia in modulo $\neq 1$: scambiando eventualmente le due caratteristiche possiamo supporre che sia < 1. Ma tale birapporto è dato dal rapporto delle due radici $\xi_1(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)$, $\xi_2(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)$ dell'equazione

$$\frac{\partial F}{\partial r}\,\xi^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\,\xi + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Supporremo quindi $\left|\dfrac{\xi_1^{(0)}}{\xi_2^{(0)}}\right| < 1$. Dico di più che, facendo al più un conveniente cambiamento di variabili x ed y, si può supporre $|\xi_1^{(0)}| < 1$, $|\xi_2^{(0)}| > 1$. Invero se così già non fosse basta porre

$$\text{se } |\xi_1^{(0)}| \neq 0,\ |\xi_2^{(0)}| \neq \infty, \qquad x' = \sqrt{|\xi_1^{(0)}|}\,x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{|\xi_2^{(0)}|}}\,y,$$

$$\text{se } \xi_1^{(0)} = 0,\ |\xi_2^{(0)}| < 1, \qquad x' = x, \qquad y' = \frac{1}{|\xi_2^{(0)}|^2}\,y,$$

$$\text{se } |\xi_1^{(0)}| > 1,\ |\xi_2^{(0)}| = \infty, \qquad x' = |\xi_1^{(0)}|^2\,x, \quad y' = y.$$

Se quindi poniamo

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) &= \xi_1(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)\\ \lambda_2(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) &= \frac{1}{\xi_2(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)}\;(*)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

saranno λ_1 e λ_2 funzioni formate colle derivate prime di F, e quindi finite e continue colle loro derivate dei primi tre ordini (**); entrambe inferiori in modulo ad 1 nell'elemento (2) e quindi pure in un intorno conveniente di esso.

Si noti ancora che dalle (5) segue l'identità

$$\frac{\partial F}{\partial r}\xi^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\xi + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{1}{H}(\xi - \lambda_1)(\lambda_2\xi - 1)\,; \tag{6}$$

dove $H(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)$ è una funzione finita e continua insieme colle derivate dei primi tre ordini (***).

Conchiudendo potremo dunque porci nelle seguenti ipotesi:

L'equazione

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0 \tag{1}$$

(*) Ove fosse $\xi_2 = \infty$, si porrà $\lambda_2 = 0$.

(**) Si osservi che la derivata parziale di $\lambda_1 \equiv \xi_1$ rapporto ad una qualunque ω delle quantità $x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t$ è data, per (4), da $-\dfrac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\omega}\xi_1^2 - \dfrac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial\omega}\xi_1 + \dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial\omega}}{2\dfrac{\partial F}{\partial r}\xi_1 - \dfrac{\partial F}{\partial s}}$: ora il denominatore di questa equazione è certo $\neq 0$ in (2) perchè ξ_1 non è radice doppia, e il numeratore è limitato perchè $|\xi_1| < 1$: onde segue che le derivate parziali prime sono certo finite nell'elemento (2) e quindi in un intorno di esso. Analogamente si ragiona per le derivate seconde e terze di λ_1 e per le derivate di λ_2.

(***) Devesi porre $H = \dfrac{\lambda_2}{\dfrac{\partial F}{\partial r}} = \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial s} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - 4\dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial F}{\partial t}}}{2\dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial F}{\partial t}}$. Da tale espressione di H risulta che H è sempre finita e continua insieme colle sue derivate dei primi 3 ordini, fatta eccezione al più per i punti in cui fosse $\dfrac{\partial F}{\partial r} = 0$ oppure $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$. In tali punti però dall'identità (6) medesima risulta che deve essere $H = \dfrac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial s}}$ od in altri termini che nella precedente espressione devesi scegliere il segno $-$ davanti al radicale; e poichè (4) ha radici semplici, dove sia $\dfrac{\partial F}{\partial r} = 0$ oppure $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$ sarà $\dfrac{\partial F}{\partial s} \neq 0$ onde ancora H sarà finito: e tali saranno pure le sue derivate.

è tale che, se si prende α sufficientemente piccolo, nel campo

$$[\,|x|,\ |y|,\ |z|,\ |p|,\ |q|,\ |r|,\ |s|,\ |t|\,] \leq \alpha \tag{3}$$

sono soddisfatte le condizioni:

1.° F è finita e continua insieme colle sue derivate dei primi 4 ordini.

2.° F si annulla insieme colle derivate parziali dei primi due ordini rapporto a x ed y nell'elemento (2).

3.° Si ha identicamente

$$\frac{\partial F}{\partial r}\xi^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\xi + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{1}{H}(\xi - \lambda_1)(\lambda_2 \xi - 1) \tag{6}$$

dove λ_1 e λ_2 sono funzioni finite e continue colle loro derivate dei primi tre ordini in (3) ed ivi soddisfanno una limitazione della forma

$$[\,|\lambda_1|,\ |\lambda_2|\,] \leq q < 1, \tag{7}$$

e similmente H è finita e continua insieme colle derivate dei primi tre ordini in (3).

In queste condizioni mostreremo l'esistenza di una soluzione di (1) *nulla sugli assi e che ammette le derivate dei primi cinque ordini.*

3. *Trasformazione del problema.* Consideriamo 3 numeri λ_3, λ_4, λ_5 diversi dai valori che $\xi_1 \equiv \lambda_1$ prende nel campo (3) e in modulo minori di 1: supponiamo anzi, ingrandendo, ove occorra, il numero q, che sia in (3)

$$[\,|\lambda_1|,\ |\lambda_2|,\ |\lambda_3|,\ |\lambda_4|,\ |\lambda_5|\,] \leq q < 1; \tag{8}$$

e sia m un numero tale che le differenze $\lambda_1 - \lambda_3$, $\lambda_1 - \lambda_4$, $\lambda_1 - \lambda_5$, $\lambda_3 - \lambda_4$, $\lambda_3 - \lambda_5$, $\lambda_4 - \lambda_5$ e $\lambda_1 \lambda_2 - 1$, $\lambda_3 \lambda_2 - 1$, $\lambda_4 \lambda_2 - 1$, $\lambda_5 \lambda_2 - 1$ non divengano mai in modulo $< m$.

Operiamo su (1) colle operazioni $\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_3 \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_4 \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_5 \dfrac{\partial}{\partial y}$ ponendo, come è l'uso, $p_{ik} = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$. Otterremo che insieme con (1) deve essere soddisfatta l'equazione

$$A_0 p_{50} + A_1 p_{41} + A_2 p_{32} + A_3 p_{23} + A_4 p_{14} + A_5 p_{05} = F_1(x\, y\, z\, p_{10}\, p_{01} \ldots p_{04}) \tag{9}$$

dove F_1 è una funzione delle variabili da cui dipende finita e continua colle sue derivate parziali prime, finchè si resta nel campo (3) e le $p_{i,3-i}$, $p_{i,4-i}$ sono finite; e le $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ sono funzioni di $x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{02}$ soltanto, le quali ammettono le derivate parziali dei primi 3 ordini e soddisfanno per (6) l'identità

$$\left.\begin{aligned} A_0\,\xi^5 - A_1\,\xi^4 + A_2\,\xi^3 - A_3\,\xi^2 + A_4\,\xi - A_5 \\ \equiv \frac{1}{H}(\xi - \lambda_1)(\lambda_2\,\xi - 1)(\xi - \lambda_3)(\xi - \lambda_4)(\xi - \lambda_5). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

E si dovrà cercare una soluzione di (9) la quale soddisfaccia alle condizioni

$$z(x\,0) = 0, \quad z(0\,x) = 0, \quad (11)$$

sia nulla colle sue derivate dei primi tre ordini nell'origine

$$(p_{10})_{\substack{x=0\\y=0}} = (p_{01})_{\substack{x=0\\y=0}} = \cdots = (p_{03})_{\substack{x=0\\y=0}} = 0; \quad (12)$$

ed infine soddisfaccia pure alle uguaglianze che si ottengono scrivendo ad esempio che le derivate totali seconde di (1) rapporto ad x ed y si annullano sull'asse delle y. Queste ultime condizioni assumeranno la forma

$$\left.\begin{aligned} [B_0\,p_{40} + B_1\,p_{31} + B_2\,p_{22}]_{x=0} &= [\Theta_1(x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{03})]_{x=0} \\ [B_0\,p_{31} + B_1\,p_{22} + B_2\,p_{13}]_{x=0} &= [\Theta_2(x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{03})]_{x=0} \\ [B_0\,p_{22} + B_1\,p_{13} + B_2\,p_{04}]_{x=0} &= [\Theta_3(x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{03})]_{x=0} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

dove $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ sono quantità formate colle derivate prime e seconde di F, che ammettono quindi derivate dei primi due ordini finite e continue in (3) e sono nulle nell'elemento (2), (12); ed è $B_i \equiv \dfrac{\partial F}{\partial p_{i\,2-i}}$, onde è identicamente per (6):

$$B_0\,\xi^2 - B_1\,\xi + B_2 \equiv \frac{1}{H}(\xi - \lambda_1)(\lambda_2\,\xi - 1). \quad (14)$$

Inversamente ogni soluzione di (9) che soddisfaccia a (11), (12) e (13) è una soluzione di (1) che si annulla sugli assi (*).

(*) Invero se z è una soluzione di (9), (11), (12), (13), portato il suo valore in F, si avrà $F(x\,y\,z\ldots p_{02}) = \varphi(x\,y)$, dove per (9) è $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_3\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_4\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_5\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x\,y) = 0$, e per (13) è $\dfrac{\partial^2\varphi(0\,y)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\varphi(0\,y)}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2\varphi(0\,y)}{\partial y^2} = 0$, ed inoltre nell'origine $\varphi(x\,y)$ e le sue derivate prime e seconde sono per (12) nulle. Segue che è identicamente $\varphi(0\,y) = \dfrac{\partial\varphi(0\,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2\varphi(0\,y)}{\partial x^2} = 0$; ed, essendo $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_3\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_4\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_5\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x\,y) = 0$ un'equazione lineare a coefficienti costanti di terzo ordine che non ha l'asse delle y come caratteristica, si deduce che identicamente è $\varphi(x\,y) = 0$.

4. *Studio di un sistema ausiliare di equazioni.* Risolveremo il problema precedente relativo alle equazioni (9), (11), (12), (13) col metodo delle successive approssimazioni.

Perciò comincieremo collo studiare il caso in cui le funzioni A_i $(i = 0 \dots 5)$ B_h $(h = 0, 1, 2)$, F_1, Θ_1, Θ_2, Θ_3, H sono tutte funzioni delle sole variabili indipendenti x ed y: le indicheremo allora colle corrispondenti lettere minuscole. Inoltre porremo

$$z_1 = p_{40}, \quad z_2 = p_{31}, \quad z_3 = p_{22}, \quad z_4 = p_{13}, \quad z_5 = p_{04}, \tag{15}$$

e prenderemo queste come nuove incognite. Con ciò ci ridurremo a studiare il sistema di equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&a_0(xy)\frac{\partial z_1}{\partial x} + a_1(xy)\frac{\partial z_1}{\partial y} + a_2(xy)\frac{\partial z_2}{\partial y} + a_3(xy)\frac{\partial z_3}{\partial y} + a_4(xy)\frac{\partial z_4}{\partial y} + a_5(xy)\frac{\partial z_5}{\partial y} = f(xy)\\
&\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_2}{\partial x}\\
&\frac{\partial z_2}{\partial y} = \frac{\partial z_3}{\partial x}\\
&\frac{\partial z_3}{\partial y} = \frac{\partial z_4}{\partial x}\\
&\frac{\partial z_4}{\partial y} = \frac{\partial z_5}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

che dovremo integrare colle condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned}
&z_1(x\,0) = 0 \qquad\qquad z_4(0\,y) = 0\\
&b_0(y)\,z_1(0\,y) + b_1(y)\,z_2(0\,y) + b_2(y)\,z_3(0\,y) = \theta_1(y)\\
&b_0(y)\,z_2(0\,y) + b_1(y)\,z_3(0\,y) + b_2(y)\,z_4(0\,y) = \theta_2(y)\\
&b_0(y)\,z_3(0\,y) + b_1(y)\,z_4(0\,y) + b_2(y)\,z_5(0\,y) = \theta_3(y).
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ed inversamente quando sia determinato un sistema di soluzioni di queste equazioni (16), (17), per le ultime 4 equazioni (16) esso consterà delle derivate quarte di una stessa funzione z; onde, ponendo

$$\left.\begin{aligned}
z = {} & \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \int_0^{x_3} z_1(x_4\,y)\,dx_4 + \frac{x^3}{6}\int_0^y z_2(0\,y_1)\,dy_1 +\\
& + \frac{x^2}{2}\int_0^y dy_1 \int_0^{y_1} z_3(0\,y_2)\,dy_2 + x\int_0^y dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{y_2} z_4(0\,y_3)\,dy_3 +\\
& \int_0^y dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{y_2} dy_3 \int_0^{y_3} z_5(0\,y_4)\,dy_4
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

avremo la soluzione cercata.

Per risolvere (16), (17) fissiamo meglio le ipotesi relative ai coefficienti. In analogia alle (10) e (14) supporremo che sia

$$\left.\begin{aligned} & a_0(x\,y)\,\xi^5 - a_1(x\,y)\,\xi^4 + a_2(x\,y)\,\xi^3 - a_3(x\,y)\,\xi^2 + a_4(x\,y)\,\xi - a_5(x\,y) \\ & \equiv \frac{1}{h(x\,y)}\,(\xi - \lambda_1(x\,y))\,(\lambda_2(x\,y)\,\xi - 1)\,(\xi - \lambda_3)\,(\xi - \lambda_4)\,(\xi - \lambda_5)\ (*) \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

$$b_0(y)\,\xi^2 - b_1(y)\,\xi + b_2(y) \equiv \frac{1}{h(0\,y)}\,(\xi - \lambda_1(0\,y))\,(\lambda_2(0\,y)\,\xi - 1) \qquad (20)$$

dove $\lambda_1(x\,y)$, $\lambda_2(x\,y)$ sono convenienti funzioni, λ_3, λ_4, λ_5 costanti. Supporremo che per

$$|x| + |y| < \alpha_1, \quad (\alpha_1 < 1), \qquad (21)$$

1.° le $\lambda_1(x\,y)$, $\lambda_2(x\,y)$ abbiano le derivate finite e continue dei primi due ordini e esistano un numero $q_1 < 1$ ed un m_1 tali che

$$\left.\begin{aligned} & |\lambda_i| \leq q_1 < 1 \\ & \left[\left|\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial x\,\partial y}\right|, \left|\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial y^2}\right|\right] < m_1\,, \end{aligned}\right\} \ (i = 1, \ldots, 5) \qquad (22)$$

2.° che esista un $m_2 > 0$ tale che

$$[\,|\lambda_2\lambda_j - 1|\,,\ |\lambda_j - \lambda_i|\,] > m_2\,, \qquad (j,\ i \neq 2). \qquad (23)_a$$

3.° le funzioni $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\theta_3(x)$, $f(x\,y)$ abbiano le derivate prime finite e continue ed esistano dei numeri M_1, M'_1, M''_1 tali che $M_1 \leq M''_1 \leq M'_1$ e che

$$|f(x\,y)| < M_1 \qquad (24)_a$$

$$|\theta_i(x)| < M_1\,|x| \qquad (24)_b$$

$$\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right] < M'_1 \qquad (24)_c$$

$$|\theta'_i(x)| < M''_1\,. \qquad (24)_d$$

(*) Si noti che (19) (20) sono dissimmetriche rapporto a λ_1 e λ_2; ciò porta in tutti i calcoli che seguono una maggiore complicazione. Si ristabilirebbe la simmetria, ed anche i calcoli che seguono risulterebbero nell'andamento formale più eleganti e brevi se si ponesse $\frac{1}{\lambda_2}$ in luogo di λ_2: con ciò però si complicherebbero le disuguaglianze che ci occorrono.

4.° la funzione $h(x\,y)$ abbia le derivate prime e esista un numero ν_1 tale che

$$\left[\, h(x\,y)\,,\quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| \right] < \nu_1 . \tag{23$_b$}$$

Facciamo un cambiamento di funzioni incognite ponendo:

$$\left.\begin{aligned}
z_1 &= g_1\lambda_1^4\zeta_1 + g_2\zeta_2 + g_3\lambda_3^4\zeta_3 + g_4\lambda_4^4\zeta_4 + g_5\lambda_5^4\zeta_5\\
z_2 &= -g_1\lambda_1^3\zeta_1 - g_2\lambda_2\zeta_2 - g_3\lambda_3^3\zeta_3 - g_4\lambda_4^3\zeta_4 + g_5\lambda_5^3\zeta_5\\
z_3 &= g_1\lambda_1^2\zeta_1 + g_2\lambda_2^2\zeta_2 + g_3\lambda_3^2\zeta_3 + g_4\lambda_4^2\zeta_4 + g_5\lambda_5^2\zeta_5\\
z_4 &= -g_1\lambda_1\zeta_1 - g_2\lambda_2^3\zeta_2 - g_3\lambda_3\zeta_3 - g_4\lambda_4\zeta_4 + g_5\lambda_5\zeta_5\\
z_5 &= g_1\zeta_1 + g_2\lambda_2^4\zeta_2 + g_3\zeta_3 + g_4\zeta_4 + g_5\zeta_5
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

con

$$\left.\begin{aligned}
g_1 &= \frac{1}{(\lambda_1\lambda_2-1)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)} \qquad g_2 = \frac{1}{(1-\lambda_2\lambda_1)(1-\lambda_2\lambda_3)(1-\lambda_2\lambda_4)(1-\lambda_2\lambda_5)}\\
g_3 &= \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2\lambda_3-1)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_5)} \qquad g_4 = \frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4\lambda_2-1)(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)}\\
g_5 &= \frac{1}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5\lambda_2-1)(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_4)} .
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Dalle (25) è facile ricavare risolvendo le ζ_i; precisamente esse risulteranno combinazioni lineari delle z_i con coefficienti formati con somme e prodotti delle λ: potremo scrivere simbolicamente tali formule così:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= (\lambda_2 z - 1)\,(z-\lambda_3)\,(z-\lambda_4)\,(z-\lambda_5)\\
\zeta_2 &= (z-\lambda_1)\,(z-\lambda_3)\,(z-\lambda_4)\,(z-\lambda_5)\\
\zeta_3 &= (z-\lambda_1)\,(\lambda_2 z-1)\,(z-\lambda_4)\,(z-\lambda_5)\\
\zeta_4 &= (z-\lambda_1)\,(\lambda_2 z-1)\,(z-\lambda_3)\,(z-\lambda_5)\\
\zeta_5 &= (z-\lambda_1)\,(\lambda_2 z-1)\,(z-\lambda_3)\,(z-\lambda_4)
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

per passare alle espressioni effettive delle ζ_i devonsi sviluppare i prodotti e poi sostituire a z^r le z_{r+1} $(r=0,\,1,\ldots,\,4)$.

Ricordando la (19), risulterà subito che le ζ così determinate soddisfanno, grazie a (16), ad un sistema di equazioni della forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \lambda_1(xy)\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = h(xy)\, f(xy) + \sum_1^5{}_j\, c_{1j}(xy)\,\zeta_j \\
&\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \lambda_2(xy)\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = h(xy)\, f(xy) + \sum_1^5{}_j\, c_{2j}(xy)\,\zeta_j \\
&\frac{\partial \zeta_3}{\partial x} + \lambda_3 \qquad \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} = h(xy)\, f(xy) + \sum_1^5 c_{3j}(xy)\,\zeta_j \\
&\frac{\partial \zeta_4}{\partial x} + \lambda_4 \qquad \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} = h(xy)\, f(xy) + \sum_1^5{}_j\, c_{4j}(xy)\,\zeta_j \\
&\frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \lambda_5 \qquad \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} = h(xy)\, f(xy) + \sum_1^5{}_j\, c_{5j}(xy)\,\zeta_j
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

dove le c_{ij} sono funzioni formate con prodotti e somme dei coefficienti di (25), (27) e delle loro derivate prime; e quindi, grazie alle (22), (23)$_a$, (26), tutte inferiori insieme colle loro derivate prime ad un numero m funzione di q_1, m_1, m_2 soltanto:

$$\left| c_{ij} \,,\ \left|\frac{\partial c_{ij}}{\partial x}\right| ,\ \left|\frac{\partial c_{ij}}{\partial y}\right| \right| < m_6 \,. \tag{29$_a$}$$

E viceversa se si sostituisse in (28) l'effettiva espressione delle c_{ij}, si vedrebbe che ogni soluzione di (28) dà mediante (26) una soluzione di (19).

Le condizioni iniziali (17) che si hanno per le z_i dànno subito in modo analogo, grazie alle (26) e alla identità (20), le seguenti condizioni iniziali per le ζ_i

$$\left.\begin{aligned}
&\left[-\frac{\lambda_1^4(1-\lambda_2\lambda_3)(1-\lambda_2\lambda_4)(1-\lambda_2\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)}\right]_{y=0} \zeta_1(x0) + \quad \zeta_2(x0) \quad = \sum_3^5{}_i\, l_i(x)\,\zeta_i(x0) \\
&\qquad \zeta_1(0x) + \left[-\frac{\lambda_2^4(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)}{(1-\lambda_2\lambda_3)(1-\lambda_2\lambda_4)(1-\lambda_2\lambda_5)}\right]_{\substack{x=0\\ y=x}} \zeta_2(0x) = \varphi_1(x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta_3(0x) = \varphi_3(x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta_4(0x) = \varphi_4(x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta_5(0x) = \varphi_5(x)
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

dove

$$\varphi_i(x) = s_{i1}(x)\,\theta_1(x) + s_{i2}(x)\,\theta_2(x) + s_{i3}\,\theta_3(x) \tag{31}$$

e dove $l_i(x)$, $s_{ij}(x)$ sono funzioni che sono ancora formate con prodotti e somme dei coefficienti (26) delle formule (25) e delle funzioni $h, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ e quindi tutte inferiori insieme colle loro derivate prime ad un numero dipendente solo da q_1, m_1, m_2, ν_1: ingrandendo, ove occorra, il numero m_3 che compare in $(29)_a$ ma indicando con m_3 un numero funzione di q_1, m_1, m_2, ν_1 soltanto, potremo scrivere

$$\left[\; l_3(x) \;,\; l_4(x) \;,\; l_5(x) \;,\; l'_3(x) \;,\; l'_4(x) \;,\; l'_5(x) \;\right] < m_3 \qquad (29)_b$$

$$\left[\; s_{ij}(x) \;,\; s'_{ij}(x) \;\right] < m_3 \,. \qquad (29)_c$$

Il problema così posto per le (28), (30) non è che il problema III del paragrafo precedente; occorre quindi vedere se sono soddisfatte le disuguaglianze là supposte.

Ora (22) e $(29)_a$ $(29)_b$ tengono qui il luogo di $(41)_a$, $(41)_b$, $(41)_c$, $(43)_c$ di quel paragrafo.

Inoltre da (31), $(29)_c$, (23), $(24)_b$, $(24)_d$ segue

$$|\varphi_i(x)| < m_4 M_1 |x| \,, \qquad |\varphi'_i(x)| < m_4 M''_1$$

m_4 essendo un numero dipendente solo, come m_3, da q_1, m_1, m_2, ν_1: potremo supporre $m_4 \geq 1$, $m_4 \geq 2\nu_1$, ed allora ponendo $M_2 = m_4 M_1$, $M'_2 = m_4 M'_1$, $M''_2 = m_4 M''_1$ avremo ricordando $(24)_a$, $(24)_c$:

$$|h(x\,y)\, f(x\,y)| < M_2 \qquad (32)_a$$

$$|\varphi_i(x)| < M_2 |x| \qquad (32)_b$$

$$\left[\; \frac{\partial (h f)}{\partial x} \;,\; \left|\frac{\partial (h f)}{\partial y}\right| \;\right] < M'_2 \qquad (32)_c$$

$$|\varphi'_i(x)| < M''_2 \qquad (32)_d$$

le quali hanno l'ufficio delle $(41)_c$, $(41)_d$, $(43)_a$, $(43)_b$ di quel paragrafo: e si può notare che essendo per ipotesi $M_1 \leq M''_1 \leq M'_1$, sarà $M_2 \leq M''_2 \leq M'_2$ come appunto si chiede per analogia a quanto è supposto in quel luogo.

Non resta quindi da verificare che le proprietà relative alle quantità

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \left[- \frac{\lambda_1^4 (1 - \lambda_2 \lambda_3)(1 - \lambda_2 \lambda_4)(1 - \lambda_2 \lambda_5)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_5)} \right]_{y=0} . \\ \alpha_2(x) &= \left[- \frac{\lambda_2^4 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_5)}{(1 - \lambda_2 \lambda_3)(1 - \lambda_2 \lambda_4)(1 - \lambda_2 \lambda_5)} \right]_{\substack{x=0 \\ y=x}} . \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Intanto evidentemente esse sono derivabili ed inferiori colle loro derivate ad un numero m_5 funzione di q_1, m_1, m_2 soltanto:

$$[\,|a_1(x)|,\ |a_2(x)|,\ |a'_1(x)|,\ |a'_2(x)|\,] < m_5\,; \tag{34}$$

questa disuguaglianza ha l'ufficio di $(43)_a$. Inoltre è

$$|a_1(0)\,a_2(0)| = [\lambda_1^1 \lambda_2^1]_{x=y=0} \leq q_1^2 < 1 \tag{35}$$

che tiene il luogo di (44). Infine da (34) segue

$$|a_1(x)\,a_2(y)| < |a_1(0)\,a_2(0)| + m_5\,[\,|x| + |y|\,] + m_5^2\,|x|\cdot|y|\,.$$

Se quindi chiamiamo $\overline{\alpha}_1$ il minore dei due numeri $\alpha_1\ (<1)$ e $\dfrac{1-q_1^2}{m_5(m_5+1)}$, otterremo per (35) che nel campo

$$|x| + |y| < \overline{\alpha}_1\,, \tag{36}$$

in cui è certo $|x|\,|y| < [\,|x| + |y|\,]$, si ha pure

$$|a_1(x)\,a_2(y)| < 1, \tag{37}$$

la quale vale evidentemente la $(43)_c$.

Ne segue che nel campo (36) sono soddisfatte tutte le disuguaglianze occorrenti per poter applicare i risultati del § 1: e quindi, chiamato α_2 il minore dei 3 numeri α_1, $\dfrac{1-q_1^2}{m_5(m_5+1)}$, $-\dfrac{1}{2\,m_1}\log q_1$ nel campo

$$|x| + |y| < \alpha_2 \tag{38}$$

esiste una ed una sola soluzione delle equazioni (28), (30) che in esso soddisfa alle limitazioni

$$\left.\begin{aligned} &|\zeta_i| < k_1\,M_2\,[\,|x| + |y|\,] \\ &\left[\,\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial y}\right|\,\right] < k_2\,M''_2 + k_3\,M'_2\,[\,|x| + |y|\,] \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

dove k_1 e k_2 sono funzioni di q_1, m_1, m_3, m_4, m_5 soltanto, e cioè soltanto di q_1, m_1, m_2, ν_1. E risalendo per mezzo delle (25) dalle (28), (30) alle (16), (17), e di qui per le (15), (18) alle equivalenti equazioni nell'incognita z, ricordando sempre che i coefficienti di (25) sono limitati insieme colle loro derivate prime in funzione dei numeri q_1, m_1, m_2, noi conchiuderemo che, quando nelle equazioni (9), (11), (12), (13) si immagina che i coefficienti A, B ed i termini noti siano funzioni di x ed y soltanto, e che lo stesso sia per F_1, Θ_1, Θ_2, Θ_3, e che più precisamente siano soddisfatte le disuguaglianze enunciate in principio di questo numero si ha che *esiste una ed una sola soluzione z di tali equazioni; e che per essa valgono le limitazioni*

$$\left.\begin{array}{l}
|z| < k_0 M_1 [|x| + |y|]^5 \\
[|p_{10}|, |p_{01}|] < k_1 M_1 [|x| + |y|]^4 \\
[|p_{20}|, |p_{11}|, |p_{02}|] < k_2 M_1 [|x| + |y|]^3 \\
[|p_{30}|, |p_{21}|, |p_{12}|, |p_{03}|] < k_3 M_1 [|x| + |y|]^2 \\
[|p_{40}|, |p_{31}|, |p_{22}|, |p_{13}|, |p_{04}|] < k_3 M_1 [|x| + |y|] \\
[|p_{50}|, |p_{41}|, \ldots, |p_{05}|] < k_3 \{ M''_1 + M'_1 [|x| + |y|] \}
\end{array}\right\} \qquad (41)$$

k_i essendo una funzione di q_1, m_1, m_2, ν_1 soltanto.

Osservazione. Conforme a quanto si è osservato in fine ai n. 4, 5, 6 del § 1 possiamo notare qui che ove si trascurassero le ipotesi $(24)_c$, $(24)_d$ relative alle derivate prime della f e delle θ ed anche la (22) per quanto riguarda le derivate seconde delle λ_i, si otterrebbe ancora tutto quanto precede, ma le ζ_i non avrebbero più necessariamente le derivate, e mancherebbe la seconda delle (39). Però se per qualunque altra via si sa che le ζ_i hanno le derivate prime, si potrà sempre risalire dalle ζ_i alle z_i e da questa alla z, per cui quindi varranno le (40) toltane al più l'ultima.

5. *Applicazione del metodo delle successive approssimazioni.* L'applicazione allo studio dell'equazione primitiva dei risultati precedenti si compie ora seguendo il metodo delle successive approssimazioni per via affatto analoga a quella da me già seguita nel risolvere il problema di Cauchy (*).

(*) Cfr. la mia Nota già citata: *Sul problema di* Cauchy *per le equazioni a caratteristiche reali e distinte.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVII (1.° sem. 1909) (pag. 331-339). Colgo l'occasione per correggere una svista incorsa nella redazione di essa. La disuguaglianza (25) di pag. 338 deve essere introdotta a pag. 336. Per essa l'ultima delle (15) si può sostituire con $\left[|p_{2,n0}|, \ldots |p_{2,0n}|\right] < 2\varkappa_n^{(1)} \Phi$: ed allora la seconda delle (16) diventa

$$\left[\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|\right] < 2\sigma \varkappa_n^{(1)} \Phi$$

e l'ultima delle (17) dà in generale $\left[|p_{i,n0}|, |p_{i,n-11}| \ldots |p_{i,0n}|\right] < 2\varkappa_n^{(1)} \Phi$. Con ciò restano giustificati i calcoli successivi.

Completeremo perciò l'enunciato delle ipotesi formulate in principio del n. 3 col supporre che nel campo

$$[\,|x|, |y|, |z|, |p_{10}|, \ldots, |p_{02}|\,] < \alpha, \; [\,|p_{30}|, \ldots, |p_{04}|\,] < d_1 \tag{41}$$

oltre ad essere, come già si disse,

$$[\,|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|, |\lambda_5|\,] < q < 1 \tag{8}$$

$$[\,|\lambda_i - \lambda_j|, |\lambda_i \lambda_2 - 1|\,] < m \qquad (i, j = 1, 3, 4, 5) \tag{42}$$

sia μ il massimo valore delle funzioni F_1, Θ_1, Θ_2, A_h, B_h, H e delle loro derivate prime. Questa ipotesi non è che l'espressione analitica delle ipotesi 1.ª e 3.ª del n. 2. Ora, poichè λ_i, H sono formate colle derivate prime di F, e quindi le derivate totali prime e seconde di queste funzioni rapporto a x ed y dipendono solo dalle p_{ik} con $i + k \leq 4$, noi potremo supporre μ tale che nel campo (41) sia

$$\left[\left|\frac{\delta \lambda_i}{\delta x}\right|, \left|\frac{\delta \lambda_i}{\delta y}\right|, \left|\frac{\delta^2 \lambda_i}{\delta x^2}\right|, \left|\frac{\delta^2 \lambda_i}{\delta x \, \delta y}\right|, \left|\frac{\delta^2 \lambda_i}{\delta y^2}\right|\right] < \mu \tag{42$_a$}$$

$$\left[\,|H|, \left|\frac{\delta H}{\delta x}\right|, \left|\frac{\delta H}{\delta y}\right|\right] < \mu. \tag{42$_b$}$$

Inoltre per l'ipotesi 2.ª di quel numero Θ_1, Θ_2, Θ_3 si annullano per valori tutti nulli delle variabili da cui dipendono: conforme a ciò noi potremo trovare un numero M funzione di μ soltanto tale che nel campo (41) si abbia sempre

$$|F_1| < M \tag{43}$$

$$[\,|\Theta_1|_{x=0}, |\Theta_2|_{x=0}] < \frac{1}{11} M [\,|y| + |z|_{x=0} + |p_{10}|_{x=0} + \cdots + |p_{04}|_{x=0}]. \tag{44}$$

E similmente osservando che le derivate totali di F_1 rapporto a x ed y, $\frac{\delta F_1}{\delta x}$, $\frac{\delta F_1}{\delta y}$, sono funzioni lineari non omogenee delle derivate di quinto ordine di z aventi per coefficienti derivate parziali di F_1, esisterà un M' dipendente solo da μ tale che nel campo (41), se

$$[\,|p_{50}|, |p_{41}|, |p_{32}|, |p_{23}|, |p_{14}|, |p_{05}|\,] < d_2 \tag{45}$$

si abbia

$$\left[\left|\frac{\delta F_1}{\delta x}\right|, \left|\frac{\delta F_1}{\delta y}\right|\right] < M'(1 + d_2). \tag{46}$$

Inoltre per un'osservazione analoga osservando che le derivate totali di Θ_1, Θ_2, Θ_3 rapporto a y sono lineari nelle derivate quarte di z, potremo supporre M' tanto grande che nel campo (41) sia

$$\left| \left| \frac{\delta\,\Theta_1}{\delta\,y} \right|, \quad \left| \frac{\delta\,\Theta_2}{\delta\,y} \right| \right| < M'. \tag{47}$$

E potremo supporre $M \leqq M'$.

Ciò posto, noi determineremo una successione di funzioni $z^{(0)}$, $z^{(1)}$, $z^{(2)}, \ldots$, $z^{(t)}\ldots$ mediante le equazioni

$$\left.\begin{array}{l} A_0^{(t-1)}(x\,y)\,p_{50}^{(t)} + A_1^{(t-1)}(x\,y)\,p_{41}^{(t)} + A_2^{(t-1)}(x\,y)\,p_{32}^{(t)} + \\ \quad + A_3^{(t-1)}(x\,y)\,p_{23}^{(t)} + A_4^{(t-1)}(x\,y)\,p_{14}^{(t)} + A_5^{(t-1)}(x\,y)\,p_{05}^{(t)} = F_1^{(t-1)}(x\,y) \end{array}\right\} \quad (48)_t$$

$$z^{(t)}(x\,0) = z^{(t)}(0\,x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} B_0^{(t-1)}(0\,y)\,p_{40}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t-1)}(0\,y)\,p_{31}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t-1)}(0\,y)\,p_{22}^{(t)}(0\,y) = \Theta_1^{(t-1)}(0\,y) \\ B_0^{(t-1)}(0\,y)\,p_{31}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t-1)}(0\,y)\,p_{22}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t-1)}(0\,y)\,p_{13}^{(t)}(0\,y) = \Theta_2^{(t-1)}(0\,y) \\ B_0^{(t-1)}(0\,y)\,p_{22}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t-1)}(0\,y)\,p_{13}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t-1)}(0\,y)\,p_{04}^{(t)}(0\,y) = \Theta_3^{(t-1)}(0\,y) \end{array}\right\} \quad (49)_t$$

dove per brevità indichiamo coll'apice $(t-1)$ le funzioni che si ottengono da quelle di ugual nome del n. 3 sostituendo a z ed alle sue derivate i valori di $z^{(t-1)}$ e delle sue derivate. Porremo inoltre $z^{(0)} = 0$.

Dimostreremo successivamente: 1.° che almeno in un campo sufficientemente piccolo attorno all'origine si possono determinare le $z^{(t)}$, 2.° che esse convergono ad una funzione z soluzione di (9), (11), (12), (13).

Ora intanto facendo in (48), (49) $t = 1$ avremo un sistema affatto analogo a quello del numero precedente in cui l'ufficio delle quantità α_1, q_1, m_1, m_2, M_1, M'_1, M''_1, ν_1 è tenuto dai numeri α, q, μ, m, M, M', M', μ; quindi, detto m_6 il numero che si ottiene da α, q, μ, m come nel numero precedente m_3 si ottiene da α_1, q_1, m_1, m_2, avremo che nel campo

$$|x| + |y| < \alpha' \tag{50}$$

dove α' è il minore dei numeri 1, α, $\dfrac{1-q^5}{m_6(m_6+1)}$, $\dfrac{1}{2\mu}\,|\log q|$ è

$$\left.\begin{array}{ll} |z^{(1)}| < k\,M\,[\,|x| + |y|\,]^5, & [\,|p_{10}^{(1)}|,\ |p_{01}^{(1)}|\,] < k\,M\,[\,|x| + |y|\,]^4, \\ |p_{i,2-i}^{(1)}| < k\,M\,[\,|x| + |y|\,]^3, & |p_{i,3-i}^{(1)}| < k\,M\,[\,|x| + |y|\,]^2, \\ |p_{i,4-i}^{(1)}| < k\,M\,[\,|x| + |y|\,], & |p_{i,5-i}^{(1)}| < k\,(M' + M'\,[\,|x| + |y|\,]) < 2\,k\,M' \end{array}\right\} \quad (51)_1$$

dove k è la stessa funzione di q, μ, m, μ, che k_3 di q_1, m_1, m_2, ν_1.

Supponiamo di restringere il campo di valori di $x\,y$ che consideriamo, limitandolo colla disuguaglianza

$$|x| + |y| < \alpha'' \tag{52}$$

dove α'' è il minore dei numeri α', $\sqrt{\dfrac{\alpha}{k\,M}}$, $\dfrac{d_1}{k\,M}$ ed anche, per una ragione che vedremo tosto, minore di $\dfrac{1}{1 + 2\,k\,M'}$, i valori della $z^{(1)}$ e delle sue derivate soddisfanno allora alle limitazioni (41); ed anche alla (45) ove si ponga $d_2 = 2\,k\,M'$; ne segue che, se sostituiamo $z^{(1)}$ nelle F, A_r B, Θ onde calcolare la $z^{(2)}$, avremo che il sistema di equazioni (48), (49) in cui si faccia $t = 2$ è del tipo di quello del n. 4 ove l'ufficio dei numeri α_1, q_1, m_1, m_2, M_1, M'_1, M''_1, ν_1 è tenuto da α'', q, μ, m, M_1, $M'(1 + 2\,k\,M')$, M', μ. Quindi per le $z^{(2)}$ avremo le disuguaglianze

$$\left.\begin{aligned}
&|z^{(2)}| < k\,M[|x| + |y|]^5, \qquad [|p^{(2)}_{10}|, |p^{(2)}_{01}|] < k\,M[|x| + |y|]^4,\\
&|p^{(2)}_{i,2-i}| < k\,M[|x| + |y|]^3, \qquad |p^{(2)}_{i,3-i}| < k\,M[|x| + |y|]^2,\\
&\qquad |p^{(2)}_{i,4-i}| < k\,M[|x| + |y|],\\
&|p^{(2)}_{i,5-i}| < k\left\{M' + M'(1 + 2\,k\,M')[|x| + |y|]\right\} < 2\,k\,M'
\end{aligned}\right\} \tag{51$_2$}$$

dove per dedurre l'ultima disuguaglianza conviene rammentare che

$$|x| + |y| < \alpha'' < \frac{1}{1 + 2\,k\,M'}. \tag{53}$$

Così proseguendo si vede in generale che si possono nel campo (52) determinare tutte le $z^{(t)}$, e che è

$$\left.\begin{aligned}
&|z^{(t)}| < k\,M[|x| + |y|]^5, \qquad [|p^{(t)}_{10}|, |p^{(t)}_{01}|] < k\,M[|x| + |y|]^4,\\
&|p^{(t)}_{i,2-i}| < k\,M[|x| + |y|]^3, \qquad |p^{(t)}_{i,3-i}| < k\,M[|x| + |y|]^2,\\
&\qquad |p^{(t)}_{i,4-i}| < k\,M[|x| + |y|],\\
&|p^{(t)}_{i,5-i}| < k\left\{M' + M'(1 + 2\,k\,M')[|x| + |y|]\right\} < 2\,k\,M'.
\end{aligned}\right\} \tag{51$_t$}$$

6. *Continuazione: esistenza della soluzione.* Per mostrare poi che le $z^{(t)}$ tendono ad una funzione limite z, basta osservare che posto $\pi^{(t)} = z^{(t+1)} - z^{(t)}$, $\pi^{(t)}_{jk} = \dfrac{\partial^{i+k}\,\pi^{(t)}}{\partial x^i\,\partial y^k} = p^{(t+1)}_{ik} - p^{(t)}_{ik}$ si ha che le $\pi^{(t)}$ sono soluzioni delle equazioni

$$A^{(t)}_0\,\pi^{(t)}_{50} + A^{(t)}_1\,\pi^{(t)}_{41} + A^{(t)}_2\,\pi^{(t)}_{32} + A^{(t)}_3\,\pi^{(t)}_{23} + A^{(t)}_4\,\pi^{(t)}_{14} + A^{(t)}_5\,\pi^{(t)}_{05} = F^{(t)}_1(x\,y) \tag{54}$$

6

$$\left.\begin{aligned} &\pi^{(t)}(x\,0) = \pi^{(t)}(0\,x) = 0 \\ &B_0^{(t)}(0\,y)\,\pi_{40}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t)}(0\,y)\,\pi_{31}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t)}(0\,y)\,\pi_{22}^{(t)}(0\,y) = \overline{\Theta}_1^{(t)}(0\,y) \\ &B_0^{(t)}(0\,y)\,\pi_{31}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t)}(0\,y)\,\pi_{22}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t)}(0\,y)\,\pi_{13}^{(t)}(0\,y) = \overline{\Theta}_2^{(t)}(0\,y) \\ &B_0^{(t)}(0\,y)\,\pi_{22}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t)}(0\,y)\,\pi_{13}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t)}(0\,y)\,\pi_{04}^{(t)}(0\,y) = \overline{\Theta}_3^{(t)}(0\,y) \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

dove

$$\left.\begin{aligned} \overline{F}_1^{(t)}(x\,y) &= F_1^{(t)}(x\,y) - F_1^{(t-1)}(x\,y) + \sum_0^5{}_i\,[A_i^{(t)}(x\,y) - A_i^{(t-1)}(x\,y)]\,p_{5-i,i}^{(t)} \\ \overline{\Theta}_j^{(t)}(0\,y) &= \Theta_j^{(t)}(0\,y) - \Theta_j^{(t-1)}(0\,y) + \sum_0^3{}_i\,[B_i^{(t)}(0\,y) - B_i^{(t-1)}(0\,y)]\,p_{5-i-j,i+j-1}^{(t)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (56)_t$$

Le equazioni (54), (55) sono della solita forma da noi studiata: anzi i primi membri non differiscono dai primi membri di (48), (49): esaminiamo i secondi membri. Ricordiamo che le derivate parziali di F_1, Θ_1, Θ_2, Θ_3, A_i, B_h sono tutte inferiori a μ, ricordiamo inoltre le definizioni di $F_1^{(t)}$, $\Theta_j^{(t)} \ldots$; avremo

$$\left.\begin{aligned} |F_1^{(t)}(x\,y) - F_1^{(t-1)}(x\,y)| &= |F_1(x\,y\,z_1^{(t)}\,p_{10}^{(t)} \ldots p_{01}^{(t)}) - F_1(x\,y\,z_1^{(t-1)}\,p_{10}^{(t-1)} \ldots p_{01}^{(t-1)})| \leq \\ &\leq \mu\,[|\pi^{(t-1)}| + |\pi_{10}^{(t-1)}| + \cdots + |\pi_{04}^{(t-1)}|] \\ |\Theta_j^{(t)}(x\,y) - \Theta_j^{(t-1)}(0\,y)| &= |\Theta_j(0\,y\,z_1^{(t)}\,p_{10}^{(t)} \ldots p_{03}^{(t)}) - \Theta_j(0\,y\,z_1^{(t-1)}\,p_{10}^{(t-1)} \ldots p_{03}^{(t-1)})| \leq \\ &\leq \mu\,[|\pi^{(t-1)}| + |\pi_{10}^{(t-1)}| + \cdots + |\pi_{03}^{(t-1)}|] \end{aligned}\right\} \quad (57)_t$$

$$\left.\begin{aligned} |A_i^{(t)}(x\,y) - A_i^{(t-1)}(x\,y)| &\leq \mu\,[|\pi^{(t-1)}| + \cdots + |\pi_{02}^{(t-1)}|] \\ |B_i^{(t)}(0\,y) - B_i^{(t-1)}(0\,y)| &\leq \mu\,[|\pi^{(t-1)}| + \cdots + |\pi_{02}^{(t-1)}|]. \end{aligned}\right\} \quad (58)_t$$

Ciò posto osserviamo che è $\pi^{(0)}(x\,y) = z^{(1)}(x\,y)$: per $\pi^{(0)}$ valgono dunque le $(51)_1$.

Passiamo alle $\pi^{(1)}$. Avremo da $(56)_1$, $(57)_1$, $(58)_1$

$$|\overline{F}_1^{(1)}(x\,y)| < 15\,\mu\,k\,M\,[|x| + |y|] + 72\,\mu\,k\,M^2\,M\,[|x| + |y|]^2$$

$$|\overline{\Theta}_j^{(1)}(0\,y)| < 10\,\mu\,k\,M\,|y|^2 + 24\,\mu\,k\,M^2\,|y|^3.$$

Onde se noi ci limitiamo a considerare il campo

$$|x| + |y| < \alpha''' \quad (59)$$

dove α''' è un numero $< \alpha''$ e tale che

$$15\,\mu\,k\left(1 + \frac{24}{5}\,M\,\alpha'''\right)\alpha''' = \tau < 1,$$

avremo in (59)

$$|\overline{F}^{(1)}(x\,y)| < \tau\, M, \quad |\overline{\Theta}_j^{(1)}(0\,y)| < \tau\, M\,|y|. \tag{60$_1$}$$

Ricordiamo che $\pi^{(1)} = z^{(2)} - z^{(1)}$ ammette certo le derivate quinte: possiamo allora applicare a $\pi^{(1)}$ i risultati del n. 4, tenendo conto dell'osservazione finale di quel numero: ed otterremo per $(60)_1$ che, indicando con k lo stesso numero che precedentemente, si ha

$$\left.\begin{array}{l} |\pi^{(1)}| < k\,\tau\, M[|x| + |y|]^5, \quad [|\pi_{10}^{(1)}|,\ |\pi_{01}^{(1)}|] < k\,\tau\, M[|x| + |y|]^4 \\ |\pi_{i,2-i}^{(1)}| < k\,\tau\, M[|x| + |y|]^3, \qquad |\pi_{i,3-i}^{(1)}| < k\,\tau\, M[|x| + |y|]^2 \\ \qquad |\pi_{i,4-i}^{(1)}| < k\,\tau\, M[|x| + |y|] \end{array}\right\} \tag{61$_1$}$$

mentre non potremo dedurre alcuna utile di limitazione per le $\pi_{i,5-i}^{(1)}$, che pure, come dicemmo, esistono, perchè nelle $(60)_1$ non abbiano dato limitazioni per le derivate di $\overline{F}^{(1)}$ e $\overline{\Theta}_j^{(1)}$.

Da $(61)_1$ e $(51)_2$ dedurremo in virtù di (58) che nel campo (59) è

$$\left.\begin{array}{l} |\overline{F}_1^{(2)}(x\,y)| < 15\,\mu\, k\,\tau\, M[|x| + |y|] + 72\,\mu\, k\,\tau\, M'\, M[|x| + |y|]^2 < \tau^2\, M \\ |\overline{\Theta}_j^{(2)}(0\,y)| < (10\,\mu\, k\,\tau\, M + 24\,\mu\, k\,\tau\, M^2\, \alpha''')\,|y|^2 < \tau^2\, M\,|y|. \end{array}\right\} \tag{60$_2$}$$

Onde seguirà analogamente a $(61)_1$

$$|\pi^{(2)}| < k\,\tau^2\, M[|x| + |y|]^5 \ldots\ |\pi_{i,4-i}^{(2)}| < k\,\tau^2\, M[|x| + |y|]. \tag{61$_2$}$$

Ed in generale così continuando si avrà

$$\left.\begin{array}{l} |\pi^{(t)}| < k\,\tau^t\, M[|x| + |y|]^5, \quad [|\pi_{10}|,\ |\pi_{01}|] < k\,\tau^t\, M[|x| + |y|]^4, \\ |\pi_{i,2-i}^{(t)}| < k\,\tau^t\, M\,|x| + |y|]^3, \qquad [|\pi_{i,3-i}^{(t)}|] < k\,\tau^t\, M[|x| + |y|]^2, \\ \qquad |\pi_{i,4-i}^{(t)}| < k\,\tau^t\, M[|x| + |y|]. \end{array}\right\} \tag{61$_t$}$$

Queste disuguaglianze ci permettono di affermare che le $z^{(t)}$ convergono uniformemente in (59) ad una funzione limite z, e che le derivate dei primi 4 ordini delle $z^{(t)}$ convergono del pari uniformemente a delle funzioni limiti che saranno per ciò stesso le derivate dei primi 4 ordini di z. Onde seguirà che z soddisfa alle (11), (12), (13) e cioè alle

$$z(x\,0) = z(0\,x) = 0$$

ed alle

$$\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{\delta^2 F}{\delta x\,\delta y}\right)_{x=0} = \left(\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}\right)_{x=0} = 0. \tag{62}$$

Inoltre si ha ancora uniformemente in

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{t=\infty} A_i^{(t)}(x\,y) = A_i(x\,y\,z\,p_{10}\dots p_{02})\\&\lim_{t=\infty} F_1^{(t)}(x\,y) = F_1(x\,y\,z\,p_{10}\dots p_{04}).\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Non si può invece dimostrare propriamente l'esistenza delle derivate quinte di z; e quindi non si dimostra che essa soddisfa a (9). Ma si vede invece facilmente che essa soddisfa a (1). Invero si ha uniformemente in (59)

$$F(x\,y\,z\,p_{10}\dots p_{02}) = \lim_{t=\infty} F(x\,y\,z^{(t)}\,p_{10}^{(t)}\dots p_{02}^{(t)}).$$

D'altra parte per il modo in cui si dedusse la (9) sarà

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_4\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_5\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x\,y\,z^{(t)}\dots p_{02}^{(t)}) =$$

$$= \sum_0^5{}_i\, A_i^{(t)}(x\,y)\,p_{5-i,i}^{(t)} - F_1^{(t)}(x\,y).$$

Ma per le (51) si ha che le $p_{5-i,i}^{(t)}$ sono sempre in modulo inferiori a $2\,k\,M'$; onde per le (63) e (48) sarà uniformemente in (59)

$$\lim_{t=\infty}\left(\sum_0^5{}_i\, A_i^{(t)}(x\,y)\,p_{5-i,i}^{(t)} - F_1^{(t)}(x\,y)\right) = \lim_{t=\infty}\left(\sum_0^5{}_i\, A_i^{(t-1)}(x\,y)\,p_{5-i,i}^{(t)} - F_1^{(t-1)}(x\,y)\right) = 0.$$

Ne segue che in (59) è uniformemente

$$\lim_{t=\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_4\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_5\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x\,y\,z^{(t)}\dots p_{02}^{(t)}) = 0;$$

onde si deduce che su $F(x\,y\,z\dots p_{02})$ si può operare con

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_4\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_5\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

e che il risultato è lo zero. Questo insieme colle condizioni (61) ci dice che z soddisfa realmente alla (1).

Osservazione. Del resto si può osservare che se pure la z non ha le derivate quinte, tuttavia su di essa si può operare con

$$\sum_0^5{}_i\, A_i(x\,y\,z\,p_{10}\dots p_{02})\,\frac{\partial^5}{\partial x^{5-i}\,\partial y^i}$$

considerato come un operatore unico in modo analogo a quanto si vide nel n. 4 del § I.

7. *Unicità della soluzione.* Lo stesso procedimento di successive approssimazioni che ci ha servito a costruire la funzione z può servire, come è ben noto, a provare che non esiste altra soluzione di (1) che soddisfaccia alle condizioni iniziali da noi imposte e che abbia le derivate dei primi *cinque* ordini finite e continue; e quindi soddisfaccia realmente al sistema (9), (11), (12), (13). Tale risultato non costituisce però il teorema di unicità perfettamente corrispondente al teorema di esistenza dimostrato sopra: poichè in questo abbiamo solo provato che la z ammette le derivate quarte finite e continue.

Può quindi non essere privo di interesse il seguente ragionamento che dimostra il teorema di unicità in queste più ampie ipotesi.

Basta invero osservare che se oltre alla z esistesse un'altra soluzione z_1 la quale avesse le derivate dei primi 4 ordini finite e continue, la funzione $u = z - z_1$ sarebbe una soluzione, nulla sugli assi, finita e continua colle sue derivate dei primi 4 ordini dell'equazione lineare omogenea

$$\left.\begin{aligned} a(x\,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x\,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c(x\,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x\,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + e(x\,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x\,y)\,u = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

dove le $a(x\,y), \ldots$ sono funzioni che ammettono le derivate prime e seconde finite e continue; e per cui si ha l'identità

$$a(x\,y)\,\xi^2 - b(x\,y)\,\xi + c(x\,y) \equiv (\xi - \mu_1(x\,y))\,(\mu_2(x\,y)\,\xi - 1)$$

dove $\mu_1(x\,y)$ e $\mu_2(x\,y)$ sono funzioni finite e continue colle loro derivate prime e seconde, entrambe minori di 1 in un campo attorno all'origine (*).

Basterà quindi provare l'unicità per l'equazione (64): e perciò ci si potrebbe riferire ai risultati del Goursat e degli autori già citati relativi all'equazione (2) dell'introduzione, discutendo la trasformazione di variabili che porta (64) nella forma (2). Ma senza ricorrere a tale procedimento, si osservi che procedendo in modo analogo a quanto si fece al n. 4 di questo § II se u è una soluzione di (64) la quale abbia le derivate dei primi due ordini, posto $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_2 = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ le funzioni u_1 ed u_2 avranno le derivate prime e

(*) Cfr. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, pag. 352 e ss.

saranno soluzioni di un sistema di equazioni della forma

$$\left.\begin{aligned} & a(x\,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}+b(x\,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}+c(x\,y)\frac{\partial u_2}{\partial y}+\\ &\qquad\qquad +d(x\,y)\,u_1+e(x\,y)\,u_2+f(x\,y)\,u=0\\ & \frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{\partial u_2}{\partial x}\\ & u=\int_0^x u_1\,d\,x+u_2(0\,y)\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

colle condizioni iniziali

$$u_1(0\,x)=u_2(x\,0)=0. \tag{66}$$

È chiara l'analogia del sistema delle (65), (66) col sistema che si deduce da (9), (11), (12), (13) colle sostituzioni (15), (18); e come per quello si è sopra osservato potersi dimostrare il teorema di esistenza e quello di unicità per le soluzioni che ammettono le derivate prime, così cogli stessi procedimenti in base ai risultati generali del § I si dimostra il teorema di unicità delle soluzioni del sistema (65), (66) le quali ammettono le derivate prime. La funzione u non può quindi differire da zero.

8. *Conclusione.* — Possiamo quindi concludere:

Data l'equazione

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)=0, \tag{1}$$

se si suppone che F abbia le derivate dei primi 4 ordini rispetto alle variabili da cui dipende finite e continue, esiste nell'intorno dell'origine una ed una sola soluzione di essa che abbia le derivate dei primi 4 ordini e si annulli sugli assi, purchè il birapporto delle direzioni delle caratteristiche dell'equazione (1) *nell'elemento di superficie corrispondente all'origine* (il quale è pienamente determinato da (1) e dai dati iniziali) *e degli assi non sia in modulo eguale a* 1 (*). *Se l'equazione è analitica, la soluzione lo è pure.*

Con una trasformazione di variabili e di funzione incognita il precedente teorema dà luogo a quest'altro:

Data l'equazione

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)=0, \tag{1}$$

(*) Nel caso reale ciò equivale a dire che le caratteristiche e gli assi non si separano armonicamente.

se si suppone che F abbia le derivate dei primi 4 ordini rispetto alle variabili da cui dipende finite e continue, esiste nell'intorno dell'origine una superficie soluzione di essa che passi per due curve gobbe le quali si incontrino senza toccarsi in un punto della retta $x = y = 0$, purchè il birapporto delle direzioni delle tangenti a tali curve gobbe e delle direzioni delle curve caratteristiche dell'equazione (1) *nell'elemento iniziale determinato da questi dati non sia in modulo uguale all'unità. Si ammette che le curve gobbe assegnate siano date da equazioni i cui primi membri hanno le derivate dei primi 6 ordini finite e continue: la soluzione costrutta avrà allora certamente le derivate dei primi 4 ordini finite e continue, e sarà l'unica funzione che gode di tali proprietà.*

Naturalmente è chiaro che la condizione relativa al birapporto è realmente essenziale: una dimostrazione di ciò relativa al caso analitico, è data dal Goursat nelle sue Memorie, ed è evidentemente di tale natura da applicarsi pure al caso delle funzioni di variabili reali, almeno quando si ammetta per queste l'esistenza di un numero conveniente di derivate.

§ III.

1. *La proprietà fondamentale delle caratteristiche semplici.* Si consideri un'equazione di secondo ordine a caratteristiche distinte

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0 \tag{1}$$

ed una curva di elementi di secondo ordine caratteristica per essa; sia ad es.:

$$y = z = p = q = r = s = t = 0. \tag{2}$$

Per dimostrare che essa appartiene ad infinite soluzioni di (1) il Goursat osserva che, assegnata una funzione $\psi(y)$ arbitraria nulla per $y = 0$, esiste pel teorema del paragrafo precedente una soluzione di (1) la quale si riduce a $\psi(y)$ per $x = 0$, e a 0 per $y = 0$; e verifica col calcolo effettivo delle derivate nel punto iniziale $x = y = 0$ che, se si suppone che la $\psi(y)$ si annulla colle sue derivate dei primi due ordini per $y = 0$, detta soluzione contiene tutta la caratteristica (2). Nel caso delle funzioni non analitiche è chiaro che il calcolo effettivo delle derivate nel punto iniziale non si può in generale fare, e che ove pure fosse possibile non basterebbe a provare che la (2) appartiene alla soluzione cercata.

È però semplicissimo indicare il ragionamento che devesi sostituire al ragionamento del Goursat. Per maggior semplicità si risolva la (1) rapporto ad s: e sia

$$s = f(x\,y\,z\,p\,q\,r\,t) \tag{3}$$

la nuova equazione: ciò si può sempre fare poichè si suppone che (2) è caratteristica di (1) e che le caratteristiche di (1) nell'elemento

$$x = y = z = p = q = r = s = t = 0$$

sono distinte.

L'ipotesi che (2) sia caratteristica di (1) porta inoltre che

$$f(x\,0\,0\dots 0) = \frac{\partial f(x\,0\dots 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x\,0\dots 0)}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Ciò posto, sia dunque $z = \zeta(x\,y)$ una funzione soluzione di (3) che abbia le derivate dei primi tre ordini finite e continue, e tale che soddisfaccia alle condizioni iniziali

$$\zeta(x\,0) = 0, \quad \pi(0\,0) = \chi(0\,0) = \rho(0\,0) = \sigma(0\,0) = \tau(0\,0) = 0 \tag{5}$$

dove colle lettere greche π, χ, ρ, σ, τ indichiamo le derivate di ζ analoghe a p, q, r, s, t. Vogliamo dimostrare che sarà identicamente

$$\pi(x\,0) = \chi(x\,0) = \rho(x\,0) = \sigma(x\,0) = \tau(x\,0) = 0.$$

Ora da $\zeta(x\,0) = 0$ segue intanto $\pi(x\,0) = \rho(x\,0) = 0$. Si osservi ora che dall'essere $\zeta(x\,y)$ soluzione di (3) e $\dfrac{\partial \pi(x\,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial \chi(x\,y)}{\partial x} = \sigma(x\,y)$, $\dfrac{\partial \sigma(x\,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial \tau(x\,y)}{\partial x}$ segue che si hanno le equazioni

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} - f(x\,y\,\zeta\,\pi\,\chi\,\rho\,\tau) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \zeta}\pi - \frac{\partial f}{\partial \pi}\frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial \zeta}\chi - \frac{\partial f}{\partial \pi}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \chi}\tau - \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0.$$

Poniamo $\dfrac{\partial \tau}{\partial y} = \theta(x\,y)$; sarà per le nostre ipotesi $\theta(x\,y)$ una funzione finita e continua nell'intorno dell'origine.

Poniamo $\chi(x\,0) = \chi_1(x)$, $\tau(x\,0) = \tau_1(x)$; rammentando che

$$\zeta(x\,0) = \pi(x\,0) = \rho(x\,0) = \frac{\partial \pi(x\,0)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(x\,0)}{\partial x} = 0,$$

le relazioni precedenti divengono, facendovi $y = 0$, e tenendo conto di (4)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\chi_1}{dx} - f(x\,0\,0\,0\,\chi_1\,0\,\tau_1) = 0\\
&\frac{d^2\chi_1}{dx^2} - \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{d\chi_1}{dx} - \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{d\tau_1}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x}\\
&\frac{d\tau_1}{dx} - \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{d^2\chi_1}{dx^2} - \frac{\partial f}{\partial \pi}\frac{d\chi_1}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\chi_1 + \frac{\partial f}{\partial \chi}\tau_1 + \frac{\partial f}{\partial \tau}\theta(x\,0)
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

dove anche nelle derivate di f che stanno come coefficienti delle ultime due equazioni devesi porre $y = \zeta = \pi = \rho = 0$, $\chi = \chi_1$, $\tau = \tau_1$. Tali equazioni costituiscono quando sia nota la funzione $\theta(x\,0)$ un sistema di equazioni differenziali per τ_1 e χ_1, regolare nell'intorno dei valori $x = \chi_1 = \tau_1 = 0$, perchè grazie alle (4) il Jacobiano delle (6) rapporto a $\frac{d\chi_1}{dx}$, $\frac{d^2\chi_1}{dx^2}$, $\frac{d\tau_1}{dx}$ per $x = \chi_1 = \tau_1 = 0$ è uguale a 1: quindi data la $\theta(x\,0)$ ed una coppia di valori dell'intorno della coppia (0, 0), quali valori iniziali di χ_1 e τ_1 per $x = 0$, le χ_1 e τ_1 sono pienamente determinate. Ma per le (4) qualunque sia $\theta(x\,0)$ purchè finita, le funzioni $\chi_1(x) = 0$, $\tau_1(x) = 0$ sono soluzioni di (6) e quindi sono le sole soluzioni di (6) le quali si annullino per $x = 0$. Ne segue per (5) che è necessariamente $\chi(x\,0) = \tau(x\,0) = 0$ e quindi pure $\sigma(x\,0) = 0$.

La soluzione $z = \zeta(x\,y)$ di (1) o (3) contiene quindi la caratteristica (2) c. v. d.

2. — Da questo teorema si potrebbe allo stesso modo che fa il Goursat nella seconda delle Memorie citate degli *Annales de la Faculté de Toulouse* completare il teorema del paragrafo precedente, provando che nel caso delle funzioni di variabili reali, se le due curve gobbe assegnate non si incrociano in un punto O dell'asse delle z, ma hanno O come estremo comune senza i i toccarsi esiste una sola od infinite superficie soluzioni che contengono queste due curve a seconda che le direzioni delle tangenti ad esse non separano o separano le direzioni delle caratteristiche.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XVIII della Serie III, pag. 287 e seguenti.

Tipo-Lit. Rebeschini di Turati e C.
Milano, 1911.

MILANO — TIPO-LIT. REBESCHINI DI TURATI E C.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations différentielles périodiques.* Note de M. **Eugenio-Elia Levi.**

M. Levi-Civita, dans un Mémoire paru dernièrement dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (1911, p. 325-375), a démontré l'existence d'un moyen mouvement du nœud lunaire : c'est-à-dire, au point de vue analytique, il a démontré qu'étant donnée l'équation différentielle à laquelle satisfait l'anomalie θ du nœud lunaire, il y a un nombre ω tel que, pour toute solution de cette équation, on peut poser

$$\theta = \omega t + \varepsilon(t), \tag{1}$$

où $\varepsilon(t)$ reste fini même pour t indéfiniment croissant. Je me propose de démontrer un théorème qui contient celui de M. Levi-Civita comme cas particulier : *Étant donnée une équation différentielle de premier ordre*

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, t), \tag{2}$$

où Θ est une fonction finie, continue, satisfaisant aux conditions de Lipschitz, et périodique avec la période T par rapport à t, et τ par rapport à θ, toutes ses solutions ont la forme (1).

Remarquons avant tout que :

1° Si $\theta(t)$ est une solution de (2), il en est de même de toute fonction $\theta(t+kT)+k_1\tau$, k et k_1 étant des entiers quelconques ;

2° Si $\theta(t)$ et $\theta_1(t)$ sont deux solutions de (2) telles que pour $t=t_1$ on ait $\theta(t_1)=\theta_1(t_1+kT)+k_1\tau$ (k et k_1 entiers), on aura toujours

$$\theta(t)=\theta_1(t+kT)+k_1 T.$$

En effet, en vertu de 1°, les deux membres de cette égalité sont deux solutions de (2) qui, pour $t=t_1$, prennent la même valeur.

J'appelle solution *quasipériodique d'ordre k* (k entier) de (1) toute solution qui croît de $N\tau$, où N est entier, lorsque t croît de kT : une telle solution sera de la forme

$$\theta(t) = \frac{N\tau}{T}t + \sigma(t). \tag{3}$$

où $\sigma(t)$ est périodique avec la période $k\mathrm{T}$: elle aura donc la forme (1). Pour vérifier qu'une solution est quasipériodique d'ordre k, il suffit, d'après 2°, de vérifier que, pour une valeur t_1 de t, on a

$$\theta(t_1+k\mathrm{T})-\theta(t_1)=\mathrm{N}\tau.$$

Cela posé, désignons par $\theta(\theta_0,t)$ la solution de (2) pour laquelle on a $\theta(\theta_0,0)=\theta_0$; d'après 2° il suffira de prouver que les solutions $\theta(\theta_0,t)$ pour $0\leqq\theta_0<\tau$ sont du *type* (1).

Distinguons deux cas :

1° Il y a un entier k tel que (2) a une solution quasipériodique d'ordre k. En changeant, s'il le faut, θ en $\theta-\gamma$ on peut toujours supposer qu'une telle solution soit $\theta(0,t)$. Or, en vertu de 2°, on ne peut jamais avoir

$$\theta(\theta_0,t_1)-\theta(0,t_1)=k_1\tau$$

si l'on n'a pas $\theta_0=k_1\tau$: donc, puisque $\theta(\theta_0,t)-\theta(0,t)$ est une fonction continue de θ_0 qui pour $\theta_0=0$ est nulle et qui pour $0\leqq\theta_0<\tau$ ne passe jamais par les valeurs τ, ni $-\tau$, on aura $|\theta(\theta_0,t)-\theta(0,t)|<\tau$.

Comme $\theta(0,t)$ est de la forme (3), on aura donc pour $0\leqq\theta_0<\tau$

$$\theta(\theta_0,t)=\frac{\mathrm{N}\tau}{\mathrm{T}}t+\sigma(t)+\eta(\theta_0,t)\tau, \tag{4}$$

où $\sigma(t)$ est périodique avec la période $k\mathrm{T}$ et $|\eta(\theta_0,t)|<1$: (4) a donc bien la forme (1).

2° Quel que soit k, il n'y a pas de solution quasipériodique d'ordre k. Posons alors

$$\theta(\theta_0,k\mathrm{T})-\theta_0=\mathrm{N}_k(\theta_0)\tau+\varepsilon_k(\theta_0), \tag{5}$$

$\mathrm{N}_k(\theta_0)$ étant un entier et $0\leqq\varepsilon_k(\theta_0)<\tau$. La fonction $\varepsilon_k(\theta_0)$ peut être discontinue seulement dans les points $\overline{\theta_0}$ où $\varepsilon_k(\overline{\theta_0})=0$; mais alors on aurait $\theta(\overline{\theta_0},k\mathrm{T})=\mathrm{N}_k(\overline{\theta_0})\tau$ et la fonction $\theta(\overline{\theta_0},t)$ serait quasipériodique : donc on aura toujours $0<\varepsilon_k(\theta_0)<\tau$, $\varepsilon_k(\theta_0)$ sera continue, $\mathrm{N}_k(\theta_0)$ sera une constante N_k. Posons $\sigma_k^1(\theta_0)=\theta_0+\varepsilon_k(\theta_0)$, $\sigma_k^i(\theta_0)=\sigma_k^1[\sigma_k^{i-1}(\theta_0)]$: on aura $\theta_0<\sigma_k^1(\theta_0)<\theta_0+\tau<2\tau$, $\theta_0<\sigma_k^i(\theta_0)<(i+1)\tau$. Par (5) on aura encore $\theta(\theta_0,k\mathrm{T})=\theta[\sigma_k^1(\theta_0),0]+\mathrm{N}_k\tau$; donc, d'après 2°,

$$\theta(\theta_0,t)=\theta[\sigma_k^1(\theta_0),t-k\mathrm{T}]+\mathrm{N}_k\tau=\theta[\sigma_k^i(\theta_0),t-ki\mathrm{T}]+i\mathrm{N}_k\tau.$$

En posant $t=ik\mathrm{T}$, on en tire

$$\sigma_{ik}^1(\theta_0)+\mathrm{N}_{ik}\tau=\sigma_k^i(\theta_0)+i\mathrm{N}_k\tau,\qquad \mathrm{N}_{ik}\tau=i\mathrm{N}_k\tau+[\sigma_k^i(\theta_0)-\sigma_{ik}^1(\theta_0)].$$

Mais des inégalités auxquelles satisfont les σ_k^i, on déduit

$$-\tau < \sigma_k^{(i)}(\theta_0) - \sigma_{ki}(\theta_0) < (i+1)\tau;$$

donc si nous remarquons que N_k et N_{ki} sont des entiers, on aura

$$iN_k \leq N_{ki} \leq i(N_k+1). \tag{6}$$

De même

$$kN_i \leq N_{ki} \leq k(N_i+1).$$

Donc

$$iN_k \leq k(N_i+1), \qquad kN_i \leq i(N_k+1),$$

c'est-à-dire

$$\frac{N_k}{k} - \frac{1}{i} \leq \frac{N_i}{i} \leq \frac{N_k}{k} + \frac{1}{k}.$$

Il y a donc un nombre p tel que

$$\lim_{k=\infty} \frac{N_k}{k} = p, \qquad \left| p - \frac{N_k}{k} \right| < \frac{1}{k}. \tag{7}$$

On peut donc écrire

$$\theta(\theta_0, t) = \frac{p\tau}{T} t + \varepsilon(t),$$

où l'on définit $\varepsilon(t)$ en posant, pour $kT \leq t \leq (k+1)T$,

$$\varepsilon(t) = \theta[\sigma_k^1(\theta_0), t - kT] + (N_k - kp)\tau + \frac{p\tau}{T}(kT - t);$$

$\theta(\theta_0, t)$ aura donc bien la forme (1) puisque, en appelant M le maximum de $|\theta(\theta_0, t)|$ pour $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq T$, on a par (7) $|\varepsilon(t)| < M + \tau(1+p)$.

On peut même remarquer que de l'inégalité (6) on tire $N_{k^m} \leq \frac{N_{k^{m+1}}}{k}$, donc la suite N_1, $\frac{N_k}{k}$, $\frac{N_{k^2}}{k^2}$, $\dots$, $\frac{N_{k^m}}{k^m}$, $\dots$ est croissante, et, comme elle a encore pour limite p, on aura toujours $p \geq \frac{N_k}{k}$.

Nous terminons en remarquant, avec M. Levi-Civita (*loc. cit.*, p. 371), qu'il y a peut-être dans les formules (7) une nouvelle méthode pour le calcul numérique du moyen mouvement du nœud lunaire.

(*Comptes rendus*, t. 153, p. 799, séance du 30 octobre 1911.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
48402 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali
Estratto dal vol. XXI, serie 5ª, 2º sem. fasc. 12° — Seduta del 15 dicembre 1912

SERIE DI TAYLOR

E

FUNZIONI ANALITICHE DI PIÙ VARIABILI

NOTA

DEL PROF

EUGENIO ELIA LEVI

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI
1912

Matematica — *Serie di Taylor e funzioni analitiche di più variabili.* Nota del prof. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Corrispondente O. TEDONE.

1. È noto che per definire le funzioni analitiche si può a piacere partire o dalle condizioni di monogeneità nel campo complesso, o dalla considerazione delle serie di potenze. Però dal punto di vista delle variabili reali e dell'analisi infinitesimale, parrebbe forse più naturale riattaccarsi allo sviluppo in serie che si presenta negli elementi del calcolo: allo sviluppo in serie di Taylor: appunto come faceva il Lagrange, che primo, se pure con coscienza non perfettamente chiara delle limitazioni che imponeva, determinò il concetto di funzione analitica. Ora, se per le funzioni di una variabile serie di Taylor e serie di potenze sono la stessa cosa, per le funzioni di più variabili non è lo stesso: queste sono serie multiple, quelle sono serie di polinomii omogenei ordinate per gradi crescenti: in una serie di potenze si possono riordinare e aggruppare i termini in modo di ottenere una serie di Taylor, ma rimane irresoluta la questione di sapere se in una serie di Taylor convergente in un intorno dell'origine per valori reali delle variabili si possono spezzare i polinomii nei loro singoli addendi, ottenendo una serie multipla di potenze; così da accertare che essa rappresenti nell'intorno dell'origine una funzione regolare analitica. Il Dulac [1] ha risposto affermativamente a tale questione nell'ipotesi che la serie di Taylor converga *uniformemente*; nella breve Nota che segue, mostrerò che si può togliere questa restrizione. Risulterà così in generale che *una serie di polinomii omogenei in ν variabili $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, ordinata per gradi crescenti, convergente in un campo anche arbitrariamente piccolo dello spazio in cui sono coordinate le variabili reali $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, rappresenta una funzione regolare analitica nell'intorno dell'origine.*

Resta aperta la questione se, come nel caso di una sola variabile, tutti i punti interni al detto campo di convergenza della serie, sono punti in cui la funzione è regolare; non mi è riuscito di rispondere esaurientemente a questa domanda; qui dovrò limitarmi a dimostrare che *i punti interni al campo di convergenza in cui eventualmente la funzione non è regolare formano un insieme non denso in nessuna regione parziale del campo*

(1) Dulac, *Sur les séries de Maclaurin à plusieurs variables.* Acta Mathematica, vol. 31 (1907), pp. 96-106. Sullo stesso argomento vedi pure P. Painleve, *Sur le développement des fonctions analytiques,* etc Comptes Rendus, vol. 121 (2° sem. 1899) pag. 92.

medesimo. Mi pare che tale fatto renda assai probabile che anche all'ulteriore domanda qui posta debbasi rispondere affermativamente: stabilendo così una perfetta analogia tra il caso di una e quello di più variabili.

2. Lemma 1 ([1]). — *Sia*

$$f(x) = \sum_0^n \alpha_m x^m \tag{1}$$

un polinomio di grado n in x, che per $-1 < x \leq 1$ *sia sempre in valore assoluto minore di* M: *si ha*

$$|\alpha_m| < (n+1)\, \mathrm{M} \binom{n}{m} 2^m . \tag{2}$$

Si ponga infatti $x = \cos \varphi$: la funzione $f(\cos \varphi) = \sum_0^n \alpha_m \cos^m \varphi$ sarà sempre in valore assoluto inferiore a M per φ reale. E se noi l'esprimiamo per coseni dei multipli interi di φ, noi sappiamo che essa assume la forma $\sum_0^n a_m \cos m\varphi$: ed allora i coefficienti a_m essendo dati dalle formule

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \varphi) \cos m\varphi \, d\varphi ,$$

soddisfanno alla disuguaglianza

$$|a_m| < 2\, \mathrm{M} . \tag{3}$$

Basterà quindi al nostro scopo che cerchiamo di esprimere gli α_m per gli a_m. Ora si ha per una formula di Vieta ([2])

$$\cos m\varphi = \Sigma (-1)^r \frac{m}{r} \binom{m-r-1}{r-1} \cos^{m-2r} \varphi \,.\, 2^{m-2r-1} .$$

Quindi si deduce

$$\alpha_m = 2^{m-1} \sum_{0 < 2r \leq n-m} (-1)^r \frac{m+2r}{r} \binom{m+r-1}{r-1} a_{m+2r} =$$

$$= 2^{m-1} \sum_{0 < 2r \leq n-m} (-1)^r \left[\binom{m+r-1}{m-1} + 2 \binom{m+r-1}{m} \right] a_{m+2r} .$$

E quindi, chiamando j il massimo intero contenuto in $\frac{n-m}{2}$, per notissime formule relative ai coefficienti binomiali e per (3), si ha

$$|\alpha_m| \leq 2^m \mathrm{M} \left[\binom{m+j}{m} + 2 \binom{m+j}{m+1} \right],$$

([1]) Questo lemma ha molta analogia con uno di Dulac, loc. cit., pag. 96.
([2]) Cfr. ad es. Hagen, Synopsis der höheren Mathematik, Bd 1, pag. 109.

dove per $j = 0$ devesi intendere $\binom{m}{m+1} = 0$. Si osservi ora che

$$\binom{m+j}{m} + 2\binom{m+j}{m+1} = \binom{m+j}{m}\frac{m+2j+1}{m+1};$$

e che essendo $m + j \leq m + 2j < n$, evidentemente è $\binom{m+j}{m} < \binom{n}{m}$ e $m + 2j + 1 \leq n + 1$. Seguirà allora dalla precedente disuguaglianza la (2).

Questo lemma si estende agevolmente ai polinomii in più variabili, ottenendo il

Lemma II. — *Sia*

$$(4) \qquad f(x_1 x_2 \dots x_\nu) = \sum_{0 \leq \Sigma m_i \leq n} a_{m_1 m_2 \dots m_\nu} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_\nu^{m_\nu}$$

un polinomio in ν variabili che per $-1 \leq x_i < 1$, *resti sempre in valore assoluto inferiore a* M: *si ha*

$$(5) \qquad |a_{m_1 m_2 \dots m_\nu}| < (n+1)^\nu \, \mathrm{M} \, \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_\nu!\, (n - \Sigma m_i)!} \, 2^{m_1 + m_2 + \dots + m_\nu}.$$

Basta ordinare il polinomio (4) secondo la variabile x_1, ordinare i coefficienti del polinomio in x_1 così ottenuto secondo la variabile x_2, e così via: ed applicare a questi polinomii ripetutamente il lemma I.

Ai due lemmi precedenti aggiungiamo, per rendere più agevole la lettura, il seguente lemma della teoria degli insiemi di punti dovuto a Osgood ([1]).

Lemma III. — *Si abbia una successione* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \dots \mathrm{E}_n, \dots$ *di aggregati di punti di uno spazio di r dimensioni: sia* E *la somma degli* E_n, *e cioè l'aggregato dei punti che appartengono a qualche* E_n. *Se* E *riempie un campo* C *ad r dimensioni, esiste in* C *un campo* C_1 *parziale nel quale è denso almeno un* E_i.

Supponiamo invero che nessun E_n sia denso in un campo parziale di C; E_1 sarà non denso in C, quindi esiste in C un'ipersfera S_1 che non ha nè sul contorno, nè all'interno nessun punto di E_1; a sua volta E_2 non è denso in S_1, quindi esiste in S_1 un'ipersfera S_2 che non ha nè all'interno, nè sul contorno punti di E_2, ecc. Così proseguendo si costruisce all'interno di C una successione di ipersfere $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \dots \mathrm{S}_n, \dots$ contenute l'una nell'altra, e tali che nè all'interno nè sul contorno di S_n vi sono punti di E_n. Esiste un punto P comune a tutte queste ipersfere: esso non appartiene a nessun E_n e quindi neppure a E, il che contradice all'ipotesi che E contenga tutti i punti di C.

([1]) Osgood, Am. Journal of Mathematics, vol. 19 (1897); Math. Annalen, vol. 53 (1900), pag. 462. Osgood enuncia il teorema nell'ipotesi, evidentemente non essenziale, che gli E_i contengano ciascuno il precedente.

3. Ciò posto, si abbia una serie di polinomii omogenei ordinata per gradi crescenti, e supponiamo dapprima che le variabili siano due sole: x e y: sia $\sum_0^\infty{}_n f_n(x\,y) = \sum_0^\infty{}_n \left(\sum_0^n{}_m a_{n-m\,m}\, x^{n-m}\, y^m\right)$ la serie assegnata. Se poniamo $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \operatorname{sen}\theta$ avremo che essa si può anche scrivere $\sum_0^\infty{}_n f_n(\cos\theta\,, \operatorname{sen}\theta)\,\varrho^n$; e per la teoria della serie di potenze, se essa converge in un punto $(x_0\,y_0) \equiv (\varrho_0\,\theta_0)$ converge in tutti i punti $(x\,y)$ per cui è $\theta = \theta_0$ e ϱ è complesso con $\varrho < \varrho_0$. In particolare converge su tutto il segmento $(x_0\,, y_0) \longrightarrow (-x_0\,, -y_0)$ della retta che congiunge $(x_0\,y_0)$ coll'origine: questo fatto si può anche enunciare dicendo che il campo di convergenza di una serie di polinomii omogenei è una *stella con centro l'origine.*

Supponiamo dunque che la serie converga su una curva del piano delle $x\,y$ reali, la quale non sia una retta per l'origine, nè un sistema di tali rette [1]; per l'osservazione testè fatta esisterà un settore γ di un cerchio di centro l'origine e raggio r sufficientemente piccolo, tale che in esso e nel settore simmetrico rispetto all'origine, la serie converga. Concludendo potremo dunque fissare l'ipotesi che la serie converga per $\varrho| < r$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$.

Si prenda arbitrariamente un numero $r_1 < r$, e si indichi con $M(\bar\theta)$ il massimo valore assoluto della somma della serie per $\varrho| < r_1$, $\theta = \bar\theta$; $M(\bar\theta)$ è una funzione finita (non sappiamo se limitata) di $\bar\theta$ per $\theta_0 \leq \bar\theta \leq \theta_1$; e per la teoria delle serie di potenze sarà $|f_n(\cos\bar\theta\,, \operatorname{sen}\bar\theta)| < \dfrac{M(\bar\theta)}{r_1{}^n}$. Ora, indichi i un intero, ed E_i l'insieme dei valori di θ per cui $M(\theta) \leq i$: la somma E degli insiemi E_i è l'intervallo $(\theta_0\,, \theta_1)$, esiste quindi per il lemma III un intervallo $(\theta_2\,, \theta_3)$ di $(\theta_0\,, \theta_1)$ ed un i tale che E_i è denso in $(\theta_2\,, \theta_3)$; cioè esiste in $(\theta_2\,, \theta_3)$ un insieme denso di punti in cui $M(\theta) \leq i$, e quindi

$$f_n(\cos\theta\,, \operatorname{sen}\theta) \leq \frac{i}{r_1{}^n}\,.$$

od anche

$$f_n(\varrho\cos\theta\,, \varrho\operatorname{sen}\theta) \leq i\left(\frac{\varrho}{r_1}\right)^n. \tag{6}$$

Ma f_n è un polinomio in $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, quindi è funzione continua di θ; la disuguaglianza (6) si verificherà quindi in ogni punto dell'intervallo $(\theta_2\,, \theta_3)$.

[1] È essenziale supporre che la curva non sia un sistema di rette per l'origine: poichè, come osserva il Painlevé nella nota citata, è facile costruire una serie di polinomii omogenei convergente su un insieme di raggi per l'origine denso in ogni angolo, e non convergente in nessun intorno dell'origine.

Facciamo una rotazione di assi prendendo due nuove variabili $x'y'$ per modo che la retta $y' = 0$ sia una retta ϖ di anomalia t interna all'angolo (θ_2, θ_3); e anzi supponiamo, che indicando con ϱ e θ' le nuove coordinate polari, sia $-\tau \leq \theta' \leq \tau$ un angolo interno all'angolo (θ_2, θ_3); basterà prendere per τ il minore dei numeri $t - \theta_2$, $\theta_3 - t$. Ogni polinomio $f_n(x\,y)$ diviene un polinomio $\varphi_n(x'y')$ omogeneo ancora nelle variabili $x'y'$ di grado n: $\varphi_n(x'y') = \sum_0^n {}_m\, a'_{n-m\,m}\, x'^{n-m}\, y'^m$; la nuova serie $\sum_0^\infty {}_n\, \varphi_n(x'y')$ convergerà negli stessi punti che la $\sum_0^\infty {}_n\, f_n(x\,y)$; ed infine nell'angolo $-\tau \leq \theta' \leq \tau$ avremo per (6)

$$|\varphi_n(\varrho \cos\theta', \varrho \operatorname{sen}\theta')| < i\left(\frac{\varrho}{r_1}\right)^n .$$

Poniamo $\varrho = \operatorname{cotg}\tau \dfrac{1}{\cos\theta'}$: per $|\theta'| < \tau$, sarà sempre $|\varrho| < \dfrac{1}{\operatorname{sen}\tau}$, e quindi pure

$$|\varphi_n(\varrho\cos\theta', \varrho\operatorname{sen}\theta')| = |\varphi_n(\operatorname{cotg}\tau, \operatorname{cotg}\tau \operatorname{tg}\theta')| < i\left(\frac{1}{r_1 \operatorname{sen}\tau}\right)^n .$$

Ma quando θ' varia tra $-\tau$ e τ, la quantità $z = \operatorname{cotg}\tau \operatorname{tg}\theta'$ varia tra -1 e 1; applicando quindi il lemma I al polinomio di grado n in z

$$\varphi_n(\operatorname{cotg}\tau, z) = \sum_0^n {}_m\, a'_{n-m\,m} \operatorname{cotg}^{n-m}\tau \, . \, z^m ,$$

avremo

$$(7)\qquad \begin{aligned} |a'_{n-m\,m}| &< (n+1)\, i \left(\frac{1}{r_1\operatorname{sen}\tau}\right)^n \binom{n}{m} 2^m \operatorname{tg}^{n-m}\tau = \\ &= (n+1)\, i \binom{n}{m} \left(\frac{2}{r_1\operatorname{sen}\tau}\right)^m \left(\frac{1}{r_1\cos\tau}\right)^{n-m} . \end{aligned}$$

Ne segue che, qualunque siano x' e y', si ha:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \left|\sum_0^n {}_m\, a'_{n-m\,m}\, x'^{n-m}\, y'^m\right| &\leq \sum_0^n {}_m\, |a'_{n-m\,m}\, x'^{n-m}\, y'^m| < \\ &< (n+1)\, i \left[\frac{|x'|}{r_1\cos\tau} + \frac{2|y'|}{r_1\operatorname{sen}\tau}\right]^n . \end{aligned}$$

Quindi la serie assegnata è assolutamente ed uniformemente convergente in ogni campo chiuso interno al campo dei punti di coordinate $x'y'$ *reali* o *complesse*, ma tali che

$$(9)\qquad \frac{|x'|}{r_1\cos\tau} + \frac{2|y'|}{r_1\operatorname{sen}\tau} < 1 .$$

Ora per un noto teorema di Weierstrass una serie di funzioni regolari analitiche uniformemente convergente in un campo complesso ha per somma una funzione analitica regolare nel campo stesso: nel nostro caso, essendo $\sum_0^r {}_n\, \varphi_n(x'y')$ una serie di polinomii uniformemente convergente in (9), vi rappresenta una funzione $\Phi(x', y')$ o $F(x, y)$ regolare analitica di x e y. E siccome il campo (9) contiene un intorno dell'origine, concludiamo intanto col primo degli enunciati del n. 1. Anzi dalla precedente dimostrazione risulta che non è neppure necessario supporre come ivi è detto che la serie di polinomii omogenei converga in un campo del piano reale x, y, ma che *basta fare l'ipotesi che la serie converga nei punti di una curva continua di tale piano che non sia una retta passante per l'origine, nè un sistema di tali rette per concludere che essa rappresenta una funzione regolare analitica nell'intorno dell'origine stessa.*

Per ottenere il secondo degli enunciati del num. 1 osserviamo che il campo (9) sul piano reale dà una losanga che contiene tutti i punti interni del segmento $|x'| < r_1 \cos \iota$ della retta ϖ. Ora, fissata la retta ϖ che si vuole scegliere come asse delle x', si può prendere ι piccolo a piacere; quindi fare $r_1 \cos \iota$ quanto si vuole prossimo ad r_1: possiamo quindi dire che tutti i punti di ϖ per cui $\varrho < r_1$ sono punti in cui $F(xy)$ è regolare analitica. Ricordiamo ancora che nei precedenti ragionamenti r_1 è un numero arbitrario purchè $< r$, e ϖ è una retta arbitraria di anomalia compresa fra θ_2 e θ_3. Risulta che possiamo precisare il campo in cui la $F(xy)$ è analitica regolare col dire che, fissato arbitrariamente entro la stella di convergenza di $\sum_0^r {}_n\, f_n(xy)$ un settore circolare γ: $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, $\varrho < r$, ed un numero $r' < r$, esistono in γ dei settori γ_1 di raggio r' tutti di punti in cui la funzione rappresentata dalla serie è regolare analitica. In particolare dunque *l'aggregato dei raggi, su cui esistono punti che distano dal contorno della stella di convergenza più di un numero ε fissato (anche arbitrariamente piccolo), e nei quali la somma della serie non è regolare analitica, è non denso in nessun angolo.* È chiaro che questo fatto trae seco quello enunciato al n. 1 che l'aggregato dei punti interni alla stella di convergenza, in cui la somma della serie non è funzione regolare analitica, è non denso in nessuna area interna alla stella; anzi impone a tale aggregato una condizione anche più restrittiva.

È chiaro che, tranne qualche lieve cambiamento nelle notazioni, il ragionamento vale anche per il caso delle ν variabili: basta introdurre le coordinate polari relative allo spazio a più dimensioni, ed applicare il lemma II in luogo del lemma I: all'ipotesi fatta che la serie converga su una curva continua che non sia una retta per l'origine (o un sistema di tali rette) occorrerà sostituire l'altra che la serie converga su una $V_{\nu-1}$ regolare dello S_ν in cui $x_1 x_2 \dots x_\nu$ sono variabili reali, che non sia nè un iperpiano per l'origine nè un sistema di tali iperpiani.

4. Al precedente teorema si può dare varie forme, specialmente presentandolo come un teorema della teoria delle serie.

Osserviamo invero che il teorema di Weierstrass su citato ci dice pure che una serie di funzioni analitiche uniformemente convergente in un campo complesso si può derivare termine a termine quante volte si vuole. Applicando alle nostre serie tale teorema si vede subito che i coefficienti dei polinomii sono perfettamente determinati e coincidono coi noti coefficienti della serie di Taylor. Otterremo così:

1°). *Ogni serie di polinomii omogenei ordinata per gradi crescenti in ν variabili, convergente su una ipersuperficie $V_{\nu-1}$ dello S_ν in cui sono coordinate le variabili reali $x_1 . x_2 . \dots x_\nu$ — la quale non sia nè un iperpiano per l'origine nè un sistema di tali iperpiani — è la serie di Taylor di una funzione analitica.*

2°). *Due tali serie non possono avere la stessa somma su una $V_{\nu-1}$ del tipo descritto, senza essere identiche.*

3°). *Ogni tale serie — e quindi ogni serie di Taylor — si può integrare e derivare termine a termine quante volte si vuole in un intorno conveniente dell'origine.*

E infine poichè ogni funzione analitica regolare nell'origine si sviluppa in serie multipla di potenze:

4°). *Ogni tale serie converge uniformemente ed assolutamente in un conveniente intorno dell'origine e continua a godere di tale proprietà se si spezzano i polinomii nei loro singoli termini.*

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XX, serie 5ª, 2º sem. fasc. 10º. Seduta del 19 novembre 1911
e vol. XXI 1º sem. fasc. 1º. Seduta del 7 gennaio 1912

SULLE CONDIZIONI SUFFICIENTI

PER IL MINIMO NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

(GLI INTEGRALI SOTTO FORMA PARAMETRICA)

NOTA

DI

EUGENIO ELIA LEVI

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni* (*Gli integrali in forma parametrica*). Nota III di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nelle Note I e II [1] ho dato una dimostrazione della sufficienza delle condizioni per il minimo degli integrali semplici posti sotto forma non parametrica in cui non faccio uso del concetto di campo. Nella presente Nota ed in un'altra che seguirà tratto della stessa questione per gli integrali posti in forma parametrica; pur mantenendo lo stesso concetto direttivo, si debbono perciò introdurre nei ragionamenti non irrilevanti modificazioni di dettaglio.

Si avrà dunque da trovare quando una curva, che passa per due punti estremi assegnati P_1 e P_2, rende minimo l'integrale

$$(1) \qquad I = \int_{t_1}^{t_2} F(xy\,;x'y')\,dt\,.$$

Supporremo perciò, secondo l'uso, F positivamente omogenea di primo grado rispetto a $x'y'$ e di classe C'''; con $F_1(xy\,;x'y')$, $F_2(xy\,;x'y')$ indicheremo le funzioni che così si indicano ordinariamente e che sono formate rispettivamente, colle derivate seconde e colle seconde e terze di F; infine indicheremo con M il massimo valore assoluto di F e delle sue derivate

[1] Questi Rendiconti, pag. 425 e pag. 466.

dei primi 3 ordini, di F_1 e delle sue derivate prime, di F_2 quando xy resta in un certo campo $\mathfrak{R}$, ed $x'y'$ sono tali che $x'^2 + y'^2 = 1$ [1].

Dimostreremo che, *se la curva* $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ *che riferita all'arco ha le equazioni*

$$(2) \qquad x = \overset{\circ}{x}(s) \quad , \quad y = \overset{\circ}{y}(s) ,$$

è priva di punti multipli, passa per i due punti $P_1 \equiv (x_1 y_1)$, $P_2 \equiv (x_2 y_2)$, *sta in* $\mathfrak{R}$, *è un estremale per l'integrale* (I), *ed infine soddisfa alle condizioni seguenti*:

1°) $F_1(\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y} ; \overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}') \geq \mu > 0$

2°) $\mathcal{E}(\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y} ; \overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}' ; x'y') > 0$ *quando non sia* $1 - \dfrac{\overset{\circ}{x}'x' + \overset{\circ}{y}'y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$

3°) *il punto* $x_1'y_1'$ *coniugato su* $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ *di* $x_1 y_1$ *segue* $x_2 y_2$.

la curva $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ *dà ad* I *il valore minimo rispetto a tutte le curve che passano per* P_1 *e* P_2 *e giacciono in un conveniente intorno di* $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$.

2. Ci occorre anzitutto indicare un modo conveniente di fissare il parametro sulle curve variate di guisa che risulti comodo il confronto dei valori di I per esse e per $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$. Osserveremo anzitutto che dalle ipotesi fatte per $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ segue che la curvatura di $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ è finita: la indicheremo con k e chiameremo $\varkappa$ il suo massimo valore: sarà $\varkappa \leq \dfrac{2M}{\mu}$ [2]. Avremo

$$(3) \qquad \begin{gathered} \overset{\circ}{x}'^2 + \overset{\circ}{y}'^2 = 1 \; ; \; \overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{x}'' + \overset{\circ}{y}'\overset{\circ}{y}'' = 0 \; ; \\ \overset{\circ}{x}'' = -k\overset{\circ}{y}' \; , \; \overset{\circ}{y}'' = k\overset{\circ}{x}' \; ; \; \sqrt{\overset{\circ}{x}''^2 + \overset{\circ}{y}''^2} = k . \end{gathered}$$

Indicheremo con $\overset{\circ}{P}(s)$ il punto $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ di parametro s, e conteremo l'arco a partire P_1: sarà, indicando con σ la lunghezza di $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$, $\overset{\circ}{P}(0) = P_1$, $\overset{\circ}{P}(\sigma) = P_2$.

Alle curve variate $\mathfrak{C}$ imporremo di restare in quella parte $\mathfrak{R}_1$ di $\mathfrak{R}$ che soddisfa alla condizione che per ogni punto P di essa passa una ed una sola normale a $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$: poichè $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ non ha punti multipli per costruire $\mathfrak{R}_1$ basta staccare sulle normali a $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ da entrambe le parti a partire da $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ un segmento $< \dfrac{1}{\varkappa}$. Presa poi una qualunque curva $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{R}_1$ passante per P_1 e

[1] Sono queste le notazioni e le ipotesi di cui fa uso il Bolza nel suo trattato già citato.

[2] Invero l'equazione degli estremali si può scrivere $k = \dfrac{F''_{y'x} - F''_{x'y}}{F_1}$. Cfr. Bolza, loc. cit., pag. 203, formula $(23)_b$.

P_2, chiameremo t l'arco su di essa contato a partire da P_1: e, conforme ad una osservazione già fatta in una Nota precedente, supporremo senz'altro che, scritte le equazioni di $\mathfrak{C}$ nella forma

$$(4) \qquad x = x(t) \quad , \quad y = y(t),$$

queste funzioni siano di classe C''. Indicheremo con $P(t)$ il punto di $\mathfrak{C}$ di parametro t; sarà, indicando con $\mathfrak{T}$ la lunghezza di $\mathfrak{C}$, $P(0) = P_1$, $P(\tau) = P_2$. Dalle ipotesi fatte sopra segue che per ogni punto $P(t)$ di $\mathfrak{C}$ potremo condurre una ed una sola normale a $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$: sia $s(t)$ il valore del parametro s corrispondente a tale normale. Fissato sulle normali a $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ il verso positivo nel modo usuale, indichiamo con $\omega(t)$ il segmento $\overset{\circ}{P}(s(t))\,P(t)$ preso col suo segno: potremo scrivere le equazioni (4) nella forma

$$(5) \qquad \begin{aligned} x &= \overset{\circ}{x}(s(t)) + \omega(t)\, \overset{\circ}{y}{}'(s(t)) \\ y &= \overset{\circ}{y}(s(t)) - \omega(t)\, \overset{\circ}{x}{}'(s(t)) \end{aligned} \qquad (\omega(0) = \omega(\tau) = 0).$$

Avremo allora

$$(6) \qquad \begin{aligned} x' &= \overset{\circ}{x}{}' s' + \omega' \overset{\circ}{y}{}' + \omega \overset{\circ}{y}{}'' s' = \overset{\circ}{x}{}' + \overset{\circ}{x}{}' [(1 + k\omega)\, s' - 1] + \omega' \overset{\circ}{y}{}', \\ y' &= \overset{\circ}{y}{}' s' - \omega' \overset{\circ}{x}{}' - \omega \overset{\circ}{x}{}'' s' = \overset{\circ}{y}{}' + \overset{\circ}{y}{}' [(1 + k\omega)\, s' - 1] - \omega' \overset{\circ}{x}{}'. \end{aligned}$$

E poichè t è l'arco di $\mathfrak{C}$ trarremo

$$(7) \qquad 1 = \omega'^2 + s'^2 (1 + k\omega)^2,$$

onde in particolare

$$(8) \qquad |\omega'| < 1 \quad , \quad |(1 + k\omega)\, s'| < 1 .$$

Indicando con r un'indeterminata, supporremo d'ora in poi $|\omega| \leq r$. Per quanto precede dovrà intanto essere $r < \frac{1}{\varkappa}$. Supporremo per semplicità $r < 1$, $r < \frac{1}{2\varkappa}$: segue intanto allora da (8):

$$(8)^{bis} \qquad |s'| < 2 .$$

Ed il teorema da noi enunciato consisterà nel mostrare che si può prendere r tanto piccolo che le curve (5) per cui $|\omega| \leq r$ diano ad I un valore maggiore di quello di $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$.

3. Prima di dimostrare il nostro teorema occorre ancora trovare una conveniente espressione per la funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass. Serberemo le notazioni del n°. precedente: noteremo inoltre esplicitamente che ove compare una funzione di s si deve immaginare in essa posto $s = s(t)$.

Si osservi che è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}'\,;\,x'y') &= \mathrm{F}(xy\,;\,x'y') - \mathrm{F}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}') - \\
&\quad - (x'-\mathring{x}')\,\mathrm{F}'_{x'}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}') - (y'-\mathring{y}')\,\mathrm{F}'_{y'}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}') = \\
(9) \qquad &= \frac{1}{2}\Big\{\mathrm{F}''_{x'^2}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}')\,(x'-\mathring{x}')^2 + 2\mathrm{F}''_{x'y'}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}')\,(x'-\mathring{x}')\,+ \\
&\qquad + \mathrm{F}''_{y'^2}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}')\,(y'-\mathring{y}')^2\Big\} + \\
&\quad + \frac{1}{3!}\sum_{i+k=3}\binom{i}{3}\mathrm{F}'''_{x'^i y'^k}(xy\,;\,\overline{x}'\overline{y}')\,(x'-\mathring{x}')^i\,(y'-\mathring{y}')^k ,
\end{aligned}
$$

dove è $\overline{x}'=\mathring{x}'+\vartheta(x'-\mathring{x}')$, $\overline{y}'=\mathring{y}'+\vartheta(y'-\mathring{y}')$ con $0<\vartheta<1$: sarà quindi per le nostre ipotesi

$$
(10) \qquad |\mathrm{F}'''_{x'^i y'^k}(xy\,;\,\overline{x}'\overline{y}')| < \frac{2\mathrm{M}}{1+(1+k\omega)\,s'} \ \text{(1)}. \qquad (i+k=3)
$$

Sostituiamo a $x'-\mathring{x}'$, $y'-\mathring{y}'$ i valori risultanti da (6), alle $\mathrm{F}''_{x'^2}$, $\mathrm{F}''_{x'y'}$, $\mathrm{F}''_{y'^2}$ le loro espressioni per F_1: il gruppo dei termini di 2° grado scritto fra parentesi in (9) si riduce a $\mathrm{F}_1(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}')\,\omega'^2$: mentre gli altri termini costituiscono un polinomio di 3° grado in ω', $1-(1+k\omega)\,s'$.

Ricordiamo ora che per (6) e (7) $1-\mathring{x}'x'-\mathring{y}'y'$ tende a 0 allora ed allora soltanto che ω' tende a zero e $(1+k\omega)\,s'$ tende a 1; ricordiamo ancora che (7) si può scrivere

$$
(11) \qquad \omega'^2 = [1-(1+k\omega)\,s'\,]\,[1+(1+k\omega)\,s'\,];
$$

(1) Infatti posto $\nu^2=\overline{x}'^2+\overline{y}'^2$, sarà per (6) e (7) $\nu^2=1-2\vartheta(1-\vartheta)\,(1-(1+k\omega)s')$ onde poichè $\vartheta(1-\vartheta)\leq\frac{1}{4}$,

$$
\nu^2 \geq 1-\frac{1}{2}[1-(1+k\omega)\,s'\,] = \frac{1}{2}[1+(1+k\omega)\,s'\,].
$$

Ora si osservi che, posto $\xi=\frac{\overline{x}'}{\nu}$, $\eta=\frac{\overline{y}'}{\nu}$, abbiamo, poichè F è positivamente omogenea di primo grado rapporto a $x'y'$.

$$
\mathrm{F}'''_{x'^i y'^k}(xy\,;\,\xi\eta) = \nu^2\,\mathrm{F}'''_{x'^i y'^k}(xy\,;\,\overline{x}'\overline{y}'):
$$

ma $\xi^2+\eta^2=1$, quindi

$$
|\mathrm{F}'''_{x'^i y'^k}(xy\,;\,\xi\eta)| < \mathrm{M}\,,
$$

onde

$$
\mathrm{F}'''_{x'^i y'^k}(xy\,;\,\overline{x}'\overline{y}') < \frac{\mathrm{M}}{\nu^2} < \frac{2\mathrm{M}}{1+(1+k\omega)\,s'}\,.
$$

segue allora da (9) che le ipotesi 1° e 2° del nostro teorema si possono enunciare assieme dicendo che esistono due numeri positivi ϱ e μ_1 tali che quando xy dista da $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ meno di ϱ, sia

$$\frac{\mathcal{E}(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}'\,;x'y')}{1-(1+k\omega)\,s'}\geq\mu_1\quad,\quad \mathrm{F}_1(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}')\geq 2\mu_1\,. \tag{12}$$

Supporremo d'ora in poi $r\leq\varrho$.

Dividiamo i punti di $\mathfrak{C}$ in due insiemi χ e χ_1 a seconda che in essi è $s'\geq 0$ oppure $s'<0$: indicheremo con χ e χ_1 anche le misure di χ e χ_1 rispettivamente: sarà $\chi+\chi_1=\tau$.

Dico che si possono trovare delle funzioni λ_3 e λ_4 tali che in $\mathfrak{C}$ sia

$$\mathcal{E}(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}'\,;x'y')=\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{F}_1(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}')+\lambda_3\,\omega'\right]\omega'^2+\lambda_4\,[1-(1+k\omega)\,s'] \tag{13}$$

e che si abbia sempre

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{F}_1(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}')+\lambda_3\,\omega'\geq\frac{\mu_1}{2} \tag{14}$$

(15) $\quad|\lambda_3|\leq \mathrm{L}$, dove L è il massimo dei due numeri $\dfrac{32}{3}\,\mathrm{M}\,,\dfrac{\mathrm{M}^2}{\sqrt{7}\,\mu_1}$

(16) $\quad\lambda_4\geq 0$ in χ, $\quad\lambda_4\geq\dfrac{\mu_1}{2}$ in χ_1.

Porremo perciò ad esempio:

$$\lambda_3=\frac{1}{3!}\sum_{i+k=3}\binom{i}{3}\,\mathrm{F}'''_{x'^iy'^k}(xy\,;\overline{x}'\overline{y}')\left(\frac{x'-\overset{\circ}{x}'}{\omega'}\right)^i\left(\frac{y'-\overset{\circ}{y}'}{\omega'}\right)^k\;,\quad\lambda_4=0 \tag*{(17)$_1$}$$

in χ ossia per $2\geq 1+(1+k\omega)\,s'\geq 1$;

$$\left.\begin{aligned}\lambda_3&=\frac{1}{2\omega'}\,[\mu_1-\mathrm{F}_1(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}')],\\ \lambda_4&=\frac{\mathcal{E}}{1-(1+k\omega)\,s'}-\frac{\mu_1}{2}\,(1+(1+k\omega)\,s')\end{aligned}\right. \tag*{(17)$_2$}$$

per $1>1+(1+k\omega)\,s'\geq\dfrac{\mu_1}{2\mathrm{M}}$ [1]; ed infine per $\dfrac{\mu_1}{2\mathrm{M}}\geq 1+(1+k\omega)\,s'\geq 0$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_3&=\sqrt{\frac{1+(1+k\omega)\,s'}{1-(1+k\omega)\,s'}}\,\frac{\mathrm{M}}{\mu_1}\,[\mathrm{M}-\mathrm{F}_1(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}')]\\ \lambda_4&=\frac{\mathcal{E}}{1-(1+k\omega)\,s'}-\left\{\frac{\mathrm{M}}{\mu_1}\,[1+(1+k\omega)\,s']\,[\mathrm{M}-\mathrm{F}_1(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}')]+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{2}\,\mathrm{F}_1(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}')\right\}(1+(1+k\omega)\,s').\end{aligned}\right. \tag*{(17)$_3$}$$

[1] Si rammenti che, essendo per ipotesi $\mathrm{F}_1<\mathrm{M}$, da (12) segue $\mathrm{M}\geq 2\mu_1$ e quindi a maggior ragione pure $\dfrac{\mu_1}{2\mathrm{M}}<1$.

Si verifica subito, ricordando (11) che, con tali posizioni (13) risulta sempre identica. Per verificare la (14) si osservi che nei tre casi si ha rispettivamente

$$(14)_1 \qquad \frac{1}{2}\,F_1 + \lambda_3\omega' = \frac{\mathcal{E}}{\omega'^2} = \frac{\mathcal{E}}{1-(1+k\omega)s'}\cdot\frac{1}{1+(1+k\omega)s'} \geq \frac{\mu_1}{2}\,.$$

$$(14)_2 \qquad \frac{1}{2}\,F_1 + \lambda_3\omega' = \frac{\mu_1}{2}\,,$$

$$(14)_3 \qquad \frac{1}{2}\,F_1 + \lambda_3\omega' = [1+(1+k\omega)s']\,\frac{(M-F_1)\,M}{\mu_1} + \frac{1}{2}\,F_1 \geq \frac{1}{2}\,F_1 \geq \frac{\mu_1}{2}\,.$$

Più complesso è verificare la (15). Intanto in χ essendo $1+(1+k\omega')s'\geq 1$ la (10) dà che ivi è $|F'''_{x'^i y'^k}| < 2M$, mentre per (6), (8) e (11) si ha

$$\left|\frac{x'-\overset{\circ}{x}{}'}{\omega'}\right| = \left|\overset{\circ}{y}{}' - \overset{\circ}{x}{}'\,\frac{1-(1+k\omega)s'}{\omega'^2}\,\omega'\right| = \left|\overset{\circ}{y}{}' - \overset{\circ}{x}{}'\omega'\,\frac{1}{1+(1+k\omega)s'}\right| \leq 2$$

e similmente $\left|\dfrac{y'-\overset{\circ}{y}{}'}{\omega'}\right| \leq 2$ onde da $(17)_1$ segue che in χ è

$$(15)_1 \qquad |\lambda_3| < \frac{32}{3}\,M\,.$$

Da $(17)_2$ essendo allora $1 > 1+(1+k\omega)s' \geq \dfrac{\mu_1}{2M}$ e quindi per (11)

$$|\omega'| = \sqrt{[1+(1+k\omega)s'][(2-\{1+(1+k\omega)s'\}]} \geq \frac{\sqrt{(4M-\mu_1)\,\mu_1}}{2M}\,,$$

segue subito

$$(15)_2 \qquad |\lambda_3| < \frac{M^2}{\sqrt{(4M-\mu_1)\,\mu_1}} < \frac{M^2}{\sqrt{7\mu_1^2}} = \frac{M^2}{\sqrt{7}\,\mu_1}\,.$$

Infine da $(17)_3$ si ha, essendo allora $1-(1+k\omega)s' \geq \dfrac{4M-\mu_1}{2M}$

$$(15)_3 \qquad |\lambda_3| < \sqrt{\frac{\mu_1}{4M-\mu_1}}\,\frac{M^2}{\mu_1} \leq \frac{1}{\sqrt{7}}\,\frac{M^2}{\mu_1}\,.$$

Infine per quanto riguarda la (16), essa vale evidentemente in χ. Da $(17)_2$ e (12) segue pure la (16) per il campo $1 > 1+(1+k\omega)s' \geq \dfrac{\mu_1}{2M}$. Ed infine da $(17)_3$ segue

$$(16)_3 \qquad \lambda_4 > \mu_1 - \left[\frac{M-2\mu_1}{2} - \frac{M}{2}\right]\frac{\mu_1}{2M} > \frac{\mu_1}{2}$$

come volevasi mostrare.

Si noti infine che, poichè le derivate prime di $F_1(xy; \overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}')$ sono minori di M in valore assoluto, ed è $|x - \overset{\circ}{x}| < \omega$, $|y - \overset{\circ}{y}| < \omega$, si può ancora scrivere $\frac{1}{2} F_1(xy; \overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}') = \frac{1}{2} \overset{\circ}{F}_1 + \omega\lambda_5$ con

$$(18) \qquad |\lambda_5| < M.$$

Ne segue che al posto di (13) si può ancora scrivere

$$(19) \qquad \mathcal{E} = \left(\frac{1}{2}\overset{\circ}{F}_1 + \lambda_5\omega + \lambda_3\omega'\right)\omega'^2 + \lambda_4(1 - (1 + k\omega)s')$$

dove valgono le (15), (16), (18) e

$$(19) \qquad \frac{1}{2}\overset{\circ}{F}_1 + \lambda_5\omega + \lambda_3\omega' \geq \frac{\mu_1}{2}.$$

Nella prossima Nota utilizzeremo questi risultati per dimostrare in modo assai facile il teorema enunciato al n. 1.

Matematica. — *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni. (Gli integrali sotto forma parametrica).* Nota IV di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

4. Per dimostrare il teorema enunciato al num. 1 della Nota III (¹) cominciamo col calcolare la variazione totale di I quando si passa da $\mathring{\mathfrak{C}}$ a $\mathfrak{C}$.

Indichiamo con $\mathring{F} . \mathring{F}_1 \ldots$ i valori di $F . F_1 \ldots$ quando per x , y , x' , y' si ponga $\mathring{x} , \mathring{y} , \mathring{x}' , \mathring{y}'$: saranno queste funzioni di s. Avremo:

$$
\begin{aligned}
\Delta I &= \int_0^{\tau} F(xy\,;x'y')\,dt - \int_0^{\sigma} \mathring{F}\,ds = \\
&= \int_0^{\tau} [F(xy\,;x'y') - \mathring{F}s']\,dt = \;(^2) \\
(21)\qquad &= \int_0^{\tau} \mathcal{E}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}'\,;x'y')\,dt + \int_0^{\tau} [F(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}') - \mathring{F}]\,s'dt + \\
&\quad + \int_0^{\tau} [(x' - \mathring{x}'s')\,F'_{x'}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}') + (y' - \mathring{y}'s')\,F'_{y'}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')]\,dt
\end{aligned}
$$

poichè per le note proprietà di omogeneità di F è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}'\,;x'y') &= x'[F'_{x'}(xy\,;x'y') - F'_{x'}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')] + \\
&\quad + y'[F'_{y'}(xy\,;x'y') - F'_{y'}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')] = \\
&= F(xy\,;x'y') - F(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')s' - (x' - \mathring{x}'s')\,F'_{x'}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}') - \\
&\quad - (y' - \mathring{y}'s')\,F'_{y'}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}') .
\end{aligned}
$$

Sviluppiamo mediante la formula di Taylor la differenza contenuta nel secondo integrale dell'ultimo membro di (21): da (5) si avrà

$$
\begin{aligned}
(22)\qquad \int_0^{\tau} [F(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}') - \mathring{F}]\,s'dt &= \int_0^{\tau} \omega(\mathring{F}'_x\mathring{y}' - \mathring{F}'_y\mathring{x}')\,s'dt + \\
&+ \frac{1}{2!}\int_0^{\tau} \omega^2 [\mathring{F}''_{x^2}\mathring{y}'^2 - 2\,\mathring{F}''_{xy}\mathring{x}'\mathring{y}' + \mathring{F}''_{y^2}\mathring{x}'^2]\,s'dt + \frac{1}{3!}\int_0^{\tau} \lambda'\omega^3\,s'dt
\end{aligned}
$$

dove λ' è un polinomio in $\mathring{x}'\mathring{y}'$, i cui coefficienti sono valori delle derivate

(¹) Questi Rendiconti, pag. 541. In questa Nota per maggiore comodità la numerazione dei n. e delle formule continua quella della Nota precedente.

(²) In questo e negli integrali che seguono quando la variabile di integrazione è t si sottintende che nelle funzioni di s si pone per s la $s(t)$ definita nel n. 2. Si noti ancora che generalmente la formula del cambiamento delle variabili negli integrali si enuncia nell'ipotesi che il cambiamento di variabile sia invertibile: però almeno per scrivere l'uguaglianza che qui ci bisogna $\int_0^{\tau} \mathring{F}(s)\,ds = \int_0^{\tau} \mathring{F}(s(t))\,s'dt$, tale ipotesi non è necessaria. cfr. ad es. Baire, *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, vol. I, pag. 82.

terze di F calcolati per i valori $\bar{x}, \bar{y}, \overset{\circ}{x}', \overset{\circ}{y}'$, dove $\bar{x}, \bar{y}$ rappresentano convenienti valori intermedii tra $\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}$ e x, y: sarà dunque $|\lambda'| < 8\mathrm{M}$. Ma $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ è un estremale: quindi $\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_x s' = \frac{d}{dt} \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_{x'}$; $\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_y s' = \frac{d}{dt} \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_{y'}$: onde

$$\int_0^\tau \omega [\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_x \overset{\circ}{y}{}' - \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_y \overset{\circ}{x}{}'] s' dt = \int_0^\tau \omega \left[\frac{d\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_{x'}}{dt} \overset{\circ}{y}{}' - \frac{d\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_{y'}}{dt} \overset{\circ}{x}{}' \right] dt =$$

$$= - \int_0^\tau \{ \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_{x'} (\omega' \overset{\circ}{y}{}' + \omega \overset{\circ}{y}{}'' s') - \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_{y'} (\omega' \overset{\circ}{x}{}' + \omega \overset{\circ}{x}{}'' s') \} \, dt \, .$$

Per (6) questo integrale coincide coll'ultimo integrale di (21), colla sola differenza che in $\mathrm{F}'_{x'}, \mathrm{F}'_{y'}$ a xy sono sostituiti $\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}$. Segue che

$$\int_0^\tau \omega [\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_x \overset{\circ}{y}{}' - \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_y \overset{\circ}{x}{}'] s' dt +$$

$$+ \int_0^\tau \{ (x' - \overset{\circ}{x}{}' s') \mathrm{F}'_{x'} (xy \, ; \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}') + (y' - \overset{\circ}{x}{}' s') \mathrm{F}'_{y'} (xy \, ; \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}') \} \, dt =$$

$$= \int_0^\tau \{ (\omega' \overset{\circ}{y}{}' + \omega \overset{\circ}{y}{}'' s') (\mathrm{F}'_{x'} (xy \, ; \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}') - \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_{x'}) -$$

$$- (\omega' \overset{\circ}{x}{}' + \omega \overset{\circ}{x}{}'' s') (\mathrm{F}'_{y'} (xy \, ; \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}') - \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}'_{y'}) \} \, dt =$$

$$= \int_0^\tau \omega\omega' [\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{x'x} \overset{\circ}{y}{}'^2 - (\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{x'y} + \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{y'x}) \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}' + \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{y'y} \overset{\circ}{x}{}'^2] \, dt +$$

$$+ \int_0^\tau \omega^2 [\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{x'x} \overset{\circ}{y}{}' \overset{\circ}{y}{}'' - \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{x'y} \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}'' - \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{xy'} \overset{\circ}{x}{}'' \overset{\circ}{y}{}' + \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{yy'} \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{x}{}''] \, s' dt +$$

$$+ \frac{1}{2!} \int_0^\tau [\omega' \omega^2 \lambda'' + \omega^3 k s' \lambda'''] \, dt \, ,$$

dove λ'' e λ''' sono espressioni analoghe a λ', e cioè polinomii di 3° grado in $\overset{\circ}{x}{}'\overset{\circ}{y}{}'$, per cui si verifica ancora che $|\lambda'| < 8\,\mathrm{M}$, $|\lambda''| < 8\,\mathrm{M}$. Integriamo per parti il primo integrale dell'ultimo membro di questa relazione e ricordiamo (22), avremo subito:

$$\int_0^\tau (\mathrm{F}(xy \, ; \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}') - \overset{\circ}{\mathrm{F}}) \, s' dt +$$

$$+ \int_0^\tau \{ (x' - \overset{\circ}{x}{}' s') \mathrm{F}'_{x'} (xy \, ; \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}') + (y' - \overset{\circ}{y}{}' s') \mathrm{F}'_{y'} (xy \, ; \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}') \} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\tau \omega^2 \left\{ \left(\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{x^2} - \frac{d\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{x'x}}{ds} \right) \overset{\circ}{y}{}'^2 - \left(2\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{xy} - \frac{d(\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{x'y} + \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{y'x})}{ds} \right) \overset{\circ}{x}{}' \overset{\circ}{y}{}' + \right.$$

$$\left. + \left(\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{y^2} - \frac{d\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{y'x}}{ds} \right) \overset{\circ}{x}{}'^2 - \left(\overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{x'y} - \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}''_{y'x} \right) k \right\} s' dt +$$

$$+ \frac{1}{3!} \int_0^\tau \omega^2 [3\omega' \lambda'' + s' \omega (\lambda' + 3\lambda''' k)] \, dt.$$

Rammentiamo il valore di F_2 [1] e le limitazioni sopra ottenute per $\lambda', \lambda'', \lambda'''$: otterremo subito, sostituendo in (21)

$$\Delta I = \int_0^\tau \mathcal{E}(xy\,;\overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}'\,;x'y')\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \omega^2\,\overset{\circ}{F}_2\,s'dt + \frac{1}{3!}\int_0^\tau \omega^2(\lambda_1\omega + \lambda_2\omega')\,dt,$$

dove $\lambda_1 = s'(\lambda' + 3\lambda'''k)$, $\lambda_2 = 3\lambda''$ sono funzioni di t tali che

$$|\lambda_1| < 16M\,(1 + 3\varkappa)\ ,\ |\lambda_2| < 24M\,. \tag{23}$$

Sostituendo nella formula precedente la (19), si ha

$$\Delta I = \int_0^\tau \Big\{ \frac{1}{2}(\overset{\circ}{F}_1\omega'^2 + \overset{\circ}{F}_2\omega^2 s') + (\lambda_5\omega + \lambda_3\omega')\,\omega'^2 + \\ + \frac{1}{3!}(\lambda_1\omega + \lambda_2\omega')\,\omega^2 + \lambda_4(1 - (1 + k\omega)\,s')\Big\}\,dt\,.$$

Essendo λ_3 e λ_4 discontinue gli integrali si intenderanno qui nel senso di Lebesgue. Inoltre essendo $\lambda_4 = 0$ in χ, l'integrale relativo all'ultimo termine potrebbe estendersi a χ_1 soltanto.

5. Ciò posto si introduca l'ipotesi 3ª: e sia $u(s)$ una soluzione di

$$\frac{d}{ds}(\overset{\circ}{F}_1\,u') - \overset{\circ}{F}_2\,u = 0 \tag{24}$$

finita, di classe C'' e $\neq 0$ in $(0\,,\sigma)$. Supponiamo precisamente

$$0 < m_1 \leq u \leq m_2 \qquad |u'| \leq m_3\,. \tag{25}$$

Poniamo

$$\omega(t) = p(t)\,u(s(t))\,; \tag{26}$$

$p(t)$ si annullerà per $t = 0$ e $t = \tau$. Sarà inoltre per (8), $(8)^{bis}$ e (25), e ricordando che si suppone $|\omega| < r$ con $r < 1$,

$$|p| < \frac{r}{m_1}\ ,\quad |p'| = \left|\frac{\omega' - pu's'}{u}\right| < \frac{m_1 + 2m_3}{m_1^2}\,. \tag{27}$$

Inoltre ricordando che in χ è $s' > 0$, sarà per (11)

$$\begin{aligned} \int_0^t p'^2 u^2\,dt \geq \int_\chi p'^2\,u^2\,dt &= \int_\chi (\omega'^2 - p^2u'^2s'^2 - 2pp'uu's')\,dt = \\ &= \int_\chi [(1+(1+k\omega)s')(1-(1+k\omega)s') - (p^2u'^2s'+2pp'uu')s']\,dt \geq \\ &\geq \int_\chi [1 - s'(1 + k\omega + p^2u'^2s' + 2pp'uu')]\,dt \geq \\ &\geq \int_\chi [1 - s'(1 + Hr)]\,dt = \chi - (1 + Hr)\int_\chi s'dt \end{aligned} \tag{28}$$

[1] Cfr. ad es. Kneser Lehrbuch der Variationsrechnung, pag. 92.

dove per $(8)^{bis}$ e (26) si pone

$$H = \varkappa + 2\frac{m_3^2}{m_1^2} + 2\frac{m_1 + 2m_2}{m_1^2}m_3 :$$

il numero H dipende quindi da $\varkappa, m_1, m_2, m_3$ soltanto.

Trasformiamo ancora d'altra parte l'espressione ΔI mediante la posizione (26): per essa e per (24) avremo

$$\int_0^\tau \overset{0}{F}_2 \omega^2 s' dt = \int_0^\tau p^2 u \frac{d}{dt}(\overset{0}{F}_1 u')\, dt = -\int_0^\tau \overset{0}{F}_1 u' \frac{d}{dt}(p^2 u)\, dt$$

onde

$$\text{(29)} \quad \int_0^\tau (\overset{0}{F}_1 \omega'^2 + \overset{0}{F}_2 \omega^2 s')\, dt = \int_0^\tau \overset{0}{F}_1 p'^2 u^2\, dt + \\ + \int_0^\tau \overset{0}{F}_1 p u'(p u' s' + 2p'u)(s' - 1)\, dt .$$

Osserviamo ancora che si può scrivere

$$\text{(30)} \qquad \overset{0}{F}_1(1 - s') = \lambda_6 \omega' + \lambda_7 \omega + \lambda_8(1 - (1 + k\omega)s')$$

dove

$$\text{(31)} \qquad \begin{array}{l} |\lambda_6| < M \quad , \quad |\lambda_7| < 2M\varkappa , \\ \lambda_8 = 0 \quad \text{in } \chi \quad , \quad |\lambda_8| < M \quad \text{in } \chi_1 . \end{array}$$

Basta porre infatti

$$\lambda_6 = \overset{0}{F}_1 \frac{1 - (1 + k\omega)s'}{\omega'} = \overset{0}{F}_1 \frac{\omega'}{1 + (1 + k\omega)s'} \;,\; \lambda_7 = \overset{0}{F}_1 ks' \;,\; \lambda_8 = 0 \text{ in } \chi$$

$$\lambda_6 = 0 , \qquad\qquad \lambda_7 = \overset{0}{F}_1 ks' \;,\; \lambda_8 = \overset{0}{F}_1 \text{ in } \chi_1 .$$

Sostituendo (29) e (30) nell'espressione trovata di ΔI, avremo

$$\text{(32)} \quad \begin{aligned} \Delta I = &\int_0^\tau \left[\frac{1}{2}\overset{0}{F}_1 + \lambda_5 \omega + \lambda_3 \omega'\right] p'^2 u^2\, dt + \\ &+ \int_0^\tau \left\{ \frac{1}{3!}(\lambda_1 \omega + \lambda_2 \omega')\omega^2 + \left[\left(\lambda_5 s' - \frac{1}{2}\lambda_7\right)\omega + \right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. + \left(\lambda_3 s' - \frac{1}{2}\lambda_6\right)\omega'\right] pu'[pu's' + 2p'u] \right\} dt + \\ &+ \int_{\chi_1} \left[\lambda_4 - \frac{1}{2}\lambda_8\, pu'(pu's' + 2p'u)\right](1 - (1 + k\omega)s')\, dt = \\ &= J_1 + J_2 + J_3 . \end{aligned}$$

Valutiamo questi 3 integrali. Per (20) si ha

$$J_1 \geq \frac{\mu_1}{2} \int_0^\tau p'^2 u^2 \, dt \, ,$$

onde per (25) e (28) sarà in particolare

$$(33)_1 \qquad J_1 \geq \frac{\mu_1}{2} H_1 \int_0^\tau p'^2 \, dt$$

$$(33)_2 \qquad J_1 \geq \frac{\mu_1}{2} \chi - \frac{\mu_1}{2} (1 + Hr) \int_\chi s' dt \geq \frac{\mu_1}{2} \chi - \frac{\mu_1}{2} \int_\chi s' dt - H_2 r \chi \, ,$$

$H_1 = m_1^2$, $H_2 = 2H$ essendo costanti positive indipendenti da r e τ e dipendenti solo da $M, \mu_1, \varkappa, m_1, m_2, m_3$. L'integrale J_2 è la somma di tanti integrali, i cui integrandi contengono un fattore limitato, in virtù delle disuguaglianze (15), (18), (23), (31), in funzione di $M, \mu_1, \varkappa, m_1, m_2, m_3$ soltanto ed un fattore di uno dei tipi p^3, $p^2 p'$, pp'^2. Ma p annullandosi in 0 e τ è

$$\int_0^\tau p^2 \, dt \leq \frac{\tau^2}{\pi^2} \int_0^\tau p'^2 \, d\tau \qquad \int_0^\tau |pp'| \, d\tau \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau^2}{\pi^2}\right) \int_0^\tau p'^2 \, dt ;$$

onde per J_2 sarà

$$(34)_1 \qquad |J_2| \leq (H_3 \tau^2 + H_4) \, r \int_0^\tau p'^2 \, d\tau ;$$

H_3, H_4 essendo costanti del solito tipo. Del resto per (27) si vede direttamente che si ha pure

$$(34)_2 \qquad |J_2| < H_5 \, r\tau \, ,$$

H_5 essendo del solito tipo. Infine osservando che valgono ancora le (16), (31) sarà

$$J_3 \geq \left(\frac{\mu_1}{2} - H_6 r\right) \int_{\chi_1} [1 - (1 + k\omega) s'] \, dt ;$$

onde se $r < \frac{\mu_1}{2H_6}$, sarà

$$(35)_1 \qquad J_3 > 0 \, ,$$

e più precisamente in χ_1 avendosi $-2 \leq s' < 0$, sarà

$$(35)_2 \qquad J_3 \geq \left(\frac{\mu_1}{2} - H_6 r\right) \left[\chi_1 - (1 + \varkappa r) \int_{\chi_1} s' dt \right] \geq$$

$$\geq \frac{\mu_1}{2} \left(\chi_1 - \int_{\chi_1} s' dt\right) - H_7 r \chi_1 ;$$

H_6, H_7, essendo costanti del solito tipo.

Ciò posto, distinguiamo due casi secondo che $\tau \leq 2\sigma$ o $\tau > 2\sigma$.

1° Caso: $\tau \leq 2\sigma$. Per $(33)_1$, $(34)_1$, $(35)_1$ si avrà:

$$(36)_1 \qquad \Delta I > \left[\frac{H_1 \mu_1}{2} - (4\sigma^2 H_3 + H_4) r\right] \int_0^\tau p'^2 d\tau$$

onde basta imporre ancora ad r di essere $< \dfrac{H_1 \mu_1}{2(4\sigma^2 H_3 + H_4)}$ perchè sia $\Delta I > 0$.

2° Caso: $\tau > 2\sigma$. Si applichino le $(33)_2$, $(34)_2$, $(35)_2$ e si osservi che $\int_\chi s' dt + \int_{\chi_1} s' dt = \int_0^\tau s' dt = \sigma$, e che $\chi + \chi_1 = \tau$: si avrà

$$(36)_2 \qquad \Delta I \geq \frac{\mu_1}{2}(\tau - \sigma) - (H_2 \chi + H_7 \chi_1 + H_5 \tau) r \geq$$

$$\geq \left[\frac{\mu_1}{4} - (H_2 + H_7 + H_5) r\right] \tau ,$$

onde basta prendere $r < \dfrac{\mu_1}{4(H_2 + H_7 + H_5)}$ perchè sia $\Delta I > 0$.

Riassumendo, basterà quindi supporre che r sia minore del più piccolo dei numeri 1, $\dfrac{1}{2\varkappa} H_1$, $\dfrac{\mu_1}{2H_6}$, $\dfrac{\mu_1}{2(4\sigma^2 H_3 + H_4)}$, $\dfrac{\mu_1}{4(H_2 + H_7 + H_5)}$, perchè $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ dia il minimo rispetto a tutte le curve passanti per P_1 e P_2 per cui $|\omega| < r$.

c. d. d.

Osservazione. — È chiaro anche qui come nella Nota seconda che le formule $(36)_1$, $(36)_2$ contengono non solo il teorema da noi enunciato, ma anche il teorema di Osgood.

Errata corrige alla Nota I:

pag. 427 riga terza dal basso	$-\eta' f'_y(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}')$	leggi	$-\eta' f'_{y'}(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}')$
pag. 431 ultima riga della Nota	$\Delta I \leq 0$	»	$\Delta I \geq 0$.

Offerto dall' Autore.

ESTRATTO

DAGLI *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.*

Sopra un teorema di esistenza per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

(*Di* Eugenio Elia Levi, *a Genova.*)

(*Continuazione e fine, vedi Tomo XVIII, Serie III pag. 287 e seqq.*)

PARTE SECONDA

§ IV.

1. *Richiamo della classificazione delle equazioni paraboliche.* In quest ultimo paragrafo mi propongo di trattare brevemente il caso delle equazioni

$$F(x\, y\, z\, p\, q\, r\, s\, t) = 0 \tag{1}$$

le quali hanno le caratteristiche coincidenti, o come si dice, il caso delle equazioni paraboliche.

È noto (*) che le caratteristiche doppie di un'equazione di ordine n, si distinguono in due (**) grandi classi: le caratteristiche della prima classe sono curve di elementi tali che non esiste più alcuna arbitrarietà per i valori delle derivate dei varii ordini di una soluzione z nei punti della caratteristica medesima; le caratteristiche della seconda classe invece sono di na-

(*) Vedi la mia Memoria già citata: *Caratteristiche multiple e problema di Cauchy.* Annali di Matematica, Tomo XVI, Serie 3.ª, pag. 161-202.

(**) Almeno quando non si consideri il caso, che può dar luogo a nuovi tipi di caratteristiche doppie, che l'equazione delle caratteristiche abbia radici generalmente semplici, le quali per sistemi particolari di valori delle coordinate dell'elemento vengono a coincidere. Cfr. la Memoria sopra citata.

tura assai più simile a quella delle caratteristiche semplici, poichè, fissata una caratteristica arbitraria, le funzioni che danno i valori delle derivate di ordine superiore di una soluzione che la contenga nei punti della caratteristica dipendono ancora da parametri arbitrarii il cui numero cresce di due unità ogni volta che cresce di un'unità l'ordine delle derivate che si considera (*).

Nel caso delle equazioni di secondo ordine paraboliche si hanno corrispondentemente due classi di equazioni: le equazioni generali le quali posseggono caratteristiche della prima classe: tipica fra queste è l'equazione della propagazione del calore

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

e le equazioni che posseggono invece caratteristiche della seconda classe, le quali diremo equazioni di Goursat - von Weber perchè la loro speciale natura fu appunto scoperta e studiata da questi autori nelle Memorie già citate nell'introduzione.

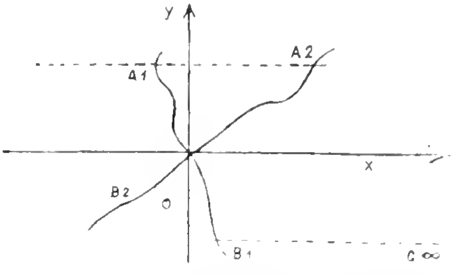
2. *Le equazioni paraboliche generali.* Riguardo alle equazioni della prima classe non posso dare che assai scarsi risultati, ed essenzialmente negativi. Riferiamoci senz'altro all'equazione (2). È noto che una soluzione di (2) se ammette in un certo campo le derivate di primo ordine finite e continue, ammette le derivate di ordine quanto si vuole elevato, ed è funzione analitica regolare di x in ogni punto appartenente al campo medesimo. E che su queste proprietà si fonda la dimostrazione che il problema di Cauchy non ammette in generale soluzione dal punto di vista delle funzioni di variabili reali (**).

Affatto analogamente questa proprietà delle soluzioni di (2) permette di dimostrare che il problema di trovare una funzione avente le derivate prime finite e continue che soddisfaccia a (2) e che prenda assegnati valori su due curve γ_1 e γ_2 che si tagliano in un punto O *in generale non ammette soluzione dal punto di vista delle funzioni di variabili reali.* Supponiamo invero per maggior comodo che O sia l'origine e che i tratti $A_1 O$, $A_2 O$ di γ_1 e γ_2 giacciano nel semipiano delle y positive, i tratti $O B_1$ ed $O B_2$ nel semipiano

(*) Altre analogie tra le caratteristiche della seconda classe e le caratteristiche semplici ho rilevate nella Memoria citata e altre compariranno da quanto segue.

(**) Vedi Holmgren, *Om Cauchy's problem vid de lineära, etc.* (Archiv för Matematik, Astronomy och Physik, Stockholm, Vol. II) e la mia Nota: *Sul problema di Cauchy* (Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 1909, Vol. XVI, pag. 105-112).

delle y negative. Siano A_1 ed A_2 su una stessa parallela all'asse delle x; nel triangolo curvilineo limitato dalle curve $O A_1$, $O A_2$ e dalla caratteristica $A_1 A_2$ esiste (*) una ed una sola soluzione z_1 di (2) la quale su $O A_1$ ed $O A_2$ prende assegnati valori. Per vedere quindi se il problema proposto è risolubile basterà vedere se la detta soluzione z_1 si può prolungare al di là delle curve $O A_1$ ed $O A_2$ continuando ad avere le derivate prime finite e continue. Per la proprietà generale rammentata sopra delle soluzioni di (2), ciò non potrà certo accadere se i valori assegnati su $O A_1$ ed $O A_2$ non ammettono tutte le derivate: onde segue l'asserto (**).



Ma se ci mettiamo dal punto di vista delle funzioni analitiche, se cioè supponiamo γ_1 e γ_2 analitiche e che si cerchi una soluzione di (2) regolare analitica in O la quale su γ_1 e γ_2 si riduca ad assegnate funzioni analitiche, il ragionamento precedente non serve più nè ad escludere nè ad affermare

---

(*) Vedi la mia Memoria: *Sull'equazione del calore* (Annali di Matematica. Vol. XIV della serie 3.ª, pag. 187 e ss.).

(**) Così resta escluso che il problema possa avere senso in quanto immediata generalizzazione di quello trattato nella Parte Prima per le equazioni iperboliche. Potrebbero tuttavia essere poste domande analoghe. Ad es.: cosa avverrebbe se si chiedesse che la soluzione esista in tutto un intorno di O, ma non si chiedesse che le derivate prime di essa siano continue anche nei punti di γ_1 e γ_2? Tuttavia è facile vedere che, anche posto così, il problema perde ogni interesse. Invero se anche esso fosse risolubile e z fosse una sua soluzione, certo la soluzione non sarebbe più unica. Infatti si conduca per B_1 la caratteristica $B_1 C_\infty$ e si costruisca la funzione ζ nulla ovunque in un intorno di O tranne che nel campo limitato da $A_2 O$, $O B_1$ e $B_1 C_\infty$, e che in questo campo è definita dalle condizioni di essere soluzione di (2), di annullarsi su $A_2 O$ ed $O B_1$, e di prendere valori arbitrariamente assegnati su $B_1 C_\infty$: tale funzione esiste per i risultati della Memoria citata nella nota precedente: $z + \zeta$ è allora un'altra soluzione del problema propostoci sopra.

Similmente si potrebbe pensare di porre il problema nel modo accennato al n. 2 del § III per le equazioni iperboliche: e cioè nel cercare una soluzione di (2) che prende valori assegnati su γ_1 e γ_2 ed esista in uno solo degli angoli $A_1 O A_2$, $A_2 O B_1$, $B_1 O B_2$, $B_2 O A_1$. Sempre in virtù della Memoria citata risulta che il problema ammette una ed una sola soluzione per il caso dell'angolo $A_1 O A_2$; ne ammette infinite per gli angoli $A_2 O B_1$, $B_2 O A_1$. Non so invece se è risolubile o no per l'angolo $B_2 O A_1$; ma ritengo che in generale la soluzione non esiste se si chiede che la soluzione sia ancora continua e derivabile in O, o in altri termini che in generale una tale soluzione abbia in O qualche singolarità.

la risolubilità del problema. Esso tuttavia non è certo risolubile in generale se γ_1 e γ_2 sono tangenti tra loro in O oppure se una almeno di esse tocca in O l'asse delle x (*); ma, esclusi questi casi banali di impossibilità, non mi è riuscito di decidere se è ancora vero oppure no il teorema di esistenza: se è lecito esprimere una presunzione dirò che io credo che il problema sia da questo punto di vista sempre risolubile fuori che nei due casi accennati (**).

3. *Le equazioni della classe di* Goursat - von Weber. *Loro proprietà.* Per un'equazione della classe di Goursat - von Weber daremo risultati assai più precisi: in quanto che noi dimostreremo che, *assegnate due curve nello spazio le quali si incontrino in un punto O, esiste una ed una sola superficie soluzione di essa la quale passi per delle due curve, purchè non avvenga che una delle curve sia tangente alla direzione della caratteristica cui appartiene l'elemento di secondo ordine della superficie da costruirsi nel punto O* (e che per quanto si notò già al n. 1 del § II è da queste condizioni iniziali pienamente determinato).

Ci occorrerà anzitutto specificare quali sono le equazioni della classe di Goursat - von Weber; ma non ci conviene ricorrere alla forma esplicita speciale che detti autori hanno loro assegnata perchè troppo complessa: più opportuno ci pare descriverne le proprietà caratteristiche. Però per non tornare più tardi su alcuni cambiamenti di variabili, e sulle conseguenti variazioni nelle notazioni, diremo subito che in modo analogo a quanto si fece al n. 1 del § II supporremo che si voglia senz'altro trovare la soluzione che passa per gli assi x ed y; e che questa condizione porti che nel punto O debbono annullarsi tutte le derivate dei primi tre ordini della funzione incognita z. In particolare l'elemento di secondo ordine iniziale sarà quindi l'elemento $x = y = z = p = q = r = s = t = 0$; e l'ipotesi che nè l'uno nè l'altro asse abbia la direzione della caratteristica in esso porterà che l'equazione assegnata si può pensare risoluta in s: infine nell'elemento iniziale le derivate rapporto ad x ed y del primo membro dell'equazione saranno nulle. Introducendo al solito per maggiore simmetria le notazioni $p_{00} = z$,

(*) Tali casi di impossibilità si riconoscono subito ove appena si tenti di calcolare i valori che debbono avere in O le derivate dei varii ordini di z.

(**) Se tale presunzione è vera, risulterebbe provata una piena analogia tra questo problema ed il problema di Cauchy, che appunto nel caso analitico è risolubile anche per le equazioni paraboliche del tipo della (2) purchè la curva su cui sono assegnati i dati iniziali non tocchi una caratteristica.

$p_{ik} = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}$ scriveremo l'equazione nella forma

$$F(x\, y\, p_{00}\, p_{10} \ldots p_{02}) = p_{11} - f(x\, y\, p_{00}\, p_{10}\, p_{01}\, p_{20}\, p_{02}) = 0 \tag{3}$$

e supporremo F ed f finite e continue insieme alle loro derivate dei primi tre ordini rapporto alle variabili da cui dipendono.

Sono queste in sostanza le stesse ipotesi già fatte nel § II per le equazioni là studiate.

La condizione che (3) sia parabolica porta che si abbia

$$4 \frac{\partial f}{\partial p_{20}} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_{02}} - 1 = 0 \,; \tag{4}$$

chiameremo λ la radice (doppia) di $\dfrac{\partial F}{\partial p_{20}} \lambda^2 - \dfrac{\partial F}{\partial p_{11}} \lambda + \dfrac{\partial F}{\partial p_{02}} = 0$, che per (4) sarà

$$\lambda = -\frac{1}{2 \dfrac{\partial f}{\partial p_{20}}} = -2 \frac{\partial f}{\partial p_{02}} \,. \tag{5}$$

Equazioni delle caratteristiche sono allora come al solito le

$$d\, y = \lambda\, d\, x \,, \tag{6$_a$}$$

$$d\, p_{ik} = (p_{i+1\,k} + \lambda\, p_{i\,k+1})\, d\, x \qquad (i + k = 0,\ 1) \tag{6$_b$}$$

$$F(x\, y\, p_{00}\, p_{10}\, p_{01}\, p_{20}\, p_{11}\, p_{02}) \equiv p_{11} - f(x\, y\, p_{00}\, p_{10}\, p_{01}\, p_{20}\, p_{02}) = 0 \tag{6$_c$}$$

cui si aggiunge l'equazione

$$M \equiv \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p_{00}} p_{01} + \frac{\partial F}{\partial p_{10}} p_{11} + \frac{\partial F}{\partial p_{01}} p_{02} - \frac{\partial F}{\partial p_{20}} \frac{d\, p_{11}}{d\, x} - \frac{1}{2} \frac{d\, p_{02}}{d\, x} = 0 \tag{6$_d$}$$

che si ottiene dalla

$$\frac{\delta F}{\delta y} \equiv \frac{\partial F}{\partial y} + \sum_{0 \leq i+k \leq 2} \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} p_{i\,k+1} = 0 \tag{7}$$

mediante le sostituzioni

$$p_{i\,k+1} = \sum_{j=1}^{j=i} (-1)^{j+1} \lambda^{j-1} \frac{d\, p_{i-j\,k+j}}{d\, x} + (-1)^i \lambda^i A_1 \,, \tag{8}$$

dove A_1 è una quantità arbitraria: essa scompare nell'equazione (6)$_d$ grazie al valore (5) di λ ed all'identità (4).

Caratteristico della classe di equazioni di Goursat - von Weber *è ora il fatto che, come conseguenza delle* $(6)_1$, $(6)_2$, $(6)_3$, $(6)_4$ *fin qui scritte, si ha l'uguaglianza*

$$-\frac{\partial F}{\partial p_{10}}\lambda - \frac{\partial F}{\partial p_{01}} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p_{20}}\frac{d\lambda}{dx} = 0. \tag{9}$$

per modo che, affinchè una curva di elementi di secondo ordine soddisfacente alle $(6)_1, \ldots, (6)_6$ *appartenga ad una soluzione di* (3) *e cioè sia una caratteristica per* (3), *è necessario che sia ancora soddisfatta un'equazione del tipo*

$$X \equiv \frac{d^2 p_{02}}{dx^2} - H\left(x\, y\, p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{02}, p_{11}, \frac{d p_{20}}{dx}, \frac{d p_{11}}{dx}, \frac{d p_{02}}{dx}\right) = 0. \tag{6$_7$}$$

Tale equazione $(6)_7$ si deduce dalla

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &+ 2\sum_{0\le i+k\le 2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial p_{ik}}\,p_{i,k+1} + \sum_{\substack{0\le i+k\le 2\\ 0\le l+h\le 2}}\frac{\partial^2 F}{\partial p_{ik}\,\partial p_{lh}}\,p_{i,k+1}\,p_{l,h+1} + \\ &+ \sum_{0\le i+k\le 2}\frac{\partial F}{\partial p_{ik}}\,p_{i,k+2}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

mediante le sostituzioni (8) e

$$\left.\begin{aligned}p_{i,3-i} = \sum_{j=2}^{j=i}(-1)^{j}(j-1)\lambda^{j-2}\frac{d^2 p_{i-j,2-i+j}}{dx^2} &+ \sum_{j=1}^{j=i}(-1)^{j-1}\frac{j(j-1)}{2}\frac{d p_{i-j,2-i+j}}{dx} + \\ \frac{1}{2}\, i(i-1)\lambda^{i-2}\frac{d\lambda}{dx}A_1 + (-1)^i\, i\,\lambda^{i-1}A_2 &+ (-1)^i\lambda^i A\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

A_1, A_2, A essendo nuove quantità arbitrarie, le quali scompaiono dal risultato $(6)_7$ della sostituzione di (11) in (10) in virtù dell'uguaglianza (9), delle (4) (5), e dell'uguaglianze che si deducono da (4) derivandola rapporto ad una qualunque ω delle variabili x, y, p_{ik}:

$$2\frac{\partial^2 F}{\partial p_{20}\,\partial\omega}\lambda - \frac{\partial^2 F}{\partial p_{02}\,\partial\omega} = 0. \tag{12}$$

La funzione H che compare in $(6)_7$ dipende dunque dalle derivate seconde di F.

4. *Le loro caratteristiche.* Le equazioni (6) costituiscono un sistema di 7 equazioni nelle 7 funzioni incognite y, p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02} di x che determinano le caratteristiche di (3), e poichè di tali equazioni, una, la $(6)_1$,

è un'equazione in termini finiti, un'altra, la $(6)_c$, è di secondo ordine, ed in fine le altre sono tutte del primo ordine, possiamo conchiudere che le soluzioni delle (6) dipendono da 7 costanti arbitrarie, e che come tali si possono assumere i valori iniziali $y^{(0)}$, $p_{00}^{(0)}$, $p_{10}^{(0)}$, $p_{01}^{(0)}$, $p_{20}^{(0)}$, $p_{02}^{(0)}$, $p'^{(0)}_{02}$ che le funzioni y, p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{02}, $\frac{d\, p_{02}}{d\, x}$ assumono per $x = 0$. Avremo dunque che le caratteristiche si potranno rappresentare colle equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} y &= y\,(x,\ y^{(0)},\ p_{00}^{(0)},\ p_{10}^{(0)},\ p_{01}^{(0)},\ p_{20}^{(0)},\ p_{02}^{(0)},\ p'^{(0)}_{02}) \\ p_{ik} &= p_{ik}\,(x,\ y^{(0)},\ p_{00}^{(0)},\ p_{10}^{(0)},\ p_{01}^{(0)},\ p_{20}^{(0)},\ p_{02}^{(0)},\ p'^{(0)}_{02}). \end{aligned}\quad (0 \leq i + k \leq 2)\ \right\} \tag{13}$$

Importa per il seguito fare alcune osservazioni su tali funzioni. Intanto, poichè i secondi membri delle (6) ammettono tutti le derivate del primo ordine rispetto alle variabili da cui dipendono, è chiaro per i teoremi generali della teoria delle equazioni alle derivate ordinarie che tutte le funzioni y, $p_{00}, \ldots, p_{02}$, $\frac{d\, p_{02}}{d\, x}$ ammettono le derivate prime e seconde che non contengono più di una derivazione rapporto ad x nè più di una rapporto alle costanti arbitrarie. Segue quindi in particolare che sarà:

$$\frac{d\, p_{02}}{d\, x} = p'^{(0)}_{02} + \mu_1\, x$$

μ_1 essendo una funzione finita e continua di x, e delle costanti iniziali.

E di qui seguirà che p_{02} avrà tutte le derivate che non contengono più di una derivazione rapporto ai valori iniziali nè più di 2 rapporto ad x

$$p_{02} = p_{02}^{(0)} + p'^{(0)}_{02}\, x + \mu_2\, x^2. \tag{14}$$

Dalla $(6)_a$, e dalla equazione che si ottiene derivando rapporto a x la $(6)_c$ si deduce allora che i valori iniziali delle $\frac{d\, p_{20}}{d\, x}$, $\frac{d\, p_{11}}{d\, x}$ — rammentando che per $x = y = p_{ik} = 0$ è $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ sono dati da

$$\left.\begin{aligned} p'^{(0)}_{11} &= -\lambda_0\, p'^{(0)}_{02} + \delta_1\,(y^{(0)} \ldots p_{02}^{(0)}) \\ p'^{(0)}_{20} &= 2\,\lambda_0^2\, p'^{(0)}_{02} + \delta_2\,(y^{(0)} \ldots p_{01}^{(0)}) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

δ_1 e δ_2 essendo funzioni che si annullano per valori tutti nulli dei loro argomenti, e $\lambda_0 = \lambda\,(0\, y^{(0)}\, p_{00}^{(0)}, \ldots, p_{02}^{(0)})$.

Ciò posto, si osservi che i coefficienti delle $(6)_a \ldots (6)_d$ sono formati colle derivate prime di F; ne seguirà subito che le $y, p_{00}, \ldots, p_{11}$ hanno tutte le stesse derivate che ora si vide possedere p_{02}; e precisamente si avrà

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= p_{11}^{(0)} + p_{11}'^{(0)} x + \mu_3 x^2 \qquad\qquad p_{11}^{(0)} = f(0\, y^{(0)} \ldots p_{02}^{(0)}) \\
p_{20} &= p_{20}^{(0)} + p_{20}'^{(0)} x + \mu_4 x^2 \\
p_{10} &= p_{10}^{(0)} + p_{20}^{(0)} x + p_{11}^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} p_{20}'^{(0)} x^2 + p_{11}'^{(0)} \int_0^x \xi \lambda(\xi)\, d\xi + \mu_5 x^3 \\
p_{01} &= p_{01}^{(0)} + p_{11}^{(0)} x + p_{02}^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} p_{11}'^{(0)} x^2 + p_{02}'^{(0)} \int_0^x \xi \lambda(\xi)\, d\xi + \mu_6 x^3 \\
p &= p_{00}^{(0)} + p_{10}^{(0)} x + p_{01}^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} p_{20}^{(0)} x^2 + p_{11}^{(0)} x \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi + \\
&\quad p_{02}^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi \int_0^\xi \lambda(\eta)\, d\eta + \frac{1}{3!} p_{20}'^{(0)} x^3 + p_{11}'^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, \xi \left(x - \frac{1}{2}\xi\right) d\xi + \\
&\quad p_{02}'^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi \int_0^\xi \lambda(\eta)\, \eta\, d\eta + \mu_7 x^4 \\
y &= y^{(0)} + \lambda_0 x + \mu_8 x^2
\end{aligned}
\qquad (14)_2
$$

dove

$$\lambda(x) = \lambda(x\, y(x) \ldots p_{02}(x)) = \lambda_0 + \mu_9 x \qquad (14)$$

e le $\mu_3, \mu_4, \ldots, \mu_9$ sono come μ_1 e μ_2 funzioni finite e continue delle variabili $x, y^{(0)}, \ldots, p_{02}^{(0)}$.

5. *Costruzione della soluzione cercata.* Il problema proposto si riduce quindi ora al problema di determinare in (13) le costanti arbitrarie $y^{(0)}$, $p_{00}^{(0)}, \ldots, p_{02}'^{(0)}$ in funzione di una di esse, ad es.: di $y^{(0)}$ per modo che la semplice infinità di caratteristiche così ottenuta ricopra una superficie soluzione di (3) soddisfacente ai dati iniziali.

La caratteristica della superficie da costruirsi cui appartiene l'elemento in O è subito determinata: per ottenerla basterà porre

$$y^{(0)} = p_{00}^{(0)} = p_{10}^{(0)} = p_{01}^{(0)} = p_{20}^{(0)} = p_{02}^{(0)} = p_{02}'^{(0)} = 0 \qquad (16)$$

come immediatamente risulta dall'ipotesi, fatta al n. 3, che le condizioni iniziali imposte alla superficie di annullarsi sugli assi portino che in O la z debba annullarsi colle sue derivate terze.

Le altre caratteristiche corrispondenti a valori di $y^{(0)} \gtrless 0$ dovranno evidentemente determinarsi per modo che per $x=0$ sia $p_{00}=p_{01}=p_{02}=0$ e che inoltre nel punto di esse in cui $y=0$ sia pure $p_{00}=p_{10}=p_{20}=0$. Per soddisfare la prima condizione basta fare in (13) $p_{00}^{(0)}=p_{01}^{(0)}=p_{02}^{(0)}=0$; cosicchè per ottenere le caratteristiche cercate basterà per ogni valore di $y^{(0)} \gtrless 0$ determinare x, $p_{10}^{(0)}$, $p_{20}^{(0)}$, $p'^{(0)}_{02}$ per modo che si abbia

$$\left.\begin{aligned}
y\,(x,\ y^{(0)},\ 0,\ p_{10}^{(0)},\ 0,\ p_{20}^{(0)},\ 0,\ p'^{(0)}_{02}) &= 0\\
p_{00}\,(x,\ y^{(0)},\ 0,\ p_{10}^{(0)},\ 0,\ p_{20}^{(0)},\ 0,\ p'^{(0)}_{02}) &= 0\\
p_{10}\,(x,\ y^{(0)},\ 0,\ p_{10}^{(0)},\ 0,\ p_{20}^{(0)},\ 0,\ p'^{(0)}_{02}) &= 0\\
p_{20}\,(x,\ y^{(0)},\ 0,\ p_{10}^{(0)},\ 0,\ p_{20}^{(0)},\ 0,\ p'^{(0)}_{02}) &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ora poichè un sistema di valori che soddisfanno alle (17) è

$$x = y^{(0)} = p_{10}^{(0)} = p_{20}^{(0)} = 0,$$

basterebbe che per tali valori fosse $\dfrac{\partial\,(y,\ p_{00},\ p_{10},\ p_{02})}{\partial\,(x,\ p_{10}^{(0)},\ p_{20}^{(0)},\ p'^{(0)}_{02})} \gtrless 0$ perchè le (17) risultassero risolubili rapporto a x, $p_{10}^{(0)}$, $p_{20}^{(0)}$, $p'^{(0)}_{02}$ almeno in un intorno di $y^{(0)}$ sufficientemente piccolo: ma evidentemente invece il precedente Jacobiano è nullo.

Per superare tale difficoltà introduciamo le funzioni ausiliarie

$$u\,(x,\ y^{(0)},\ p_{10}^{(0)},\ p_{20}^{(0)},\ p'^{(0)}_{02}),\ v\,(x,\ y^{(0)},\ldots,\ p'^{(0)}_{02}),\ w\,(x,\ y^{(0)},\ldots,\ p'^{(0)}_{02})$$

mediante le

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{3\,p_{00} - 2\,p_{10}\,x + \frac{1}{2}\,p_{20}\,x^2}{x}\\
v &= 2\,\frac{3\,p_{10}\,x - 3\,p_{00} - p_{20}\,x^2}{x^2}\\
w &= \frac{3}{2}\,\frac{p_{00} - p_{10}\,x + \frac{1}{2}\,p_{20}\,x^2}{x^3}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

dove nei secondi membri si immagina posto per le p_{ik} i valori (13) con $p_{00}^{(0)}=p_{01}^{(0)}=p_{02}^{(0)}=0$. È chiaro che il sistema di equazioni

$$y = u = v = w = 0 \tag{19}$$

è equivalente al sistema (17) tutte le volte che $x \neq 0$. Quindi potremo sostituire (19) a (17): ben tenendo presente che un ulteriore esame richiederà solo la ricerca delle soluzioni di (17) le quali eventualmente annullassero x.

D'altro canto per le (14) si ha

$$\left.\begin{aligned} u(x,\, y^{(0)},\, p^{(0)}_{10},\, p^{(0)}_{20},\, p'^{(0)}_{02}) &= p^{(0)}_{10} + \nu_1 x \\ v(x,\, y^{(0)},\, p^{(0)}_{10},\, p^{(0)}_{20},\, p'^{(0)}_{02}) &= p^{(0)}_{20} + \nu_2 x \\ w(x,\, y^{(0)},\, p^{(0)}_{10},\, p^{(0)}_{20},\, p'^{(0)}_{02}) &= \frac{3}{2}\left| \frac{1}{6}\, p'^{(0)}_{20} - \frac{1}{6}\, p'^{(0)}_{11}\lambda_0 + \frac{1}{6}\, p'^{(0)}_{02}\lambda_0^2 \right| + \nu_3 x = \\ &= p'^{(0)}_{02}\lambda_0^2 + \left(\frac{1}{4}\,\delta_2 - \frac{1}{4}\,\delta_1 \right) + \nu_3 x \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

dove ν_1, ν_2, ν_3 sono come le μ funzioni finite e continue delle stesse variabili che u, v, w. Ma da queste e dall'ultima delle $(14)_2$ segue che il sistema di valori

$$x = y^{(0)} = p^{(0)}_{10} = p^{(0)}_{20} = p'^{(0)}_{02} = 0 \tag{21}$$

è una soluzione di (19): ed inoltre che per tali valori (21) si ha

$$\frac{\partial\,(y,\ u,\ v,\ w)}{\partial\,(x\, p^{(0)}_{10},\ p^{(0)}_{20},\ p'^{(0)}_{02})} = \lambda_0^3 ; \tag{22}$$

onde segue che le equazioni (19) ammetteranno sempre una ed una sola soluzione per valori sufficientemente piccoli di $y^{(0)}$; da esse le $p^{(0)}_{10}$, $p^{(0)}_{20}$, $p^{(0)}_{02}$ si otterranno quali funzioni di $y^{(0)}$ finite e continue, che si riducono a 0 per $y^{(0)} = 0$. Chè, se si nota inoltre che dall'ultima delle $(14)_2$ segue che affinchè si abbia una soluzione di $y = 0$ per cui sia $x = 0$ occorre che $y^{(0)} = 0$, noi concluderemo che tale soluzione sarà anche la sola soluzione di (17) per $y^{(0)} \neq 0$, e si ridurrà quando $y^{(0)}$ tende a zero ai valori (16). Abbiamo costruito pertanto una successione semplicemente infinita e continua di caratteristiche, la quale contiene la caratteristica (16): e soddisfa alle condizioni iniziali enunciate in principio di questo numero; ed è questo anche l'unico modo di costruire tale successione di caratteristiche. Non ci rimarrà quindi da provare se non che dette caratteristiche formano una famiglia di curve di elementi realmente appartenenti ad una superficie.

6. *Verifiche.* Indichiamo con

$$y = Y(x\, y^{(0)}),\quad z = Z(x\, y^{(0)}),\quad p_{ik} = P_{ik}(x\, y^{(0)}),\quad p'_{ik} = P'_{ik}(x\, y^{(0)})\quad (i + k = 1,\ 2) \tag{23}$$

il sistema di caratteristiche da noi ottenuto nel numero precedente, le y, P saranno soluzioni del sistema (6). Grazie alle equazioni $(6)_a$ per dimostrare che queste sono curve di elementi di secondo ordine appartenenti ad una superficie basta provare che si ha

$$\frac{\partial P_{00}}{\partial y^{(0)}} = P_{01} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}, \qquad \frac{\partial P_{10}}{\partial y^{(0)}} = P_{11} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}, \qquad \frac{\partial P_{01}}{\partial y^{(0)}} = P_{02} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}. \tag{24}$$

A tale scopo poniamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P_{00}}{\partial y^{(0)}} &= P_{01} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \pi\,(x\, y^{(0)}) \\ \frac{\partial P_{10}}{\partial y^{(0)}} &= P_{11} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \rho\,(x\, y^{(0)}) \\ \frac{\partial P_{01}}{\partial y^{(0)}} &= P_{02} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \sigma\,(x\, y^{(0)}). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Si tratterà di mostrare che π, ρ, σ sono nulle identicamente.

È facile trovare un sistema di equazioni lineari cui devono soddisfare le π, ρ, σ, cercando le condizioni di compatibilità di (6) e (25).

Infatti intanto dalla $(6)_a$ e dalla prima delle $(6)_b$ segue

$$\frac{\partial P_{00}}{\partial x} = P_{10} + P_{01}\,\lambda = P_{10} + P_{01} \frac{\partial Y}{\partial x};$$

derivandola rapporto ad $y^{(0)}$ e confrontandola con quella che si ottiene derivando la prima delle (25) rapporto ad x, si ottiene per le altre $(6)_b$ e (25)

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \rho - \lambda\,\sigma. \tag{26$_1$}$$

Analogamente derivando rapporto a $y^{(0)}$ le due ultime equazioni $(6)_b$, rapporto ad x le due ultime (25) e confrontando si ha

$$\frac{\partial P_{i,2-i}}{\partial y^{(0)}} = \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} \left(\sum_1^i (-1)^{j-1} \lambda^{j-1} \frac{\partial P_{i-j,2-i+j}}{\partial x} + (-1)^i \lambda^i B_1 \right) - l_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \tag{27}$$

dove

$$B_1 = \frac{\partial P_{02}}{\partial y^{(0)}}, \quad l_0 = 0, \quad l_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad l_2 = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Ma si ricordi che è

$$F\,(x\, Y,\ P_{00},\ P_{10},\ P_{01},\ P_{20},\ P_{11},\ P_{02}) = 0, \tag{28}$$

onde pure

$$\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \Sigma \frac{\partial F}{\partial P_{ik}}\frac{\partial P_{ik}}{\partial y^{(0)}} = 0. \qquad (29)$$

Osservando l'analogia tra le (29) e (7), le (27) e (8) si riconosce subito che il risultato della sostituzione di (25), (27) in (29) dà

$$M\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \frac{\partial F}{\partial P_{20}}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial P_{00}}\pi + \frac{\partial F}{\partial P_{10}}\rho + \frac{\partial F}{\partial P_{01}}\sigma = 0.$$

Ma è $M = 0$, quindi si avrà che le π, ρ, σ soddisfanno l'equazione

$$L_1 \equiv \frac{\partial F}{\partial P_{20}}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial P_{00}}\pi + \frac{\partial F}{\partial P_{10}}\rho + \frac{\partial F}{\partial P_{01}}\sigma = 0. \qquad (26)_2$$

Infine si osservi che da (29) segue che si ha pure

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}\right)^2 + 2\sum_{0\leq i+k\leq 2}\frac{\partial^2 F}{\partial Y\,\partial P_{ik}}\frac{\partial P_{ik}}{\partial y^{(0)}}\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \\ &\qquad \sum_{\substack{0\leq i+k\leq 2\\ 0\leq j+h\leq 2}}\frac{\partial^2 F}{\partial P_{ik}\,\partial P_{jh}}\frac{\partial P_{ik}}{\partial y^{(0)}}\frac{\partial P_{jh}}{\partial y^{(0)}} + \\ &\qquad + \sum_{0\leq i+k\leq 2}\frac{\partial F}{\partial P_{ik}}\frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial y^{(0)2}} + \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^{(0)2}} = 0\,; \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

D'altra parte dalle (25) (27) derivando rapporto ad x ed $y^{(0)}$ si ottengono facilmente le $\frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial y^{(0)2}}$ espresse mediante le $\frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial x^2}$ e le derivate di π, σ, ρ che non contengono più di una derivazione rapporto a $y^{(0)}$: eseguendo la sostituzione in (30) sempre ricordando le (4), (5), (9) si ottiene facilmente l'equazione

$$M\frac{\partial^2 Y}{\partial y^{(0)2}} + N\left(\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}\right)^2 + \frac{\delta L_1}{\delta y^{(0)}} + L_2 = 0$$

dove il segno δ indica al solito la derivazione totale e si è posto

$$L_2 = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + L'_2\left(\pi,\ \rho,\ \sigma,\ \frac{\partial \pi}{\partial x},\ \frac{\partial \rho}{\partial x},\ \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)$$

L'_2 essendo una funzione lineare omogenea delle variabili da cui dipende.

Si conchiude dunque che si deve avere per $(6)_i$, $(6)_i$, (26)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + L_i\left(\pi,\ \rho,\ \sigma,\ \frac{\partial \pi}{\partial x},\ \frac{\partial \rho}{\partial x},\ \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) = 0. \tag{26}$$

Le funzioni π, ρ, σ soddisfanno dunque come funzioni di x al sistema delle 3 equazioni differenziali lineari omogenee (26): le quali sono evidentemente indipendenti. Come tali, esse saranno tutte della forma:

$$a\,(x\,y^{(0)})\,\pi^{(0)} + b\,(x\,y^{(0)})\,\rho^{(0)} + c\,(x\,y^{(0)})\,\sigma^{(0)} + d\,(x\,y^{(0)})\,\rho'^{(0)},$$

dove le a, b, c, d sono funzioni finite e continue delle variabili x ed $y^{(0)}$, e $\pi^{(0)}$, $\rho^{(0)}$, $\sigma^{(0)}$, $\rho'^{(0)}$ indicano i valori cui si riducono le π, ρ, σ, $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ quando vi si ponga $x = 0$. Basterà quindi dimostrare che le π, ρ, σ soddisfanno a condizioni tali che necessariamente è $\pi^{(0)} = \rho^{(0)} = \sigma^{(0)} = \rho'^{(0)} = 0$.

Ora ricordiamo che per $x = 0$ è

$$P_{00}\,(0\,y^{(0)}) = P_{01}\,(0\,y^{(0)}) = P_{02}\,(0\,y^{(0)}) = 0$$

quindi le nostre funzioni π, ρ, σ dovranno soddisfare alle

$$\pi\,(0\,y^{(0)}) = \sigma\,(0\,y^{(0)}) = 0$$

e cioè dovrà essere intanto

$$\pi^{(0)} = \sigma^{(0)} = 0. \tag{31}$$

Inoltre se $x = x\,(y^{(0)})$ è la soluzione dell'equazione $Y\,(x\,y^{(0)}) = 0$ deve essere identicamente $P_{00}\,(x\,(y^{(0)}),\ y^{(0)}) = P_{10}\,(x\,(y^{(0)}),\ y^{(0)}) = P_{20}\,(x\,(y^{(0)}),\ y^{(0)}) = 0$; e quindi pure

$$\frac{\partial P_{00}}{\partial x}\,\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} - \frac{\partial P_{00}}{\partial y^{(0)}}\,\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P_{10}}{\partial x}\,\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} - \frac{\partial P_{10}}{\partial y^{(0)}}\,\frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

le quali per $(6)_{ii}$ e $(6)_{ii}$ e (25) ci dànno

$$\left.\begin{aligned} \pi\,(x\,(y^{(0)})\,y^{(0)}) &= 0 \\ \rho\,(x\,(y^{(0)})\,y^{(0)}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

O in altri termini le equazioni

$$y\,(x\,y^{(0)}) = \pi\,(x\,y^{(0)}) = \rho\,(x\,y^{(0)}) = 0 \tag{33}$$

sono simultanee.

A queste equazioni occorre infine aggiungere per $y^{(0)} = 0$ la

$$\rho'^{(0)} = \sigma'^{(0)} = 0. \tag{34}$$

Per ottenere quest'ultima si osservi che per $y^{(0)} = 0$ la $x(y^{(0)})$ è nulla: ma d'altro canto per $P_{20}(x(y^{(0)}), y^{(0)}) = 0$ si ha $-\frac{\partial P_{20}}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \frac{\partial P_{20}}{\partial y^{(0)}}\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ che ricordando che per $x = y^{(0)} = 0$ tutte le $\frac{\partial P_{ik}}{\partial x}$ sono nulle dà $\frac{\partial P_{20}(0\,0)}{\partial y^{(0)}}$. Si confronti con (27) ricordando che $B_1(y^{(0)}) = \frac{\partial P_{02}(0\, y^{(0)})}{\partial y^{(0)}} = 0$, si avrà

$$\rho'^{(0)} - \lambda\, \sigma'^{(0)} = 0,$$

che associata con $(26)_2$ dà appunto (34).

Ed ora siamo in grado di dimostrare che le π, ρ, σ sono identicamente nulle. Per $y^{(0)} = 0$ ciò risulta subito dalle (31), (32), (34). Per $y^{(0)} \gtrless 0$ si osservi che da (31) e (26) segue che le π, ρ, σ hanno la forma seguente:

$$\sigma = \left| \tau'_1 \rho^{(0)} + \left(-\frac{1}{\lambda_0} + \tau''_1 x \right) \rho'^{(0)} \right| x$$

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho'^{(0)} x + (\tau'_2 \rho^{(0)} + \tau''_2 \rho'^{(0)})\, x^2$$

$$\pi = \rho^{(0)} x + (\tau'_3 \rho^{(0)} + \tau''_3 \rho'^{(0)} x)\, x^3$$

dove τ'_1, τ''_1, τ'_2, τ''_2, τ'_3, τ''_3 sono funzioni finite e continue di x, $y^{(0)}$.

Se quindi si pone

$$\varpi = \frac{\rho\, x - \pi}{x^2}$$

avremo

$$\varpi = \rho'^{(0)} + \tau'_4 \rho^{(0)} + \tau''_4 \rho'^{(0)} x,$$

e le equazioni $Y = \varpi = \rho = 0$ sono equivalenti per $x \gtrless 0$ alle equazioni (33): $Y = \pi = \rho = 0$. Ma, poichè si ha

$$\left| \frac{\partial (Y, \varpi, \rho)}{\partial (x\, \rho^{(0)}\, \rho'^{(0)})} \right|_{x = y^{(0)} = \rho^{(0)} = \rho'^{(0)} = 0} = \lambda_0 \gtrless 0,$$

le equazioni $Y = \varpi = \rho = 0$ ammettono una sola soluzione rispetto a x, $\rho^{(0)}$, $\rho'^{(0)}$ tale che per $y^{(0)} = 0$ queste quantità si annullino: ma evidentemente una soluzione di tali equazioni è

$$x = x(y^{(0)}), \quad \rho^{(0)} = \rho'^{(0)} = 0;$$

quindi questa è l'unica soluzione di esse o delle equazioni (33) che sono loro equivalenti per $y^{(n)} = 0$.

Ne segue che è identicamente $\pi = \rho = \sigma = 0$, c. v. d.

È quindi completamente dimostrato il teorema enunciato nel n. 3.

7. A completare il risultato precedente non sarà forse inutile ricordare che l'ipotesi che le curve γ_1 e γ_2 non siano tangenti alla caratteristica è realmente essenziale. Basterà a tal fine esaminare un'equazione particolare della classe considerata: ad esempio l'equazione $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a$. La soluzione più generale di essa è $z = Y_1 + Y_2 x + \dfrac{1}{2} a x^2$ dove Y_1 ed Y_2 sono funzioni di y soltanto: le caratteristiche sono le parallele all'asse delle x. Ora se si richiede che per $x = 0$ e per $y = 0$ essa la z si annulli è chiaro che si cade in una impossibilità se $a \neq 0$; mentre se $a = 0$ il problema risulta indeterminato.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XIX della Serie III, pag. 21 e seguenti.

Tipo-Lit. Rebeschini di Turati e C.
Milano, 1912.

MILANO — TIPO-LIT. REBESCHINI DI TURATI E C.

SOPRA UN TEOREMA DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI DEL SIG. LINDEBERG.

Nota di **Eugenio Elia Levi** (Genova).

Estratto dal tomo XXXVII (1º sem. 1914) dei ***Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.***
Adunanza del 9 novembre 1913.

Si consideri il problema di trovare la curva $y = y(x)$ che rende minimo l'integrale

$$(1) \qquad I = \int_{x_1}^{x_2} f(x,\, y,\, y')\, dx \qquad (x_1 < x_2);$$

in altro lavoro [1]) ho dimostrato il seguente teorema relativo al comportamento della funzione

$$(2) \qquad E(x,\, y;\, y',\, \overline{y}') = f(x,\, y,\, \overline{y}') - f(x,\, y,\, y') - (\overline{y}' - y') f'_{y'}(x,\, y,\, y')$$

quando $\overline{y}'$ tende ad ∞:

Se in un campo finito e chiuso T di valori di x, y, y' sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1º $f(x,\, y,\, y') > 0$,

2º $E(x,\, y;\, y',\, \overline{y}') > 0$ *per* $\overline{y}' \neq y'$,

e se T_1 è un campo chiuso contenuto in T — per il quale esiste un $\delta > 0$ tale che ogni punto di T_1 sia il punto di mezzo di un segmento di lunghezza 2δ parallelo all'asse delle y' e totalmente contenuto in T — allora si possono determinare due numeri positivi ρ_1 e μ_1 tali che se $|y' - \overline{y}'| > \rho_1$ e $(x,\, y,\, y')$ è in T_1, si ha

$$(3) \qquad E(x,\, y;\, y',\, \overline{y}') > \mu_1 |\overline{y}' - y'|.$$

---

[1]) *Sui criterii sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle Variazioni* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo XXI (1913), pp. 173-218]. In questa Memoria, redatta fin dall'estate del 1912, ho dato una dimostrazione della sufficienza delle condizioni ordinarie di minimo per l'integrale I, indipendente dal concetto di campo di estremali, sviluppando ulteriormente le idee esposte in quattro Note pubblicate nel 1911-12 con ugual titolo nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. In particolare il teorema citato permette di superare una grave difficoltà che si poteva opporre alla seconda di tali Note, e che io avevo notato poco dopo la loro pubblicazione: a causa del ritardo con cui detta Memoria è uscita per le stampe, debbo riconoscere che, indipendentemente, anche il sig. HAHN ha dovuto rilevare questa lacuna e una conseguente inesattezza di enunciato in una sua recente Nota. Cfr. H. HAHN, *Über die hinreichenden Bedingungen fur ein starkes Extremum bei einfachsten Probleme der Variationsrechnung* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVI (2º semestre 1913), pp. 379-385].

Occorre subito notare che ρ_1 si può prendere ad arbitrio, poichè, ammesso il teorema dimostrato per un dato valore di ρ_1, si vede subito che il teorema è pure vero per ogni valore $\rho_2 > 0$ ad esso inferiore: basta osservare che per $\rho_2 \leqq |y' - \bar{y}'| \leqq \rho_1$ la $E(x, y; y', \bar{y}')$ è funzione continua in T ed ha quindi un minimo $\nu \neq 0$, talchè, detto μ_2 il minore dei numeri μ_1 e $\frac{\nu}{\rho_1}$, sarà, per $|y' - \bar{y}'| > \rho_2$,

$$E(x, y; y', \bar{y}') > \mu_2 |y' - \bar{y}'|.$$

Vorrei in questa breve nota mostrare come facilmente da questo teorema si deduca, e con qualche maggior generalità, un bel teorema del sig. LINDEBERG [2]), relativo al significato delle condizioni di WEIERSTRASS e di LEGENDRE: secondo il quale bastano già da sole queste due condizioni ad assicurare che una curva di equazione $y = \eta(x)$ dia ad I il minimo valore rispetto alle curve C, che, pur correndo sufficientemente vicine alla curva C_1, sono tali che l'angolo delle curve C e C_1 in punti corrispondenti ad una stessa x resti maggiore di una certa quantità σ in un aggregato di punti x di misura $\geqq \varepsilon > 0$. Precisamente enunceremo il teorema di LINDEBERG nel modo seguente:

Sia $y = \eta(x)$ una curva C_1 tale che, r e r_1 indicando due numeri positivi, sia

$$(4) \qquad \begin{cases} f''_{y'^2}(x, \eta, \eta') > 0, \\ E(x, y; y', \bar{y}') > 0 \text{ per } y' \neq \bar{y}' \end{cases}$$

per tutti i valori di x, y, y' del campo

$$(5) \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad |y - \eta(x)| < r, \qquad |y' - \eta'(x)| < r_1.$$

Indicando con ε ed ε_1 due costanti positive, si può trovare un numero ρ tale che ogni curva C di equazione $y = Y(x)$ che passi per gli stessi estremi che C_1, soddisfi alla

$$(6) \qquad |Y(x) - \eta(x)| < \rho,$$

dia ad I un valore maggiore che C_1, purchè in un insieme di valori di x di misura $> \varepsilon$ si abbia

$$(7) \qquad |Y'(x) - \eta'(x)| > \varepsilon_1.$$

Calcoliamo infatti la variazione totale

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta I = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \Big[f\big(x, Y(x), Y'(x)\big) - f\big(x, \eta(x), \eta'(x)\big)\Big] dx \\ \quad = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \Big\{E\big(x, Y(x); \eta'(x), Y'(x)\big) + \Big[f\big(x, Y(x), \eta'(x)\big) - f\big(x, \eta(x), \eta'(x)\big)\Big] \\ \qquad + \Big[Y'(x) - \eta'(x)\Big] f'_{y'}\big(x, Y(x), \eta'(x)\big)\Big\} dx. \end{cases}$$

Intanto è chiaro che si può supporre r ed r_1 tanto piccoli che nel campo (5) si abbia ancora

$$(9) \qquad \begin{cases} f''_{y'^2}(x, y, y') > 0, \\ E(x, y; y', \bar{y}') > 0 \quad \text{per } \bar{y}' \neq y'. \end{cases}$$

[2]) J. W. LINDEBERG, *Über einige Fragen der Variationsrechnung* [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 340-351].

Si prenda allora come campo T il campo (5): si fissi un $\delta > 0$ arbitrario purchè minore di r_1, e si prenda come campo T_1 il campo

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad |y - \eta(x)| < r, \qquad |y' - \eta'(x)| < r_1 - \delta; \tag{10}$$

ed applichiamo il teorema citato al principio di questo lavoro col farvi $\rho_1 = \varepsilon_1$: esisterà un numero $\mu_1 > 0$ tale che nel campo (10) se $|y' - \eta'(x)| > \varepsilon_1$, è

$$E(x, y; \eta'(x), y') > \mu_1 |y' - \eta'(x)|. \tag{11}$$

Ciò posto, indichiamo con ρ una indeterminata $< r$, e supponiamo

$$|Y(x) - \eta(x)| < \rho;$$

chiamiamo χ_1 l'insieme dei valori di x per cui $|Y'(x) - \eta'(x)| > \varepsilon_1$, χ_2 l'insieme in cui $|Y'(x) - \eta'(x)| \leqq \varepsilon_1$; e cogli stessi nomi indichiamo le loro misure.

Per la (11) e la seconda delle (9) sarà

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} E(x, Y(x); \eta'(x), Y'(x))\, dx \\ \displaystyle > \mu_1 \int_{\chi_1} |Y'(x) - \eta'(x)|\, dx + \int_{\chi_2} E(x, Y(x); \eta'(x), Y'(x))\, dx \\ \displaystyle > \mu_1 \int_{\chi_1} |Y'(x) - \eta'(x)|\, dx. \end{cases}$$

Sia M il massimo delle derivate parziali prime e seconde di $f(x, y, y')$ in (5); sia m il massimo di $\eta'(x)$, $\eta''(x)$. Avremo

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\left|\int_{x_1}^{x_2} [f(x, Y(x), \eta'(x)) - f(x, \eta(x), \eta'(x))]\, dx\right| \\ \displaystyle = \left|\int_{x_1}^{x_2} [Y(x) - \eta(x)] f'_y(x, \eta + \theta(Y(x) - \eta(x)), \eta'(x))\, dx\right| \leqq \rho M (x_2 - x_1). \end{cases}$$

Inoltre, integrando per parti, si ha, poichè $Y(x_1) - \eta(x_1) = Y(x_2) - \eta(x_2) = 0$,

$$\int_{x_2}^{x_1} (Y'(x) - \eta'(x)) f'_{y'}(x, Y(x), \eta'(x))\, dx$$

$$= -\int_{x_2}^{x_1} (Y(x) - \eta(x)) \{ f''_{y'x}(x, Y(x), \eta'(x)) + f''_{y'y}(x, Y(x), \eta'(x))\, Y'(x)$$
$$+ f''_{y'^2}(x, Y(x), \eta'(x))\, \eta''(x) \}\, dx$$

$$= -\int_{x_2}^{x_1} (Y(x) - \eta(x)) \{ f''_{y'x}(x, Y(x), \eta'(x)) + f''(x, Y(x), \eta'(x))\, \eta'(x)$$
$$+ f''_{y'^2}(x, Y(x), \eta'(x))\, \eta''(x) \}\, dx$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} (Y(x) - \eta(x))(Y'(x) - \eta'(x)) f''_{y'y}(x, Y(x), \eta'(x))\, dx.$$

Quindi sarà

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} (Y'(x) - \eta'(x)) f'_{y'}(x,\ Y(x),\ \eta'(x))\, dx \\ &< (2m+1) M \rho (x_2 - x_1) \\ &\quad + \int_{\chi_2} (Y(x) - \eta(x))(Y'(x) - \eta'(x)) f''_{y y'}(x,\ Y(x),\ \eta'(x))\, dx \\ &\quad + \int_{\chi_1} (Y(x) - \eta(x))(Y'(x) - \eta'(x)) f''_{y y'}(x,\ Y(x),\ \eta'(x))\, dx \\ &\leqq ((2m+1) + \varepsilon_1) M \rho (x_2 - x_1) + M \rho \int_{\chi_1} |Y'(x) - \eta'(x)|\, dx. \end{aligned}\right.$$

Portando in (8) le disuguaglianze (12), (13), (14), avremo

$$\Delta I > (\mu_1 - M\rho) \int_{\chi_1} |Y'(x) - \eta'(x)|\, dx - \rho M_1$$

con

$$M_1 = M[2(m+1) + \varepsilon_1](x_2 - x_1).$$

Onde basta supporre $\rho < \frac{\mu_1}{2M}$ e $\rho < \frac{\mu_1 \varepsilon \varepsilon_1}{2 M_1}$ per conchiudere, ricordando che per ipotesi $\chi_1 > \varepsilon_1$,

$$\Delta I > 0. \qquad \text{C. V. D.}$$

Osservazione. — Il teorema ora dimostrato differisce da quello di Lindeberg, perchè questi è costretto nel suo ragionamento a considerare solo quelle curve C le quali, oltre soddisfare alle condizioni enunciate, soddisfanno ancora ad una limitazione della forma

$$(15)\qquad |Y'(x) - \eta'(x)| \leqq R$$

dove R ha un valore fisso.

Corrispondentemente il Lindeberg può sostituire alle ipotesi (4) le ipotesi più semplici

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &f''(x,\ \eta(x),\ \eta'(x)) > 0, \\ &E(x,\ \eta(x);\ \eta'(x),\ \overline{y}') > 0 \quad \text{per} \quad 0 < |\overline{y}' - \eta'(x)| \leqq R. \end{aligned}\right.$$

È chiaro che il nostro teorema comprende quello di Lindeberg: invero dalle (16) risulta subito che si possono determinare r ed r_1 per modo che si abbiano le (4) in un campo di valori (5) di x, y, y' e per

$$0 < |\overline{y}' - \eta'(x)| \leqq R.$$

Ed allora, ragionando come sopra, si deduce subito l'affermazione del Lindeberg.

Torre Pellice (Torino), 30 settembre 1913.

Eugenio Elia Levi.

ESTRATTI DALLO STATUTO. — INFORMAZIONI DIVERSE.

(RIASSUNTO IN ITALIANO)

Le Memorie (o Note) de' Soci destinate a' "RENDICONTI", devono essere inedite e scritte in italiano, o latino, spagnuolo, francese, tedesco, inglese. Per quelle redatte in una di queste ultime 5 lingue, è richiesto l'uso della macchina da scrivere, tranne che per le formole. Se vi sono figure, i relativi « clichés » devono essere mandati da' Sigg. Autori insieme al manoscritto.

Perchè possa pubblicarsi nei "RENDICONTI", ogni manoscritto dev'essere preventivamente esaminato e approvato dal Comitato di Redazione. L'Autore ne assume, esso solo, la responsabilità scientifica.

Ogni Autore (socio del Circolo) ha diritto a 100 estratti gratis. Gli Estratti sono mandati ai Sigg. Autori a mano a mano che procede la tiratura dei fogli dei "RENDICONTI", e senza aspettare che si pubblichi il fascicolo che contiene la Memoria.

L'Ufficio di Redazione dei RENDICONTI rimane chiuso nei mesi di agosto, settembre e ottobre.

EXTRAITS DES STATUTS. — RENSEIGNEMENTS DIVERS.

(RÉSUMÉ EN FRANÇAIS)

Les Mémoires (ou Notes) des membres de la Société, destinés aux "RENDICONTI", doivent être inédits et écrits en italien, ou latin, espagnol, français, allemand, anglais. Ceux qui sont rédigés en une de ces 5 dernières langues, doivent être écrits (sauf les formules) par la machine à écrire. S'il y a des figures, les « clichés » relatifs doivent être envoyés par MM. les Auteurs en même temps que le manuscrit.

Pour être publié dans les "RENDICONTI", tout manuscrit doit être préalablement examiné et approuvé par le Comité de Rédaction. L'Auteur en garde, lui seul, la responsabilité scientifique.

Chaque auteur (membre de la Société) a droit à 100 tirages à part gratis. Les tirages à part sont envoyés à MM. les Auteurs au fur et à mesure du tirage des feuilles des "RENDICONTI", et sans attendre que paraisse le fascicule qui contient le Mémoire.

Le Bureau de Rédaction des RENDICONTI reste fermé pendant les mois d'août, septembre et octobre.

AUSZUG AUS DEN STATUTEN. — VERSCHIEDENE MITTEILUNGEN.

(AUSZUG AUF DEUTSCH).

Die für die "RENDICONTI" bestimmten Abhandlungen (oder Mitteilungen) der Gesellschaftsmitglieder dürfen noch nicht veröffentlicht sein und müssen auf italienisch, lateinisch, spanisch, französisch, deutsch oder englisch verfasst sein. Trifft eine der 5 letztgenannten Sprachen zu, so muss der Text, mit Ausnahme der Formeln, mittels Schreibmaschine geschrieben sein. Kommen Figuren vor, so müssen die betreffenden « clichés » von den Herren Verfassern gleichzeitig mit dem Manuskript eingesandt werden.

Vor Veröffentlichung in den "RENDICONTI" muss das Manuskript vom Redaktionskomité geprüft und gebilligt werden. Der Verfasser allein aber trägt die wissenschaftliche Verantwortlichkeit.

Jeder Verfasser (Mitglied der Gesellschaft) hat Anspruch auf 100 kostenfreie Sonderabdrücke. Sie werden nach Massgabe der Fertigstellung der Druckbogen der "RENDICONTI" und unabhängig vom Zeitpunkt des Erscheinens des betreffenden Heftes versandt.

Die Redaktion der RENDICONTI ist im August, September und Oktober geschlossen.

EXTRACTS FROM THE CONSTITUTION. — GENERAL INFORMATION.

(ABSTRACT IN ENGLISH)

Memoirs (or Notes) by Members of the Society intended for publication in the "RENDICONTI", must not have been previously published. They must be written in Italian, Latin, Spanish, French, German, or English, and, unless in Italian, must be type-written (except the formulae); if illustrated by diagrams, the « clichés » for the diagrams must accompany the manuscript.

No Paper can be published in the "RENDICONTI" without having been previously read and approved by the Editorial Committee. The author, however, has the sole and entire scientific responsability for his work.

Every author, who is a member of the Society, is entitled to receive gratis 100 separate copies. These separate copies will be sent him as soon as the sheets of the "RENDICONTI" leave the press, and without awaiting the publication of the number in which his work is to appear.

The Office of the RENDICONTI is closed during the months of August, September, and October.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

Fondatore e Direttore: **G. B. Guccia.**

Tomi I-XXXVI (1887-1913): **14520** pagine; **932** Memorie e Note; **322** Autori:

Abraham, Adhémar (d'), Aguglia, Alagna, Albeggiani, Almansi, Amaldi, Amato, Amici, Amoroso, Appell, Ascione, Autonne, Bagnera, Barbieri (A.), Barbieri (U.), Basset, Bauer (G.N.), Bellesini, Beltrami, Berry, Bertini, Berzolari, Bettazzi, Betti, Bianchi, Birkhoff, Blaschke, Boggio, Bohr, Bolza, Bompiani, Bonola, Borel, Bortolotti (Em.), Bortolotti (Et.), Bottasso, Bourlet, Boutroux, Brambilla, Brande, Brill (von), Brioschi, Broggi, Brusotti, Bucca (F.), Bucca (R.), Burali-Forti, Burgatti, Calapso, Caldarera (F.), Caldarera (G.M.), Cantone, Cantor (G.),

Capelli, Carathéodory, Carrone, Casorati, Castelnuovo, Catalan, Cavallaro, Cecioni, Cerruti, Certo, Cesàro, Chillemi, Chini, Ciani, Cisotti, Colonnetti, Comessatti, Conti (I.), Cordone, Cremona, Dall'Acqua, Daniele, Da Rios, David, De Donder, De Franchis, Del Pezzo, Del Re, Dickson, Dini, Di Pirro, D'Ovidio, Dulac, Dyck (von), Eiesland, Eisenhart, Emch, Enriques, Errera, Evans, Fano, Fejér, Fekete, Ferretti, Fichtenholz, Fischer, Forsyth, Fouret, Fréchet, Fredholm, Fubini, Fueter, Gambera, Garibaldi,

Gebbia, Gegenbauer, Gerbaldi, Giambelli, Gigli, Giorgi, Giraud, Giudice, Giuliani, Giulotto, Godeaux, Gordan, Grossi, Gronwall, Grousinzeff, Guccia, Guldberg, Haar, Hadamard, Hahn, Halphen, Hanna, Hayashi, Hermite, Hilbert, Hirst, Hudson, Humbert, Insolera, Jackson (D.), Jackson (F.H.), Jahnke, Jonquières (de), Jordan, Jung (G.), Jung (H.W.E.), Kantor, Kasner, Kerbedz, Keyser, Klein, Kneser, Knopp, Koch (von), König (D.), Kœnigs, Koenigsberger, Kohn, Kolossoff, Korn, Korteweg, Laisant, Landau, Lauricella,

Lazzeri, Lebesgue, Lebon, Lecat, Levi (B.), Levi (E. E.), Levi (F.), Levi-Civita, Lévy, Lichtenstein, Liebmann, Lindelöf (E.), Lo Monaco-Aprile, Loria, Lovett, Ludwig, Lüroth, Lusin, Maccaferri, Maisano, Mannheim, Marcolongo, Marletta, Martinetti, Martinotti, Mattson, Medici, Medolaghi, Mineo, Mittag-Leffler, Mohrmann, Mollerup, Montesano, Montessus (de), Moore (E. H.), Morale, Morera, Moulton, Murer, Nalli, Neumann (E.R.), Nicoletti, Nielsen, Nobile, Norlund, Noether (M.), Occhipinti, Orlando, Osgood, Paci, Pál, Pannelli, Pascal,

Paternò (F. P.), Peano, Pennacchietti, Pensa, Pepoli, Pérès, Perna, Perron, Petrovitch (M.), Pexider, Phragmén, Picard, Pick, Picone, Pieri, Pincherle, Pisati, Pizzetti, Plancherel, Poincaré, Pólya, Pompeiu, Porro, Pucciano, Puglisi, Quanjel, Quintili, Rabinovitch, Rados, Rémoundos, Retali, Reye, Ricci, Riesz (M.), Rindi, Rodenberg, Rosati, Rosenblatt, Sannia (G.), Santangelo, Sbrana, Schlegel, Schmidt (E.), Schnee, Schoenflies, Schoute, Scorza, Segre, Sellerio, Severi, Severini, Sforza, Sibirani, Signorini,

Silla, Sinigallia, Sire, Slobin, Soler, Somigliana, Stäckel, Starkoff, Steffensen, Stekloff, Stéphanos, Sterneck (von), Strazzeri, Studnicka, Study, Stuyvaert, Szücs, Tamarkine, Tedone, Terracini, Toeplitz, Toffoletti, Tonelli (L.), Torelli (G.), Torelli (R.), Tortorici, Trafelli, Turrière, Tweedie, Tzitzéica, Usai, Vallée Poussin (de la), Veblen, Veneroni, Venturi, Veronese, Villat, Visalli, Vitali, Viterbi, Vivanti, Volterra, Vries (J. de), Watson, Weber (E. von), Weber (H.), Weierstrass, Weitzenbock, Weyl, Young (J.W.), Young (W.H.), Zaremba, Zeuthen

Franco di porto	Collezione completa dei Tomi **I-XXXVI**	L. **620**	In oro per l'estero.
	Ciascuno dei Tomi **I-XVIII** (*I Tomi XIX e XX non si vendono che in collezione*).	L. **15**	
	Ciascuno dei Tomi **XXI-XXXVI**	L. **20**	

Inviare vaglia postale o chèque all'indirizzo:

TESORIERE DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO, 30, via Ruggiero Settimo — PALERMO (Italia).

Tipografia Matematica di Palermo, Piazza Regalmici, vicolo Guccia, 11. (1018.1100.1) 6-11-1915.

Offerto dall'Autore.

Pubblicazione bimestrale.

TOMO XXXVII. **ANNO 1914.**

SEMESTRE

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

DIRETTORE: G. B. GUCCIA.

ADUNANZA DEL 9 NOVEMBRE 1913.

EUGENIO ELIA LEVI

Sopra un teorema del Calcolo delle variazioni del sig. Lindeberg.

(Estratto).

DIREZIONE E REDAZIONE:

30, VIA RUGGIERO SETTIMO — PALERMO (ITALIA).

(Segue in 3ª pagina).

evi, {

Offerto dall'Autore.

ESTRATTO

DAGLI *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.*

Sui criterii sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle Variazioni.

(*Di* Eugenio Elia Levi, *a Genova.*)

INTRODUZIONE.

1. Nella storia del calcolo delle variazioni, il periodo che principia con Weierstrass e con Darboux ha carattere affatto diverso dal periodo precedente. Lagrange invero, — che per il primo diede forma analitica rigorosa, indipendente da considerazioni geometriche, ai principii del calcolo delle variazioni, — sviluppa il pensiero di applicare a tali problemi i metodi del Calcolo Infinitesimale: egli si preoccupa di scindere la variazione totale dell'integrale in parti di diverso ordine infinitesimale, e tale spezzamento ottiene col considerare le variazioni prima, seconda, terza, ecc.: posto questo fondamento, Lagrange stesso ed i matematici che lo seguono, in speciale modo Legendre e Jacobi, non fanno che studiare con convenienti trasformazioni queste diverse parti della variazione totale. Ma l'osservazione di Weierstrass sulle variazioni forti delle funzioni rese evidente che lo spezzamento della variazione totale nelle variazioni degli ordini successivi, non è sufficiente allo scopo: ed i metodi di Weierstrass, sia nella loro forma primitiva, sia in quella di Hilbert-Beltrami, sia nella veste geometrica di Darboux e Kneser, consistono nel trasformare direttamente, e con artifici elegantissimi, la variazione totale.

Però mi pare indubbio che il concetto direttivo dei matematici anteriori a Weierstrass, come quello che più direttamente si connette colla concezione infinitesimale, rivesta un carattere più generale: l'obbiezione di Weierstrass richiama solo la nostra attenzione sul fatto che lo spezzamento della variazione totale nelle variazioni dei successivi ordini non è il più adeguato per scinderla in parti che *siano di diverso comportamento infinitesimale quando si faccia tendere a zero soltanto la massima distanza dei punti della curva* *variata dalla curva che si considera*, e non si faccia contemporaneamente tendere a zero l'angolo delle tangenti. Onde — pur facendo astrazione dai numerosi casi in cui il concetto di campo di estremali, che è fondamento della trasformazione di WEIERSTRASS, non può applicarsi — mi pare che lo sforzo di ritornare al concetto direttivo di LAGRANGE possa essere stimato utile: specialmente poi quando si voglia, come pare tendenza dei contemporanei (*), considerare il Calcolo delle Variazioni come un capitolo di un futuro Calcolo Funzionale.

In alcune Note (**) ho mostrato appunto come, modificando leggermente lo spezzamento della variazione totale, e mediante trasformazioni sostanzialmente identiche a quelle usate da LAGRANGE, LEGENDRE e JACOBI per la variazione seconda, si possa provare la sufficienza delle ordinarie condizioni di minimo dell'integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx, \tag{1}$$

senza far uso del campo di estremali: già in quel luogo avvertivo che la mia dimostrazione si prestava a trattare molti casi in cui il metodo di WEIERSTRASS è in difetto. Mi propongo di riprendere quello studio in questa Memoria.

Nel Capitolo I riespongo la dimostrazione per l'integrale (1), semplifico i calcoli usati in quei lavori rendendoli insieme più facilmente generalizzabili: inoltre completo la dimostrazione sopra un punto assai importante che poteva sollevare difficoltà. Aggiungo brevemente come si debba modificare il procedimento quando uno od entrambi gli estremi sono variabili.

Nel Capitolo II studio delle condizioni sufficienti per il minimo (o per il massimo) di un integrale della forma

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \ldots, y^{(p)})\, dx \qquad (p > 1). \tag{2}$$

È noto (***) che questo problema è uno dei più semplici tra quelli che sfuggono alla teoria di WEIERSTRASS. Invero la teoria di WEIERSTRASS, al-

(*) Cfr. ad es. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des Variations*.

(**) *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle Variazioni*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 4 Note nel vol. XX (2.° sem. 1911) e XXI (1.° sem. 1912).

(***) Cfr. ZERMELO, *Untersuchungen über Variationsrechnung*. Dissertazione di Berlino, 1894. HADAMARD, loc. cit., Cap. V del libro III, pag. 458 e ss. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*. Cap. VI, pag. 193 e ss.

meno allo stato attuale, serve a trovare quando l'estremale $\mathfrak{E}$ di equazione $y = \eta(x)$ dà all'integrale (2) il valore minimo rispetto alle curve $\mathfrak{L}$ di equazione $y = y(x)$, che per un valore convenientemente piccolo del numero r soddisfanno alle disuguaglianze

$$|y - \eta| \leq r, \quad |y' - \eta'| \leq r, \ldots, \quad |y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)}| \leq r; \tag{3}$$

e non già — come si dovrebbe fare ove si volesse il caso veramente analogo al minimo forte dell'ordinaria teoria — quando per le $\mathfrak{L}$ si ammetta soltanto di potere imporre di soddisfare alla prima delle precedenti disuguaglianze. Riservandomi di distinguere più precisamente nel n.° 1 del Cap. II i varii tipi di minimo possibili per l'integrale (2), dirò qui soltanto che la nuova dimostrazione permette di spingere la ricerca alquanto più avanti, e di trovare condizioni sufficienti perchè $\mathfrak{E}$ dia il minimo rispetto alle curve $\mathfrak{L}$ che soddisfanno alle limitazioni

$$|y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)}| \leq \rho_{p-1} \tag{4}$$

$$|y - \eta| < r, \tag{5}$$

dove r è un numero convenientemente piccolo e ρ_{p-1} è un numero finito *prefissato* anche arbitrariamente grande. Non mi è riuscito di togliere la condizione (4): nell'ultimo numero mostro su esempi come qui si presenti una difficoltà di natura in certo modo nuova: e precisamente come, quando per le curve variate $\mathfrak{L}$ si voglia togliere la condizione (4), occorra certamente introdurre per $\mathfrak{E}$ delle condizioni di tipo diverso da quelle che sono ordinariamente note quali condizioni sufficienti.

CAPITOLO I.

L'integrale $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$.

1. *Posizione del problema.* Sia assegnato l'integrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx, \tag{1}$$

e si supponga che in una certa regione R del piano xy e per tutti i valori limiti di y la funzione $f(x\,y\,y')$ sia, colle denominazioni di Bolza (*), di classe C''': fissati in R i due punti $P_1 = (x_1\,y_1)$, $P_2 = (x_2\,y_2)$ si indichi con $\mathfrak{C}$ l'estremale che congiunge P_1 con P_2: sia

$$y = \eta(x) \tag{2}$$

la sua equazione, e si supponga che $\mathfrak{C}$ cada in R. Indicheremo colle lettere greche $\varphi(x)$, $\varphi'_y(x)$, $\varphi''_{yy}(x)$,... i valori di f, f'_y, f''_{yy},... calcolati quando per y e y' si mettano $\eta(x)$ ed $\eta'(x)$: la η soddisfa l'equazione di Eulero, che con tale notazione si scrive:

$$\frac{d}{dx}\varphi'_{y'} - \varphi'_y = \varphi''_{y'y'}\eta'' + \varphi''_{yy'}\eta' + \varphi''_{xy'} - \varphi'_y = 0; \tag{3}$$

onde segue che qualunque sia la funzione $\zeta(x)$ di classe C' si ha

$$\int_{x_1}^{x_2}(\varphi'_y\zeta + \varphi'_{y'}\zeta')\,dx = \zeta(x_2)\,\varphi'_{y'}(x_2) - \zeta(x_1)\,\varphi'_{y'}(x_1); \tag{4}$$

che se ζ si annulla negli estremi diviene

$$\int_{x_1}^{x_2}(\varphi'_y\zeta + \varphi'_{y'}\zeta')\,dx = 0. \tag{5}$$

Indicheremo con $\mathfrak{L}$ una curva variata qualunque che cada in R e passi per P_1 e P_2, sia

$$y = y(x) = \eta(x) + z(x) \quad \text{con} \quad z(x_1) = z(x_2) = 0 \tag{6}$$

la sua equazione: sappiamo che, volendo studiare se $\mathfrak{C}$ dà ad I il minimo valore rispetto alle curve di classe D', ci si può limitare a considerare il caso che $\mathfrak{L}$ sia di classe C'' od anche sia analitica (**): così noi faremo nel seguito per maggior semplicità, sebbene nessuna difficoltà essenziale porterebbe l'adottare senz'altro ipotesi più larghe.

2. *Trasformazione e partizione della variazione totale.* Indichi $u(x)$ una soluzione dell'equazione di Jacobi:

$$\Psi(u) = \left(\varphi''_{yy} - \frac{d\,\varphi''_{yy'}}{dx}\right)u - \frac{d}{dx}(\varphi''_{y'y'}\,u') = 0; \tag{7}$$

(*) Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Pag. 13 e ss.

(**) Bolza, l. c., pag. 85 e ss.; Hadamard, l. c., pag. 51 e ss.

e si supponga $\mathfrak{L}$ tale che si abbia

$$z(x) = u(x)\, z_1(x), \tag{8}$$

$z_1(x)$ essendo una funzione di classe C'' nel tratto (x_1, x_2): ciò avverrà sempre, qualunque sia $\mathfrak{L}$, quando l'estremale $\mathfrak{E}$ soddisfaccia alla *condizione di Jacobi* nel tratto (x_1, x_2), poichè allora esiste una soluzione di (7) sempre $\neq 0$ in (x_1, x_2); e basta prendere per $u(x)$ tale soluzione, e porre $z_1(x) = \dfrac{z(x)}{u(x)}$.

È noto che si ha per (7), qualunque sia ζ, l'identità

$$\left.\begin{aligned} &\varphi''_{y^2}(\zeta u)^2 + 2\varphi''_{yy'}\zeta u \frac{d(\zeta u)}{dx} + \varphi''_{y'^2}(2\zeta\zeta' u u' + \zeta^2 u'^2) \\ &\qquad\qquad = \frac{d}{dx}\left[\zeta^2 u(\varphi''_{yy'} u + \varphi''_{y'^2} u')\right]^{(*)}; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

da cui, ponendo $\zeta = z_1$, e ricordando che $z_1 u = z$ si annulla negli estremi x_1 ed x_2, si avrà, integrando tra x_1 e x_2,

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\varphi''_{y^2} z^2 + 2\varphi''_{yy'} z z' + \varphi''_{y'^2}(2 z_1 z'_1 u u' + z_1^2 u'^2)\right] dx = 0. \tag{10}$$

È possibile, ciò posto, dare per la variazione totale uno spezzamento in parti di diverso comportamento infinitesimale che sarà fondamentale per il seguito. Poniamo come al solito

$$E(x, y;\, y', \bar{y}') = f(x, y, \bar{y}') - f(x, y, y') - (\bar{y}' - y')\, f'_{y'}(x, y, y'). \tag{11}$$

Per (6) e (8) avremo subito l'identità

$$\left.\begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_1}^{x_2}\left[f(x, y, \bar{y}') - \varphi\right] dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} E(x, y;\, y' + z_1 u', \bar{y}')\, dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2}\left[f(x, y, y' + z_1 u') - \varphi - z'_1 u\, f'_{y'}(x, y, y' + z_1 u')\right] dx. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(*) Cfr. Bolza, l. c., pag. 64, formula (16) (in nota). Questa non è altro che la formula fondamentale per la forma data da Jacobi alla trasformazione di Legendre della variazione seconda.

Ma per la formula di TAYLOR si ha

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \eta' + z_1 u') &= \varphi + (\varphi_y z + \varphi_{y'} z_1 u') + \\ &\qquad \frac{1}{2}(\varphi_{yy} z^2 + 2\varphi_{yy'} z z_1 u' + \varphi_{y'y'} z_1^2 u'^2) + \lambda_1 z_1^3 \\ f_{y'}(x, y, \eta' + z_1 u') &= \varphi_{y'} + (\varphi_{yy'} z + \varphi_{y'y'} z_1 u') + \lambda_2 z_1^2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

con

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{3!}\left[f'''_{yyy} u^3 + 3 f'''_{yyy'} u^2 u' + 3 f'''_{yy'y'} u u'^2 + f'''_{y'y'y'} u'^3\right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2!}\left[\bar{f}'''_{yyy'} u^2 + 2 \bar{f}'''_{yy'y'} u u' + \bar{f}'''_{y'y'y'} u'^2\right]; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

in queste formule le f''' e le $\bar{f}'''$ indicano valori delle derivate terze di f calcolati in convenienti punti della forma

$$(x, \eta + \theta z_1 u, \eta' + \theta z_1 u') \qquad (x, \eta + \bar{\theta} z_1 u, \eta' + \bar{\theta} z_1 u') \tag{15}$$

con $0 < \theta < 1$, $0 < \bar{\theta} < 1$.

Sostituiamo le (13) in (12), e ordiniamo per le potenze di z_1 e z'_1: è facile vedere che i due integrali che portano sui termini di primo e di secondo grado, sono identici rispettivamente all'integrale (5) ove si ponga $\zeta = z$, e all'integrale (10): onde sono identicamente nulli. Cosicchè infine si avrà:

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y')\, dx + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 z_1^3 + \lambda_2 u z_1^2 z'_1)\, dx. \tag{16}$$

È questa la formula cercata: mostreremo nei numeri che seguono, come, almeno sotto certe condizioni, il primo integrale diviene infinitesimo di ordine inferiore al secondo al tendere a 0 del massimo di z: onde esso rappresenta la parte principale di ΔI (*).

(*) Può interessare il confrontare la (16) collo spezzamento di ΔI cui porterebbe il metodo delle variazioni: per esso si avrebbe

$$\Delta I = \delta^2 I + \mathbf{P} \quad \text{dove} \quad \delta^2 I = \int_{x_1}^{x_2} \delta^2 f\, dx, \quad \mathbf{P} = \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{A}_1 z_1^3 + \mathbf{A}_2 z_1^2 z'_1 + \mathbf{A}_3 z_1 z'^2_1 + \mathbf{A}_4 z'^3_1)\, dx.$$

L'osservazione di WEIERSTRASS consiste essenzialmente nel far notare che tale partizione è inadeguata, perchè in $\mathbf{P}$ entrano perfino termini in z'^3_1 che non è affatto detto che tendano a zero quando tende a zero z_1 e *non* z'_1. Analoga alla precedente è la (16); ma nel primo integrale di questa compare la funzione E in luogo della $\delta^2 f$: chi confronti la funzione E colla $\delta^2 f$, si persuaderà facilmente che ciò equivale ad aggiungere a $\delta^2 I$, nel formare la parte principale di ΔI, la parte di $\mathbf{P}$ dipendente da $z_1 z'^2_1$ e z'^3_1.

3. *Primo teorema sulle condizioni sufficienti: la y' delle curve variate resta in un campo finito.* Incomincieremo col caso più semplice, in cui si voglia esaminare se $\mathfrak{C}$ dà ad I il minimo valore rispetto alle curve $\mathfrak{L}$ per cui

$$|y' - \gamma_0'| \leq \rho_1 . \tag{17}$$

È facile mostrare che *se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

1.° *è* $\varphi''_{y'^2} = f''_{y'^2}\Big(x, \gamma_0(x), \gamma_0'(x)\Big) > 0$ *(condizione di Legendre),*

2.° *è* $E(x, \gamma_0; \gamma_0', y') > 0$ *per* $x_1 \leq x \leq x_2$, $0 < |y' - \gamma_0'| \leq \rho_1$ *(condizione di Weierstrass),*

3.° *il punto x'_1 coniugato a destra di x_1 segue x_2 (condizione di Jacobi), si può trovare un r tale che $\mathfrak{C}$ dà ad I il minimo valore rispetto alle curve variate $\mathfrak{L}$ per P_1 e P_2, per cui*

$$|z| = |y - \gamma_0| \leq r \qquad |z'| = |y' - \gamma_0'| \leq \rho_1 \ (*).$$

Premettiamo alcuni lemmi.

Lemma I. *Se $\zeta(x)$ è una funzione nulla in a o in b, a derivata limitata* (**) *in (a, b) $(a \leq b)$, si ha*

$$\int_a^b \zeta^2 \, dx \leq K \int_a^b \zeta'^2 \, dx \qquad K = \frac{(b-a)^2}{2} . \tag{18}$$

Infatti, supposto per es.: $\zeta(a) = 0$ si ha per la formula di Schwarz: $\zeta^2(x) = \left(\int_a^x \zeta'(x)\, dx\right)^2 \leq (x-a)\int_a^x \zeta'^2 \, dx$; e quindi per la formula di Dirichlet (***)

$$\int_a^b \zeta^2 \, dx \leq \int_a^b (x-a)\, dx \int_a^x \zeta'^2(\xi)\, d\xi = \int_a^b \zeta'^2(\xi)\, d\xi \int_\xi^b (x-a)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \Big[(b-a)^2 - (x-a)^2\Big] \zeta'^2 \, dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b \zeta'^2 \, dx \qquad \text{c. v. d.}$$

(*) È noto che queste condizioni sono pure necessarie, almeno prese in senso largo. Cfr. Bolza, l. cit., pag. 126. Lindeberg, *Math. Annalen*, Bd. 69 (1904), pag. 334.

(**) E quindi integrabile insieme col suo quadrato almeno nel senso di Lebesgue.

(***) La formula di Dirichlet consiste essenzialmente nella formula della riduzione di un integrale doppio ad integrali semplici; e quindi qui vale, poichè esiste l'integrale doppio della funzione $(x-a)\,\zeta'^2(\xi)$.

Lemma II. *Nelle stesse ipotesi si ha*

$$\int_a^b \zeta\zeta' \, dx \leq K_1 \int_a^b \zeta'^2 \, dx \qquad K_1 = \frac{(b-a)^2+2}{4}. \tag{19}$$

Basta osservare che $\zeta\zeta' \leq \frac{1}{2}(\zeta^2 + \zeta'^2)$, e applicare la (18).

Lemma III. *Se $\zeta(x)$ è una funzione a derivata limitata in (x_1, x_2), nulla in x_1 e in x_2, e si suppone ad es.: $x_1 \leq x_2$ si ha*

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \zeta^2 \, dx \leq K' \int_{x_1}^{x_2} \zeta'^2 \, dx \ (*), \qquad && K' = \frac{(x_1 - x_2)^2}{8} \\ &\int_{x_1}^{x_2} \zeta\zeta' \, dx \leq K'_1 \int_{x_1}^{x_2} \zeta'^2 \, dx, \qquad && K'_1 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + 8}{16}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Sia x_3 il punto medio di $(x_1\, x_2)$: e si applichino alla funzione ζ i lemmi I e II, prendendo come intervallo $(a\, b)$ prima $(x_1\, x_3)$, e poi $(x_3\, x_2)$: si ottengono subito le (20).

Ciò posto, veniamo al nostro teorema. Per 3.º esiste una soluzione $u(x)$ dell'equazione (7) finita e continua e $\neq 0$ in $(x_1\, x_2)$: possiamo supporre $u > 0$, e precisamente

$$0 < m_1 \leq u \leq m_2, \qquad |u'| \leq m_3. \tag{21}$$

Come si osservò, si può allora, qualunque sia la curva variata $\mathfrak{L}$, fare la posizione (8), e dare alla variazione totale la forma (16). D'altra parte, se poniamo

$$\left.\begin{aligned} &E_1(x, y; \bar{y}', y') = \frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{(\bar{y}' - y')^2} \qquad && \text{per } \bar{y}' \neq y' \\ &E_1(x, y; y', y') = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y, y'), && \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

e noto che la funzione $E_1(x, y; \bar{y}', y')$ risulta definita come funzione continua di $x, y, \bar{y}', y'$, almeno finchè x, y è in R e $\bar{y}', y'$ sono finite. Le ipotesi 1.º e 2.º ci dicono che $E_1(x, y_0; y_0', \bar{y}') > 0$ per $x_1 \leq x \leq x_2$, $|\bar{y}' - y_0'| \leq \rho_1$; per la continuità si può dunque trovare tre numeri positivi r_1, r_2, ρ tali che per

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad |y - y_0| \leq r_1, \quad |y' - y_0'| \leq r_2, \quad |\bar{y}' - y_0'| \leq \rho_1,$$

(*) Questa prima formula è di Hadamard (l. cit., pag. 334-335) il quale dà anzi per K' il valore $\frac{(x_1 - x_2)^2}{\pi^2}$, che è minore del precedente, e che può esser realmente raggiunto. Ho riprodotto qui, dalle mie citate Note Lincee, la presente dimostrazione elementare, perchè dei ragionamenti qui tenuti faremo uso più oltre al n. 6.

sia sempre

$$E_1(x, y;\ y', y) > \mu. \tag{23}$$

Se quindi, indicando con r un'indeterminata $< r_1$ e $< \frac{m_1 r_2}{m}$ supponiamo $|z| < r$ e quindi $|z_1| < \frac{r}{m_1} < \frac{r_2}{m_1}$, avremo per le (21) e (22),

$$E(x, y;\ y' + z_1 u', y') = E_1(x, y;\ y' + z_1 u', y')\, z_1'^2 u'^2 > \mu\, m_1 z_1'^2;$$

e quindi

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y;\ y' + z_1 u', y')\, d x > \mu\, m_1 \int_{x_1}^{x_2} z_1'^2\, d x. \tag{24}$$

D'altra parte, se chiamiamo M il massimo delle derivate terze di $f(x\, y\, y')$ per $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $|y - \bar y| \leqq r_1$, $|y' - \bar y'| \leqq r_2$, i coefficienti f''', f'' delle λ_1 e λ_2, date da (14), (15), saranno se $|z| < r$, inferiori a M: e quindi per (21) si avrà

$$|\lambda_1| < \frac{1}{3\,!} M (m_2 + m_3)^3, \qquad |\lambda_2| < \frac{1}{2\,!} M (m_2 + m_3)^2.$$

Onde per le (20), (21) avremo

$$\left.\begin{aligned} \left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_1 z_1^3\, d x\right| &< \frac{M}{6} (m_2 + m_3)^3 \frac{r}{m_1} \int_{x_1}^{x_2} z_1^2\, d x < \frac{M}{6 m_1} (m_2 + m_3)^3 K\, r \int_{x_1}^{x_2} z_1'^2\, d x \\ \left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_2\, u\, z_1^2 z_1'\, d x\right| &< \int_{x_1}^{x_2} |\lambda_2\, z\, z_1\, z_1'|\, d x < \frac{M}{2} (m_2 + m_3)^2 r \int_{x_1}^{x_2} |z_1 z_1'|\, d x < \\ &\quad \frac{M}{2} (m_2 + m_3)^2 K'_1\, r \int_{x_1}^{x_2} z_1'^2\, d x. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Le (24), (25) dimostrano che, nelle ipotesi del nostro teorema, effettivamente, come si era detto, il secondo integrale di (16) diventa infinitesimo di ordine superiore al primo quando r tende a zero: e poichè il primo è positivo, tale sarà pure $\Delta\, I$ per r sufficientemente piccolo. Precisamente da (16), (24) e (25) si ha

$$\left.\begin{aligned} \Delta\, I &> (\mu\, m_1^2 - r\, H'_1) \int_{x_1}^{x_2} z_1'^2\, d x \\ H'_1 &= \frac{M (m_2 + m_3)^2}{6\, m_1} \left|(m_2 + m_3) K + 3\, K'_1\, m_1\right|. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Onde basta supporre che, oltre alle disuguaglianze $r < r_1$, $r < \frac{m_1 r_2}{m_2}$, r soddisfi pure alle $r < \frac{\mu m_1}{H_1}$ perchè sia $\Delta I > 0$: e ciò dimostra il teorema.

4. *Osservazioni sull'estensione al caso generale.* Il precedente ragionamento non si può senz'altro applicare al caso generale in cui la curva variata abbia inclinazione qualunque per la seguente ragione: dalle ipotesi 1.° e 2.° seguirà ancora che $E_1(x, \eta; \eta', y') > 0$, ma potendo ora variare y' da $-\infty$ a $+\infty$, non si potrà più dedurre la (23); e tale disuguaglianza non si può neppure dedurre ove l'ipotesi 2.° fosse, come si usa, sostituita dall'altra $E(x, y; \bar{y}', y') > 0$ per tutti i valori di y e $\bar{y}'$ sufficientemente prossimi a η ed η'. Perchè quindi si possa trarre dal precedente ragionamento qualche conclusione, converrà proprio portare la (23) tra le ipotesi del teorema: si avrà così che:

Se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1.° *esistono tre numeri positivi* r_1, r_2, μ *tali che per* $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $|y - \eta| \leqq r_1$, $|\bar{y}' - \eta'| \leqq r_2$ *sia* $E_1(x, y; \bar{y}', y) \geqq \mu$,

2.° *il punto* x'_1 *coniugato di* x_1 *a destra segue* x_2,

si può trovare un $r \leqq r_1$ *tale che* $\mathfrak{C}$ *dia ad* I *il minimo rispetto alle curve* $\mathfrak{L}$ *passanti per* P_1 *e* P_2 *per cui* $|y - \eta| \leqq r$.

E alla 1.° si può anche sostituire l'altra, apparentemente meno restrittiva, che *esistano due numeri positivi* r_1 *e* μ_1 *tali che per* $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $|y - \eta| \leqq r_1$ *sia* $E_1(x, y; \eta', y') \geqq \mu_1$ (*).

(*) Invero proviamo che da questa condizione segue che si può determinare un r_2 tale che valga la 1.°. Fissato arbitrariamente un r_3, sia M_1 il massimo valore di $f''_{y'}(x, y, y')$ per $(x\, y)$ in E, $|y' - \eta'| \leqq r_3$. Si consideri ora $E_1(x, y; \bar{y}', y')$: e si distinguano due casi secondo che è $|y' - \eta'| \leqq 3\, r_3$ o $|y' - \eta'| > 3\, r_3$. Nel caso in cui $|y' - \eta'| \leqq 3\, r_3$ si può ragionare come nel numero precedente: E_1 essendo funzione continua, e le variabili variando in un campo finito, da $E_1(x, y; \eta', y') \geqq \mu_1$ segue che, fissato un $\mu < \mu_1$: ad es.: $\mu = \frac{\mu_1}{8}$, si può determinare un r'_2 tale che, per $|\bar{y}' - \eta'| < r'_2$, $|y' - \eta'| \leqq 3\, r_3$, sia $E_1(x, y; \bar{y}', y') \geqq \mu$. Se $|y' - \eta'| > 3\, r_3$ si chiami r''_2 un numero $< r_3$ e $< \frac{\mu_1 r_3}{3 M_1}$: poichè $\frac{\partial E}{\partial \bar{y}'} = (y' - \bar{y}')\, f''_{y'}(x, y, \bar{y}')$ si avrà

$$E_1(x, y; \bar{y}', y') = \frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{(y' - \bar{y}')^2} = \frac{E(x, y; \bar{y}', y') - E(x, y; \eta', y')}{(y' - \bar{y}')^2} + E_1(x, y; \eta', y') \left(\frac{\eta' - y'}{\bar{y}' - y'}\right)^2 =$$

$$= f''_{y'}(x, y, \tilde{y}') \frac{\bar{y}' - \eta'}{y' - \bar{y}'} \frac{y' - \tilde{y}'}{y' - \bar{y}'} + E_1(x, y; \eta', y') \left(\frac{\eta' - y'}{\bar{y}' - y'}\right)^2$$

Tale teorema non è però soddisfacente, perchè non serve a riconoscere che $\mathfrak{C}$ dà il minimo in buon numero di casi in cui la cosa risulta dall'ordinaria teoria. Così se $I=\int_{x_0}^{x_1} G(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ con $G>0$, si vede subito che E_1 tende sempre a zero col tendere di y' a ∞: onde non risultano soddisfatte le precedenti condizioni; mentre è noto che ogni estremale dà effettivamente il minimo quando soddisfa alla condizione di Jacobi (*).

Ma pur basandosi sempre sulla (16) si può giungere a ritrovare proprio l'ordinario teorema: occorre però dimostrare innanzi tutto alcune proprietà della funzione $E(x, y; \overline{y}', y)$ quando y' tende a ∞, e completare con nuovi lemmi quelli del n. 3.° Ciò faremo nei n. 5 e 6.

5. *Sul comportamento di $E(x, y; \overline{y}', y')$ quando y' tende a ∞.* Dimostriamo che *se in un campo finito e chiuso T di valori di x, y, y' sono soddisfatte le condizioni seguenti*

1.° $f''_{y'^2}(x, y, \overline{y}') > 0$,

2.° $E(x, y; \overline{y}', y') > 0$ *per* $0 < |y' - \overline{y}'|$,

per ogni sistema di valori di $x, y, \overline{y}'$ interno a T, la $E(x, y; \overline{y}', y')$ diviene infinita di primo ordine almeno per y' tendente a ∞. O con maggior generalità e precisione diciamo che, nelle dette ipotesi, *se T_1 è un campo chiuso contenuto in T, — per il quale esiste un $\delta > 0$ tale che ogni punto di T_1 sia il punto di mezzo di un segmento di lunghezza 2δ, parallelo all'asse delle y', e totalmente contenuto in T_1 — allora si possono determinare due numeri positivi*

---

y' indicando un valore tra η' e $\overline{y}'$: ora per $|\overline{y}'-\eta'|< r''_2$ è $|\overline{y}'-y'|>2r_3$, e $|y'-\overline{y}'|< r''_2 < r_3$: onde:

$$\left|\frac{y'-y'}{y'-y'}\right| \leq 1+\left|\frac{y'-\overline{y}'}{y'-y'}\right| < 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};$$

$$\left|\frac{y'-\eta'}{y'-y'}\right| < \frac{r''_2}{2r_3}; \qquad \frac{\eta'-y'}{y'-y'} = 1-\frac{\overline{y}'-\eta'}{y'-y'} > 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

quindi si avrà

$$E_1(x, y; \overline{y}', y') > -M_1\frac{3r''_2}{4r_3}+\frac{\mu_1}{4} > \frac{\mu_1}{8} = \mu.$$

Basterà quindi prendere per r_2 il minore dei numeri r'_2 e r''_2.

Nelle mie note citate è contenuta soltanto la dimostrazione di questo teorema: incorrettamente in principio della 2.ª nota è enunciato il teorema più generale (pag. 466 del Vol. XX, 2.° sem. 1911) che invece sarà dimostrato più oltre al n.° 7. La dimostrazione qui esposta è alquanto più semplice di quella delle note citate.

(*) Bolza, l. c., pag. 124.

ρ_1 e μ_1 tali che se $|y' - \bar{y}'| > \rho_1$ e $(x, y, \bar{y}')$ è in T_1 si ha

$$E(x, y; \bar{y}', y') > \mu_1 \, |y' - \bar{y}'| \; (*). \tag{27}$$

Facciamo tendere anzitutto y' a $+\infty$: poichè T e quindi T_1 sono finiti, $y' - \bar{y}'$ da un certo punto in poi è positivo. Consideriamo il limite inferiore di indeterminazione di $\frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{y' - \bar{y}'}$ per $y' = +\infty$: $\lim\limits_{y'=+\infty} \frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{y' - \bar{y}'}$; e chiamiamo ν e ν_1 i valori di esso secondo che pensiamo $(x, y, \bar{y}')$ variabile in T o in T_1: per la condizione 2.ª è $\nu_1 \geqq \nu \geqq 0$: il nostro teorema si può enunciare dicendo che $\nu_1 > 0$: basta quindi provare che non può essere $\nu_1 = 0$.

Si ricordi sempre che T e T_1 sono campi limiti, che $f(x, y, y')$ è finita e continua in T: si avrà uniformemente in T

$$\lim_{y'=+\infty} \frac{y' - \bar{y}'}{y'} = 1, \quad \lim_{y'=+\infty} \frac{f(x, y, \bar{y}')}{y' - \bar{y}'} = 0;$$

onde, per la definizione di $E(x, y; \bar{y}', y')$, si avrà l'uguaglianza

$$\lim_{y'=+\infty} \frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{y' - \bar{y}'} = \lim_{y'=+\infty} \left[\frac{f(x, y, y')}{y'} - f'_{y'}(x, y, \bar{y}') \right]; \tag{28}$$

ν e ν_1 sono dunque i valori del secondo membro di (28) per $(x, y, \bar{y}')$ variabile in T o T_1 rispettivamente.

Sia γ il minimo di $f''_{y'y'}(x, y, y')$ in T: per la condizione 1.ª sarà $\gamma > 0$: e se i punti x_1, y_1, y', per cui $y'_1 \leqq y' \leqq y'_1 + \delta$ sono di T, si avrà la disuguaglianza

$$\left.\begin{aligned} f'_{y'}(x_1, y_1, y'_1 + \delta) = f'_{y'}(x_1, y_1, y'_1) + \delta f''_{y'y'}(x_1, y_1, y'_1 + \theta\delta) > \\ > f'_{y'}(x_1, y_1, y'_1) + \delta\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Ciò posto, si supponga $\nu_1 = 0$: per la definizione del limite inferiore di indeterminazione, preso il numero $\frac{\gamma\delta}{2} > \nu_1 = 0$, e fissato un L arbitrariamente grande, si può trovare un sistema di valori $(x_1, y_1, \bar{y}'_1, y'_1)$ tale che

(*) Se T_1 è un punto interno a T, questo teorema si riduce al teorema enunciato sopra. Ma il secondo teorema è più *generale* del precedente, in quanto la condizione imposta a T_1 non porta che esso sia tutto di punti *interni* a T, chè anzi può contenere punti del contorno di T; ed inoltre è più *preciso* in quanto equivale ad enunciare che $E(x\,y;\,\bar{y}'\,y')$ diviene infinita di 1.º ordine *uniformemente* al variare di $(x\,y\,\bar{y}')$ in T_1.

(x_1, y_1, y'_1) sia di T_1, $y'_1 > L$ e che $\frac{f(x_1, y_1, y'_1)}{y'_1} - f'_{y'}(x_1, y_1, y'_1) < -\frac{\gamma\delta}{2}$. Per le ipotesi fatte su T_1 e per (29) sarà dunque

$$\frac{f(x_1, y_1, y'_1)}{y'_1} - f'_{y'}(x_1, y_1, y'_1 + \delta) < -\frac{\gamma\delta}{2};$$

quindi, assegnato un L grande a piacere, si può trovare un sistema di valori $(x_1, y_1, y_1 + \delta, y'_1)$ tale che sia $y_1 > R_1$, $(x_1, y_1, y'_1 + \delta)$ in T_1 e che $\frac{f(x_1, y_1, y'_1)}{y'_1} - f'_{y'}(x_1, y_1, y_1 + \delta) < -\frac{\gamma\delta}{2}$. Ne segue $\nu \leq -\frac{\gamma\delta}{2} < 0$, il che, come si vide, è assurdo.

Dunque non può essere $\nu_1 = 0$.

Analogamente si osserva che quando y tende a $-\infty$, il nostro teorema equivale ad asserire che il $\lim\limits_{y'=-\infty} \frac{E(x\,y;\;y'\,y')}{y' - y}$ per $(x\,y\,y')$ variabile in T_1 è un numero $\nu'_1 > 0$: e la dimostrazione si fa in modo perfettamente analogo al precedente. Risulta così l'asserto.

6. *Lemmi.* Andiamo ora a completare i lemmi del n.° 3.

LEMMA IV. *Se $\zeta(x)$ è una funzione a derivata limitata in $(a\,b)(a < b)$, nulla in a o in b, si ha*

$$\int_a^b |\zeta|\,dx \leq (b-a)\int_a^b |\zeta'|\,dx. \tag{30}$$

Infatti sia ad es. $\zeta(a) = 0$. Sarà $|\zeta(x)| = \left|\int_a^x \zeta'(\xi)\,d\xi\right| \leq \int_a^x |\zeta'(\xi)|\,d\xi$; da cui segue per il teorema di DIRICHLET:

$$\int_a^b |\zeta(x)|\,dx \leq \int_a^b dx \int_a^x |\zeta'(\xi)|\,d\xi \leq \int_a^b (b-x)\,|\zeta'(x)|\,dx < (b-a)\int_a^b |\zeta'(x)|\,dx$$

che è la (30). Analogamente se $\zeta(b) = 0$.

LEMMA V. *Sia ζ una funzione a derivata limitata in $(a\,b)(a \leq b)$, nulla in a o in b, e sia sempre $|\zeta| < \alpha$: se dividiamo $(a\,b)$ in due insiemi misurabili complementari χ e χ_1, si ha sempre*

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b \zeta^2\,dx \leq K\int_\chi \zeta'^2\,dx + K_2\int_{\chi_1} |\zeta'|\,dx \\ &K = \frac{(b-a)^2}{2}, \qquad K_2 = 2\alpha(b-a). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Sia sempre, per fissare le idee, $\zeta(a) = 0$. Si definiscano due funzioni ζ_1 e ζ_2 colle condizioni

$$\zeta_1(a) = 0, \quad \zeta'_1 = \zeta' \text{ in } \chi, \quad \zeta'_1 = 0 \text{ in } \chi_1;$$

$$\zeta_2(a) = 0, \quad \zeta'_2 = 0 \text{ in } \chi, \quad \zeta'_2 = \zeta' \text{ in } \chi_1;$$

sarà $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$. Ciò posto, si ha $\zeta^2 = (\zeta_1 + \zeta_2)^2 = \zeta_1^2 + 2\zeta\zeta_2 - \zeta_2^2$, quindi

$$\int_a^b \zeta^2 \, dx \leq \int_a^b \zeta_1^2 \, dx + 2\int_a^b \zeta\zeta_2 \, dx. \tag{32}$$

Ma per il lemma I si ha

$$\int_a^b \zeta_1^2 \, dx < K \int_a^b \zeta_1'^2 \, dx = K \int_\chi \zeta'^2 \, dx; \tag{33$_1$}$$

per il lemma IV e per l'ipotesi $|\zeta| < \alpha$ è

$$\left.\begin{aligned} 2\left|\int_a^b \zeta\zeta_2 \, dx\right| \leq 2\int_a^b |\zeta\zeta_2| \, dx < 2\alpha\int_a^b |\zeta_2| \, dx < 2\alpha(b-a)\int_a^b |\zeta'_2| \, dx = \\ = K_2 \int_{\chi_1} |\zeta'| \, dx. \end{aligned}\right\} \tag{33$_2$}$$

Da $(33)_1$ e $(33)_2$, sommando, per (32) si deduce (31).

Lemma VI. *Nelle stesse ipotesi del lemma V si ha*

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b |\zeta\zeta'| \, dx < K_1 \int_\chi \zeta'^2 \, dx + K_3 \int_{\chi_1} |\zeta'| \, dx \\ &K_1 = \frac{(b-a)^2 + 2}{4}, \qquad K_3 = \alpha(b-a+1). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Infatti è $|\zeta\zeta'| \leq \frac{1}{2}(\zeta^2 + \zeta'^2)$, quindi per (31)

$$\left.\begin{aligned} \int_\chi |\zeta\zeta'| \, dx \leq \frac{1}{2}\left[\int_\chi \zeta^2 \, dx + \int_\chi \zeta'^2 \, dx\right] \leq \frac{1}{2}\int_a^b \zeta^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\chi \zeta'^2 \, dx \leq \\ \leq \frac{1}{2}(K+1)\int_\chi \zeta'^2 \, dx + \frac{1}{2} K_2 \int_{\chi_1} |\zeta'| \, dx. \end{aligned}\right\} \tag{35$_1$}$$

D'altra parte essendo $|\zeta| < \alpha$ si ha

$$\int_{\chi_1} |\zeta\zeta'| \, dx < \alpha \int_{\chi_1} |\zeta'| \, dx. \tag{35$_2$}$$

Dalle (35) sommando segue (34).

Lemma VII. *Sia ζ una funzione a derivata limitata in $(x_1 x_2)$ $(x_1 < x_2)$ nulla in x_1 ed in x_2, e sia sempre $|\zeta| < \alpha$: se si divide $(x_1 x_2)$ in due insiemi complementari misurabili χ e χ_1, si ha sempre*

$$\left.\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \zeta^2\, dx &\leq K' \int_{\chi} \zeta'^2\, dx + K'_2 \int_{\chi_1} |\zeta'|\, dx \\ \int_{x_1}^{x_2} |\zeta\zeta'|\, dx &\leq K'_1 \int_{\chi} \zeta'^2\, dx + K'_3 \int_{\chi_1} |\zeta'|\, dx \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

dove K' e K'_1 sono gli stessi che nel lemma III *e*

$$K'_2 = \alpha\,(x_2 - x_1) \qquad K'_3 = \alpha\left(\frac{x_2 - x_1}{2} + 1\right). \tag{37}$$

Questo lemma si deduce dai due precedenti come il lemma III dai lemmi I e II.

Aggiungiamo a questi un lemma che ci verrà utile solo assai più in là per il problema di minimo con entrambi gli estremi mobili:

Lemma VIII. *Si mantengano per ζ tutte le ipotesi dei lemmi* V *e* VI *tranne quella che ζ si annulli in a o in b: si ha allora*

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b \zeta^2\, dx &\leq 2\zeta^2(b)(b-a) + K'' \int_{\chi} \zeta'^2\, dx + K''_2 \int_{\chi_1} |\zeta'|\, dx \\ \int_a^b |\zeta\zeta'|\, dx &\leq \zeta^2(b)(b-a) + K''_1 \int_{\chi} \zeta'^2\, dx + K''_3 \int_{\chi_1} |\zeta'|\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

dove

$$\left.\begin{aligned} K'' &= 2K + (b-a)^2 & K''_2 &= 4K_2 + 8\alpha(b-a) \\ K''_1 &= \frac{(b-a)^2 + 1}{2} & K''_3 &= \alpha\Big[4(b-a) + 1\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Invero si ponga $\zeta_1 = \zeta - \zeta(b)$ sarà $\zeta_1(b) = 0$, $\zeta'_1 = \zeta'$ e poichè $|\zeta| < \alpha$ sarà $|\zeta_1| < 2\alpha$. A ζ_1 si può applicare il lemma V, ponendovi 2α in luogo di α: quindi osservando che $\zeta^2 = \left(\zeta_1 + \zeta(b)\right)^2 \leq 2\Big[\zeta_1^2 + \zeta^2(b)\Big]$, avremo

$$\int_a^b \zeta^2\, dx \leq 2\int_a^b \zeta_1^2\, dx + 2\zeta^2(b)(b-a) \leq 2\zeta^2(b)(b-a) +$$

$$+ 2K \int_{\chi} \zeta'^2\, dx + 2 \cdot 4\alpha(b-a) \int_{\chi_1} |\zeta'|\, dx$$

che equivale alla prima delle (38).

Per mostrare la seconda delle (38) si osservi che ragionando come nel lemma VI, si ha

$$\int_{\chi} |\zeta\zeta'|\, dx \leq \frac{1}{2}\left[\int_{\chi} \zeta^2\, dx + \int_{\chi} \zeta'^2\, dx\right] \leq \frac{1}{2}\int_a^b \zeta^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\chi} \zeta'^2\, dx \leq$$

$$\leq \zeta^2(b)(b-a) + \left(\frac{K''}{2} + \frac{1}{2}\right)\int_{\chi} \zeta'^2\, dx + \frac{1}{2} K''_2 \int_{\chi_1} |\zeta|\, dx.$$

Ma vale ancora $(35)_2$: sommando queste disuguaglianze, si ottiene quella cercata.

Osservazione. I lemmi V, VI, VII comprendono i lemmi I, II, III; basta fare $\chi = (a, b)$ e per χ_1 prendere l'insieme nullo; devesi però notare che quelli sono dedotti senza supporre $|\zeta| < \varkappa$. Analogamente dal lemma VIII, ove per χ_1 si prenda l'insieme nullo, si ha

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b \zeta^2\, dx \leq 2\zeta^2(b)(b-a) + K'\int_a^b \zeta'^2\, dx \\ &\int_a^b |\zeta\zeta'|\, dx \leq \zeta^2(b)(b-a) + K''_1\int_a^b \zeta'^2\, dx, \end{aligned}\right\} \qquad (38)^{\text{bis}}$$

e tali formule restano vere anche facendo astrazione dall'ipotesi $|\zeta| < \varkappa$.

7. *Secondo teorema sulle condizioni sufficienti: caso generale.* Siamo ora in grado di dimostrare assai semplicemente che *se l'arco $P_1 P_2$ dell'estremale $\mathfrak{C}$ soddisfa alle condizioni seguenti:*

1.° $\varphi''_{y'} = f''_{y'}(x\, \eta\, \eta') > 0$ *(condizione di Legendre),*

2.° *esistono due numeri r_1 e r_2 tali che per*

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad |y - \eta| \leq r_1, \quad |y' - \eta'| \leq r_2, \quad 0 < |\bar{y}' - y'|$$

è $E(x, y; y', \bar{y}') > 0$ (condizione di Weierstrass),

3.° *il punto x'_1 coniugato a destra di x_1 segue x_2 (condizione di Jacobi), si può trovare un r tale che $\mathfrak{C}$ dia ad I il minimo rispetto alle curve $\mathfrak{L}$ di R passanti per P_1 e P_2 per cui sia $|y - \eta| \leq r$.*

È questo l'ordinario teorema (*); con ciò solo che, se si introduce la nozione di campo, si può, e talvolta si usa, limitarsi a chiedere che la condizione 2.° sia soddisfatta quando a y' si sostituisca quella funzione di x e

(*) Hadamard, l. c., pag. 389-90.

di y che è l'inclinazione del campo (*): qui naturalmente simile cosa non si può fare.

Per dimostrarlo si osservi intanto che, prendendo nella condizione 2.° r_1 e r_2 sufficientemente piccoli, si può per la 1.° supporre che per $|y - \eta| \leq r_1$, $|y' - \eta'| \leq r_2$, $x_1 \leq x \leq x_2$ sia anche $f''_{y'y'}(x\,y\,y') > 0$. Scelto allora un δ, $0 < \delta < r_2$ arbitrario, si può prendere nel teorema del n.° 5 il campo $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$, $|y' - \eta'| \leq r_2$ come campo T, il campo $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$, $|y' - \eta'| \leq r_2 - \delta$ come campo T_1; ed applicando detto teorema, trovare due numeri positivi ρ_1 e μ_1 tali che per $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$, $|y' - \eta'| \leq r_2 - \delta$, $|\bar{y}' - y'| > \rho_1$ sia

$$E(x, y; y', \bar{y}') > \mu_1 |\bar{y}' - y'|. \tag{40}$$

D'altra parte si può, ragionando in modo perfettamente analogo a quello tenuto nel n.° 3, determinare un numero positivo μ tale che per $|\bar{y}' - y'| \leq \rho_1$ sia

$$E_1(x, y; y', \bar{y}') > \mu. \tag{41}$$

Applichiamo allora alla variazione totale ΔI la (16), il che è possibile per l'ipotesi 3.°: e supponiamo inoltre che valgano sempre le (21). Indichiamo con r un'indeterminata $\leq r_1$, e $< \frac{r_2 - \delta}{m_3} m_1$, e supponiamo $|z| \leq r$ e quindi $|z_1| < \frac{r}{m_1} < \frac{r_2 - \delta}{m_3}$; chiamiamo Z l'insieme dei punti in cui $|z'_1 u| \leq \rho_1$, e Z_1 l'insieme complementare: avremo:

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y')\, dx > \mu m^2 \int_Z z_1'^2\, dx + \mu_1 m_1 \int_{Z_1} |z'_1|\, dx, \tag{42}$$

che è la formula che tiene il luogo di (24). Le limitazioni trovate al n.° 3 per λ_1 e λ_2 restano ancora vere: e quindi, applicando il lemma VII, avremo:

$$\left\{\begin{aligned} \left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_1 z_1^2\, dx\right| &\leq \frac{M}{6}(m_2 + m_3)^2 \frac{r}{m_1} \int_{x_1}^{x_2} z_1'^2\, dx \leq \\ &\leq \frac{M}{6\, m_1}(m_2 + m_3)^2 r \left[K' \int_Z z_1'^2\, dx + K'_1 \int_{Z_1} |z'_1|\, dx\right] \\ \left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 u z_1^2 z'_1\, dx\right| &\leq \int_{x_1}^{x_2} |\lambda_2 z z_1 z'_1|\, dx \leq \frac{M}{2}(m_2 + m_3)^2 r \int_{x_1}^{x_2} |z_1 z'_1|\, dx \leq \\ &\leq \frac{M}{2}(m_2 + m_3)^2 r \left[K'_1 \int_Z z_1'^2\, dx + K'_2 \int_{Z_1} |z'_1|\, dx\right] \end{aligned}\right. \tag{43}$$

dove le K' si ottengono dalle (20) e (39) ove si faccia $\alpha = \frac{r}{m_1}$.

(*) Bolza, l. c., pag. 120.

Da (42) (43) si conchiude come dalle (24) (25)

$$\Delta I > (\varphi\, m_1^2 - r\, H'_1)\int_{\chi} z_1'^2\, d\,x + (\varphi_1\, m_1 - r\, H'_2)\int_{\chi_1} |z'_1|\, d\,x, \qquad (44)_1$$

dove H'_1 è sempre dato da (26) e

$$H'_2 = \frac{M}{6\, m_1}(m_2 + m)^2\left[K'_2\,(m_2 + m_3) + 3\,K'_3\, m_1\right]. \qquad (44)_2$$

Basta quindi supporre che r soddisfaccia ancora alle disuguaglianze $r < \frac{\varphi\, m_1^2}{H'_1}$, $r < \frac{\varphi_1\, m_1}{H'_2}$, perchè sia $\Delta I > 0$. c. v. d.

8. *Teorema di Osgood.* Osserviamo che nelle ipotesi del numero precedente la (44) ci permette di dimostrare anche il teorema di Osgood, che enunceremo nel modo preciso seguente: *si può descrivere attorno all'estremale $\mathfrak{E}$ una regione tale che, presa una qualunque curva $\mathfrak{L}$ di essa passante per P_1 e P_2 e detto l il massimo segmento di ordinata compreso fra $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{L}$ il rapporto $\frac{\Delta I}{l^2} = \frac{I_{\mathfrak{L}} - I_{\mathfrak{E}}}{l^2}$ resta sempre positivo, superiore a un certo numero ν* (*).

Premettiamo anche qui un lemma che ci verrà pure utile in seguito:

Lemma IX. *Sia $\zeta(x)$ una funzione a derivata limitata, e sia $\zeta(a) = 0$; si divida $(a\,x)$ in due insiemi complementari $\chi(x)$ e $\chi_1(x)$ misurabili: sia inoltre $|\zeta| < \alpha$: si avrà*

$$\zeta^2(x) < (x - a)\int_{\chi(x)} \zeta'^2\, d\,x + 2\,\alpha\int_{\chi_1(x)} |\zeta'|\, d\,x. \qquad (45)$$

Infatti si ha

$$\left.\begin{aligned}\zeta^2(x) &= \left(\int_a^x \zeta'\, d\,x\right)^2 = \left(\int_{\chi(x)} \zeta'\, d\,x + \int_{\chi_1(x)} \zeta'\, d\,x\right)^2 = \\ &= \left(\int_{\chi(x)} \zeta'\, d\,x\right)^2 + 2\,\zeta(x)\int_{\chi_1(x)} \zeta'\, d\,x - \left(\int_{\chi_1(x)} \zeta'\, d\,x\right)^2 < \\ &< \left(\int_{\chi(x)} \zeta'\, d\,x\right)^2 + 2\,\zeta(x)\int_{\chi_1(x)} \zeta'\, d\,x.\end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

(*) In questa forma è dato già da Hadamard, l. c., pag. 479; e del resto si ricava facilmente anche dalle disuguaglianze contenute nella Memoria medesima di Osgood, *Transactions of the Am. Math. Society*, Vol. 2 (1901), pag. 273-295.

Ma per il teorema di SCHWARZ è $\left(\int_{\chi(c)} \zeta\, d x\right)^2 \leq |x - a| \int_{\chi(c)} \zeta^2\, d x$, moltre evidentemente è $\left|2\zeta(x)\int_{\chi(c)} \zeta\, d x\right| < 2\varkappa\int_{\chi(c)} |\zeta|\, d x$: da (46) segue allora subito la (45).

Ciò posto, sia c l'ascissa in cui è massimo il valore assoluto della differenza $z(x)$ delle ordinate di $\mathfrak{C}$ e di $\mathfrak{L}$; sarà $l = |z(c)| = u(c)\, z_1(c)$. Supponiamo, per fissare le idee, che x_1 sia il più prossimo a c degli estremi x_1 e x_2: sarà $c - x_1 \leq \frac{x_2 - x_1}{2}$: applicando allora il lemma IX, sempre colle notazioni del numero precedente, se $\chi(c)$ e $\chi_1(c)$ sono le parti di χ e χ_1 appartenenti a $(x_1\, c)$ si avrà

$$\left.\begin{aligned} l^2 = z^2(c) = u^2(c)\, z_1^2(c) &< m_2^2 \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{\chi(c)} z_1'^2\, d x + 2\, m_2^2 \frac{r_1}{m_1} \int_{\chi_1(c)} |z_1'|\, d x \\ &\leq m_2^2 \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{\chi} z_1'^2\, d x + 2\, m_2^2 \frac{r_1}{m_1} \int_{\chi_1} |z_1'|\, d z. \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Confrontando (47) con (44), segue che, se $|z| < r$, il rapporto $\frac{\Delta I}{l^2}$ non può scendere al disotto del minore dei numeri $\frac{2\mu\, m_1^2 - r H'_1}{m_2^2 (x_2 - x_1)}$, $\frac{\mu_1 m_1 - r H'_1 m_1}{2 m_2^2 r_1}$; e ciò dimostra il teorema di OSGOOD.

9. *Il caso di un estremo mobile.* È assai semplice vedere come si debbano modificare i risultati dei numeri precedenti, nell'ipotesi che gli estremi siano mobili. Cominciamo col supporre che solo l'estremo sinistro sia mobile su una curva $\mathfrak{C}_1$ di equazione

$$y = \mathfrak{y}_1(x); \quad (48)$$

supporremo che la funzione $\mathfrak{y}_1$ ammetta le derivate prime, seconde e terze finite, nell'intorno di $x = x_1$; e che nel punto $\left(x_1, y_1 = \mathfrak{y}_1(x_1) = \varphi(x_1)\right)$ commune a $\mathfrak{C}_1$ ed a $\mathfrak{C}$ le due curve non si tocchino. Talchè esisterà allora un numero ν_1 tale che in un conveniente intorno di x_1 si ha sempre

$$\nu_1 < \frac{\mathfrak{y}_1(x) - \varphi(x)}{x - x_1}. \quad (49)$$

Sia $\mathfrak{L}$ al solito la curva variata: sia $\left(\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{y}_1(\mathfrak{x}_1)\right)$ il suo estremo sinistro: e naturalmente (x_2, y_2) il suo estremo destro: in base all'ipotesi precedente si può intanto notare che, tosto che si suppone $|z| < r$, sarà $|\mathfrak{x}_1 - x_1| < \frac{r}{\nu_1}$, e quindi $x_2 - \mathfrak{x}_1 < x_2 - x_1 + \frac{r}{\nu_1}$.

Occorre anzitutto riprendere la trasformazione della variazione totale data al n.° 2: sarà ora colle notazioni là usate:

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta I &= \int_{\mathfrak{x}_1}^{x_2} f(x, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')\,dx - \int_{x_1}^{x_2} \varphi\,dx = \\
&= \int_{\mathfrak{x}_1}^{x_2} E(x, \mathfrak{y}; \varkappa' + z_1 u', \mathfrak{y}')\,dx + \\
&+ \int_{\mathfrak{x}_1}^{x_2} \left| f(x, \mathfrak{y}, \varkappa' + z_1 u') - \varphi - z'_1 u f''_{y'}(x, \mathfrak{y}, \varkappa' + z_1 u') \right| dx - \int_{x_1}^{\mathfrak{x}_1} \varphi\,dx.
\end{aligned}\right\} \quad (50)
$$

Si sviluppi il secondo integrale mediante le (13), (14): ma si osservi che i termini di primo e di secondo grado in z_1 non saranno più nulli, poichè non sarà $z(\mathfrak{x}_1) = 0$, i loro valori saranno invece per le (4) e (9) dati da

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{x}_1}^{x_2} (\varphi'_y z + \varphi'_{y'} z')\,dx = -\left|\varphi'_{y'} z\right|_{x=\mathfrak{x}_1} \\
&\int_{\mathfrak{x}_1}^{x_2} \left| \varphi''_{yy} z^2 + 2\varphi''_{yy'} z z' + \varphi''_{y'y'} (2 z_1 z'_1 u u' + z_1^2 u'^2) \right| dx = \\
&\qquad\qquad = -\left| \varphi''_{yy'} z^2 + \varphi''_{y'y'} z^2 \frac{u'}{u} \right|_{x=\mathfrak{x}_1}.
\end{aligned}\right\} \quad (51)
$$

D'altra parte si ha, scrivendo brevemente $\varphi_1, \varphi'_{x1}, \ldots, \varkappa_1, \varkappa'_1, \ldots, u_1, u'_1, \ldots$ al posto di $\varphi(x_1), \varphi'_x(x_1) \ldots$:

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{\mathfrak{x}_1} \varphi(x)\,dx = \varphi_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left| \varphi'_{x1} + \varphi'_{y1}\varkappa'_1 + \varphi'_{y'1}\varkappa''_1 \right| (\mathfrak{x}_1 - x_1)^2 + \lambda\,(\mathfrak{x}_1 - x_1)^3; \\
&z(\mathfrak{x}_1) = \mathfrak{y}(\mathfrak{x}_1) - \varkappa(\mathfrak{x}_1) = (\mathfrak{y}'_{11} - \varkappa'_1)(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\mathfrak{y}''_{11} - \varkappa''_{11})(\mathfrak{x}_1 - x_1)^2 + \lambda_1(\mathfrak{x}_1 - x_1)^3; \\
&u(\mathfrak{x}_1) = u_1 + \lambda_5(\mathfrak{x}_1 - x_1); \quad u'(\mathfrak{x}_1) = u'_1 + \lambda_6(\mathfrak{x}_1 - x_1); \\
&\varphi'_{y'}(\mathfrak{x}_1) = \varphi'_{y'1} + (\varphi''_{xy'1} + \varphi''_{yy'1}\varkappa'_1 + \varphi''_{y'y'1}\varkappa''_1)(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \lambda_7(\mathfrak{x}_1 - x_1)^2; \\
&\varphi''_{yy'}(\mathfrak{x}_1) = \varphi''_{yy'1} + \lambda_8(\mathfrak{x}_1 - x_1); \quad \varphi''_{y'y'}(\mathfrak{x}_1) = \varphi''_{y'y'1} + \lambda_9(\mathfrak{x}_1 - x_1).
\end{aligned}\right\} \quad (52)
$$

Onde, sostituendo in (50) i valori che successivamente si hanno delle (13), (14), (51) e (52), si otterrà:

$$
\left.
\begin{aligned}
\Delta I = & \int_{\mathfrak{r}_1}^{x_2} E(x, y;\ \eta' + z_1 u,\ y')\, dx + \int_{\mathfrak{r}_1}^{x_1} \Big[\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 u z_1 z'_1\Big]\, dx \\
& - (\mathfrak{r}_1 - x_1)\Big[\varphi'_{y'1}(\mathfrak{p}'_{11} - \eta'_1) - \varphi_1\Big] - \\
& - \frac{1}{2}(\mathfrak{r}_1 - x_1)^2 \Big\{ \varphi'_{x1} + \varphi'_{y1}\eta'_1 + \varphi'_{y'1}\mathfrak{p}''_{11} \\
& \qquad + 2(\varphi''_{y'x1} + \varphi''_{y'y1}\eta'_1 + \varphi''_{y'y'1}\eta''_1)(\mathfrak{p}'_{11} - \eta'_1) \\
& \qquad + \varphi'_{y'y1}(\mathfrak{p}'_{11} - \eta'_1)^2 + \varphi''_{y'^2 1}(\mathfrak{p}'_{11} - \eta'_1)^2 \frac{u'_1}{u_1} \Big\} \\
& + \Lambda_1(\mathfrak{r}_1 - x_1)^3 ;
\end{aligned}
\right\} \quad (53)
$$

Λ_1 è una quantità formata colle λ delle (52), e quindi limitata in funzione del massimo modulo delle $\varphi(x)$, $\mathfrak{p}_1(x)$, $\eta(x)$ e delle loro derivate dei primi tre ordini, di $u(x)$ e delle sue derivate dei primi due ordini, ed infine del minimo valore di $u(x)$ nel tratto $(x_1\, \mathfrak{r}_1)$. In base a questa nuova formula è allora facile dimostrare l'ordinario teorema delle condizioni sufficienti per il minimo:

Se $\mathfrak{C}$ è un estremale passante per P_2, la quale soddisfa alle seguenti condizioni:

1.ª *taglia trasversalmente in (x_1, y_1) la curva $\mathfrak{C}_1$,*

2.ª *non tocca in (x_1, y_1) la curva $\mathfrak{C}_1$,*

3.ª *è $\varphi''_{y'^2} = f''_{y'^2}(x, \eta, \eta') > 0$ per $x_1 \leq x \leq x_2$,*

4.ª *esistono tre numeri positivi ε, r_1 e r_2 tali che per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$, $|\bar{y}' - \eta'| \leq r_2$, $0 < |y' - \bar{y}'|$, sia $E(x, y;\ \bar{y}', y') > 0$* (*).

(*) Nei testi di calcolo delle variazioni si usa chiedere che sia $E(x, y;\ \bar{y}', y') > 0$ solo per $x_1 \leq x \leq x_2$, e non, come qui si dice, per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2$: cfr. ad es., Hadamard, l. c., n.º 348 e n.º 320. Però tale enunciato non è esatto poichè realmente nella dimostrazione interviene la condizione posta nel testo; e — conforme alla ben nota obbiezione del Bolza circa le condizioni di minimo per l'ordinario problema in forma non parametrica — dal sapere che $E(x, y;\ \bar{y}', y') > 0$ solo per $x_1 \leq x \leq x_2$, non segue lo sia pure per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2$.

Ecco del resto un esempio che mostra l'insufficienza della condizione $E(x, y;\ \bar{y}', y') > 0$, solo per $x_1 \leq x \leq x_2$. Sia $f = 1 + y' + y'^2 + x y'^4$. Il segmento (0 1) dell'asse delle x è un estremale $\mathfrak{C}$, il quale taglia trasversalmente nell'origine la seconda bisettrice $\mathfrak{C}_1$ degli assi: $y = -x$. Su $\mathfrak{C}$ è $f''_{y'^2} = 2 > 0$; inoltre è $E(x, y;\ \bar{y}', y') = (y' - \bar{y}')^2 \Big\{1 + x\Big[(y' - \bar{y}')^2 + 2\bar{y}'^2\Big]\Big\}$ onde per

5.ª il fuoco a destra x_1 della curva $\mathfrak{E}_1$ segue x_2,
si può trovare un r tale che $\mathfrak{E}$ dà ad I il minimo rispetto alle curve $\mathfrak{L}$ che congiungono P_2 con un punto di $\mathfrak{E}_1$ e per cui $|y - \eta| < r$.

Invero per la condizione 1.ª in (53) è identicamente nullo il coefficiente di $\mathfrak{x}_1 - x_1$. Per la condizione 5.ª la soluzione dell'equazione di JACOBI che in x_1 soddisfa alla

$$\left.\begin{aligned}&\varphi'_{x1} + \varphi'_{y1}\eta'_1 + \varphi_{x1}\mathfrak{y}_{11} + 2(\varphi''_{y'x1} + \varphi''_{y'y1}\eta'_1 + \varphi''_{y'y'1}\eta''_1)(\mathfrak{y}'_{11} - \eta'_1) + \\ &\qquad + \varphi'_{y'y1}(\mathfrak{y}'_{11} - \eta'_1)^2 + \varphi''_{y'y'1}(\mathfrak{y}'_{11} - \eta'_1)^2 \frac{u'_1}{u_1} = 0 \ (*)\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

è diversa da zero in tutto l'intervallo $(x_1\, x_2)$: se si prende ε convenientemente piccolo, potremo supporla > 0 anche nell'intervallo $(x_1 - \varepsilon,\, x_2)$: sia dunque

$$0 < m_1 \leq u \leq m_2, \quad |u'| < m_3, \quad |u''| < m_4 \quad \text{in} \quad x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2. \tag{55}$$

Prendendo tale soluzione quale funzione u nel fare la trasformazione (53), si avrà che anche il coefficiente di $(\mathfrak{x}_1 - x_1)^2$ in (53) è nullo.

Infine noi potremo prendere ε tanto piccolo che la condizione 3.ª sia soddisfatta anche per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2$; e quindi, se, al solito, indichiamo con r un'indeterminata, e supponiamo $|z| \leq r$, basterà, per la condizione 2.ª o per l'equivalente (49), prendere $r < \frac{\varepsilon}{\nu_1}$ per essere certi che anche in tutto il tratto $(\mathfrak{x}_1\, x_2)$ siano soddisfatte le condizioni 3.ª, 4.ª e le (55).

Ciò posto, avremo dunque

$$\Delta I = \int_{\mathfrak{x}_1}^{x_1} E(x,\, y;\, \eta' + z_1 u',\, y')\, dx + \int_{\mathfrak{x}_1}^{x_2} \left|\lambda_1 z_1^3 + \lambda_2 u z_1^2 z'_1\right| dx + \Lambda_1(\mathfrak{x}_1 - x_1)^3, \tag{56}$$

$0 \leq x \leq 1$ è sempre $E > 0$ quali che siano y' e $\bar{y}'$. Ma il detto arco di estremale non dà il minimo: invero $I_\mathfrak{E} = 1$: mentre, se si prende quale curva variata $\mathfrak{L}$ la spezzata formata dai segmenti $(-h,\, h) - (0,\, k)$, e $(0,\, k) - (1,\, 0)$, avremo $I_\mathfrak{L} = -\frac{1}{2}\left[\frac{(k-h)^4}{h^2} - 2\frac{(k-h)^2}{h} - 2\right] + \delta(h,\, k)$ dove $\delta(h,\, k)$ è infinitesimo con h e k; fissato quindi arbitrariamente k, si può prendere sempre h tanto piccola che $I_\mathfrak{L}$ risulti negativo, e quindi $< I_\mathfrak{E}$. c. v. d.

È chiaro che, se si trattasse del minimo debole, od anche solo se, come nel n.º 3, alle curve variate si imponesse una condizione del tipo $|y' - \eta'| \leq \rho_1$, le precedenti difficoltà non si presenterebbero e l'enunciato del testo si potrebbe alquanto semplificare; e che analoga semplificazione si avrà sempre per il problema in forma parametrica.

(*) È facile vedere che la presente condizione per u è, in virtù dell'equazione (3) di EULERO cui soddisfa η, perfettamente equivalente a quella data da BLISS, *Math. Ann.* 58, pag. 73, e BOLZA, *Lectures on the Calculus of Variations*, pag. 107.

Λ_1 essendo una quantità sempre inferiore ad un certo numero M_1 dipendente solo da φ, $\varkappa$, $\mathfrak{y}_1$ e dalle loro derivate dei primi 3 ordini, dai numeri m_1, m_2, m_3, m_4 ed affatto indipendente da z. Ragionando come nel n.º 7 coll'applicare i lemmi V e VI in luogo del lemma VII (*), si avrà anche qui, serbando quelle stesse notazioni,

$$\left.\begin{aligned}\int_{\mathfrak{x}_1}^{x_2} E(x, y; \varkappa' + z_1 u', y')\,dx - \int_{\mathfrak{x}_1}^{x_2}\left[\lambda_1 z_1'^2 - \lambda_2 u z_1'^2 z_1\right]dx >\\ > (\mu m_1^2 - r H_1)\int_\chi z_1'^2\,dx + (\mu_1 m_1 - r H_2)\int_{\chi_1} |z_1'|\,dx\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

dove χ, χ_1 indicano gli insiemi di punti di $(\mathfrak{x}_1\, x_2)$ in cui è $|z_1'\, u| \leq \rho_1$ e l'insieme complementare, e H_1, H_2 sono le stesse quantità che in (26) ed in $(44)_2$, in cui solo alle K', K'_1, K'_2, K'_3 sono sostituite K_1, K_2, K_3, K_4.

Ma d'altra parte per (49) è

$$|\Lambda_1 (\mathfrak{x}_1 - x_1)^3| < \frac{1}{\nu_1^3} M_1 |\mathfrak{y}_1(\mathfrak{x}_1) - \varkappa(\mathfrak{x}_1)|^3 = \frac{M_1}{\nu_1^3} |z^3(\mathfrak{x}_1)| < \frac{M_1}{\nu_1^3} m_2^2\, r\, z_1^2(\mathfrak{x}_1).$$

Ed applicando il lemma IX col farvi $\varkappa = \dfrac{r_1}{m_1}$ avremo

$$|\Lambda_1 (\mathfrak{x}_1 - x_1)^3| < m_2^2 \frac{M_1}{\nu_1^3} r \left\{ (x_2 - x_1 + \varepsilon)\int_\chi z_1'^2\,dx + 2\frac{r_1}{m_1}\int_{\chi_1} |z_1'|\,dx \right\}. \qquad (58)$$

Raccogliendo da (57) e (58), segue dunque

$$\left.\begin{aligned}\Delta I > (\mu m_1^2 - r H_3)\int_\chi z_1'^2\,dx + (\mu_1 m_1 - r H_4)\int_{\chi_1} |z_1'|\,dx\\ H_3 = H_1 + \frac{M_1}{\nu_1^3}(x_2 - x_1 + \varepsilon)\, m_2^2, \quad H_4 = H_2 + 2\frac{M_1}{\nu_1^3}\frac{r_1}{m_1} m_2^2;\end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

la quale dimostra che per $r < \dfrac{\mu m_1^2}{H_3}$, $r < \dfrac{\mu_1 m_1}{H_4}$ è $\Delta I > 0$.

E ragionando come al n.º 8 si prova anche senz'altro il teorema di Osgood.

10. *Il caso di entrambi gli estremi mobili.* Pel caso di entrambi gli estremi mobili occorre premettere una generalizzazione del lemma IX:

(*) Poichè z_1 si annulla in x_2 soltanto e non più in x_1.

Lemma X. *Se $\zeta(x)$ è una funzione a derivata limitata, si divida $(a\,x)$ in due parti complementari $\chi(x)$ e $\chi_1(x)$ misurabili: sia inoltre sempre $|\zeta| < \alpha$ si avrà*

$$\zeta^2(x) < 2\,\zeta^2(a) + 2\,|a - x| \int_{\chi(x)} \zeta'^2\,dx + 8\,\alpha \int_{\chi_1(x)} |\zeta'|\,dx. \tag{60}$$

Infatti, posto $\zeta(x) - \zeta(a) = \zeta_1(x)$, avremo $|\zeta_1| < 2\,\alpha$, $\zeta_1(a) = 0$, $\zeta'_1 = \zeta'$, $\zeta^2 = [\zeta_1 + \zeta(a)]^2 < 2\,[\zeta_1^2 + \zeta^2(a)]$: onde applicando a ζ_1 la (45) avremo la (60).

Ciò posto, sia P_2 mobile sulla curva $\mathfrak{C}_2$ di equazione

$$y = \mathfrak{y}_2(x); \tag{61}$$

perchè $\mathfrak{C}$ dia il minimo, occorrerà aggiungere alle condizioni del teorema precedente, le altre:

6.ª *$\mathfrak{C}$ taglia trasversalmente in $x_2\,y_2$ la $\mathfrak{C}_2$.*

7.ª *$\mathfrak{C}$ non tocca $\mathfrak{C}_2$ in $x_2\,y_2$*: onde esisteranno due numeri positivi ν_2 e ν_3 tali che in un intorno sufficientemente piccolo di x_2 sia

$$\nu_2 < \frac{\mathfrak{y}_2(x) - \varkappa(x)}{x - x_2} < \nu_3, \tag{62}$$

8.ª *il fuoco a destra x'_2 di $\mathfrak{C}_2$ precede il fuoco a destra x'_1 di $\mathfrak{C}_1$ (condizione di Bliss)*: o in altri termini la soluzione dell'equazione di Jacobi che soddisfa a (54) soddisfa pure, — indicando coll'indice 2 i valori delle funzioni di x calcolati in x_2 — alla disuguaglianza

$$\left.\begin{array}{r}\varphi'_{x2} + \varphi'_{y2}\,\varkappa'_2 + \varphi'_{y'2}\,\mathfrak{y}''_{22} + 2\,(\varphi''_{xy'2} + \varphi''_{yy'2}\,\varkappa'_2 + \varphi''_{y'y'2}\,\varkappa''_1)\,(\mathfrak{y}'_{22} - \varkappa'_2) + \\ \varphi''_{yy'2}\,(\mathfrak{y}'_{22} - \varkappa'_2)^2 + \varphi''_{y'y'2}\,(\mathfrak{y}'_{22} - \varkappa'_2)^2\,\dfrac{u'_2}{u_2} = A > 0.\end{array}\right\} \tag{63}$$

Infine *la condizione 4.ª dovrà essere soddisfatta per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2 + \varepsilon$.* Possiamo allora supporre di prendere ε tanto piccolo che la condizione 3.ª sia soddisfatta in tutto $(x_1 - \varepsilon,\, x_2 + \varepsilon)$, e che in questo intervallo la funzione $u(x)$ individuata da (54) soddisfi alle (55). Supporremo poi che per la curva variata $\mathfrak{L}$ sia $|z| < r$ con $r < \frac{\varepsilon}{\nu_1}$, $r < \frac{\varepsilon}{\nu_2}$; per le (49) e (62), detti $(\mathfrak{x}_1,\, \mathfrak{y}(\mathfrak{x}_1))$, $(\mathfrak{x}_2,\, \mathfrak{y}(\mathfrak{x}_2))$ gli estremi di $\mathfrak{L}$, sarà $(\mathfrak{x}_1,\, \mathfrak{x}_2)$ interno a $(x_1 - \varepsilon,\, x_2 + \varepsilon)$, e quindi in esso varranno la 3.ª, la 4.ª condizione e le (55).

Ragionando come nel numero precedente, si vede che in virtù della 6.ª condizione e delle posizioni (62), si ha

$$\left.\begin{aligned}\Delta I = & \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} E(x, y; x' + z_1 u, y')\, d x + \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} [\lambda_1 z_1^2 + \lambda_1 u z_1^2 z'_1]\, d x \\ & + \frac{1}{2} A (\mathfrak{x}_2 - x_2)^2 + \Lambda_1 (\mathfrak{x}_1 - x_1)^3 + \Lambda_2 (\mathfrak{x}_2 - x_2)^3\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Λ_2 essendo funzione affatto simile a Λ_1. Si applichino ora i ragionamenti del n.° 7, usando però del lemma VIII in luogo del lemma VII poichè qui la z_1 non si annulla più negli estremi: si avrà

$$\left.\begin{aligned}& \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} E(x, y; x' + z_1 u', y')\, d x + \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} [\lambda_1 z_1^2 + \lambda_1 u z_1^2 z'_1]\, d x > \\ & > H''_3\, r\, z_1^2 (\mathfrak{x}_2) + (\mu\, m_1^2 - r H''_1) \int_{\chi} z'^2_1\, d x + (\mu_1 m_1 - r H''_2) \int_{\chi_1} |z'_1|\, d x\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

dove χ e χ_1 indicano al solito l'insieme di $(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2)$ in cui $|z'_1 u| < \rho_1$ e l'insieme complementare, H''_1 e H''_2 sono dati dalle (26) (44), dove alle K'_1, K'_2,... si sostituiscono le K''_1, K''_2,... ed infine

$$H''_3 = \frac{M}{6\, m_1} (m_2 + m_3)^2 (x_2 - x_1 + 2\varepsilon) \Big[2\, m_1 (m_2 + m_3) + 3\Big]. \quad (65)$$

Si avrà poi per (62):

$$|\Lambda_2 (\mathfrak{x}_2 - x_2)^3| < \frac{M_1}{\nu_2} (\mathfrak{x}_2 - x_2)^2\, |z(\mathfrak{x}_2)| < \frac{M_1}{\nu_2}\, r\, (\mathfrak{x}_2 - x_2)^2. \quad (66)$$

E per il lemma X, ricordando che è sempre $\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 < x_2 - x_1 + 2\varepsilon$, si ha

$$\left.\begin{aligned}|\Lambda_1 (\mathfrak{x}_1 - x_1)^3| & < \frac{M_1}{\nu_1^3} |z^3 (\mathfrak{x}_1)| < \frac{M_1}{\nu_1^3}\, m_2^3\, r\, z_1^2 (\mathfrak{x}_1) \leq \\ & \leq r \Big[2 \frac{M_1}{\nu_1^3} m_2^3 z_1^2 (\mathfrak{x}_2) + 2 \frac{M_1}{\nu_1^3} m_2^3 (x_2 - x_1 + 2\varepsilon) \int_{\chi} z'^2_1\, d x \\ & \qquad + 8 \frac{M_1}{\nu_1^3} m_2^3 \frac{r_1}{m_1} \int_{\chi_1} |z'_1|\, d x\Big].\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Onde, osservando infine che

$$z_1^2 (\mathfrak{x}_2) = \frac{z^2 (\mathfrak{x}_2)}{u^2 (\mathfrak{x}_2)} < \frac{\nu_2^2}{m_1^2} (\mathfrak{x}_2 - x_2)^2,$$

otterremo dalle (64) . . . (67)

$$\Delta I > \left(\frac{1}{2} A - r H''_2\right)(x_2 - x_1)^2 + (\rho\, m_1^2 - r H''_3) \int_Z z'^2_1\, dx + (\mu_1 m_1 - r H''_4) \int_{Z_1} |z'_1|\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} H''_3 &= H'_3 \frac{\nu_2^2}{m_1^2} + 2 \frac{M_1}{\nu_1^3} \frac{\nu_1^2}{m_1^2} m_2^2 + \frac{M_1}{\nu_1} \\ H''_2 &= H'_2 + 2 \frac{M_1}{\nu_1^3} m_2^2 (x_2 - x_1 + 2\varepsilon) \\ H''_4 &= H'_4 + 8 \frac{M_1}{\nu_1^3} m_2^2 \frac{r_1}{m_1} . \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

E questa disuguaglianza dimostra senz'altro il teorema. E anche qui confrontando questa disuguaglianza col lemma X, si potrebbe ottenere subito il teorema di Osgood.

CAPITOLO II.

L'integrale $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \ldots, y^{(p)})\, dx$.

1. *Posizione del problema. Classificazione dei varii tipi di minimo.* Sia assegnato l'integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \ldots, y^{(p)})\, dx, \tag{1}$$

e si supponga che la funzione f sia di classe $C^{(p+2)}$ quando $(x\, y)$ è in una certa regione R e $y', y'', \ldots, y^{(p)}$ sono finiti (*). Fissati in R i punti $P_1 \equiv (x_1\, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2\, y_2)$, si cerchi una curva $\mathfrak{C}$ di equazione

$$y = \chi(x), \tag{2}$$

χ essendo di classe $C^{(p)}$ almeno, passante per P_1 e P_2 e tale che ivi le derivate dei primi $p - 1$ ordini assumano rispettivamente i valori

(*) Nel n. 6 dovremo supporre f di classe $C^{(4)}$ almeno, ciò che porta una ulteriore restrizione solo se $p < 2$.

$y'_1, y''_1, \ldots, y_1^{(p-1)}$; $y'_2, y''_2, \ldots, y_2^{(p-2)}$: e che dia ad I il minimo valore, rispetto alle curve $\mathfrak{L}$ che soddisfanno alle stesse condizioni in P_1 e P_2 e giacciono in un conveniente intorno di $\mathfrak{C}$.

Indichiamo colle lettere greche $\varphi, \varphi', \ldots$ i valori di $f, f', \ldots$ quando per $y, y', \ldots, y^{(p)}$ si ponga $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(p)}$. È noto che nelle nostre ipotesi $\mathfrak{C}$ deve essere un estremale del problema: la funzione $\eta(x)$ è quindi tale che, se $z(x)$ è nulla colle sue derivate dei primi $p-1$ ordini in P_1 e P_2, è identicamente

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\varphi'_y z + \varphi'_{y'} z' + \cdots + \varphi'_{y^{(p)}} z^{(p)} \right) d x = 0 ; \tag{3}$$

ciò che porta (*) che η è di classe $C^{(2p)}$ almeno e soddisfa l'equazione

$$\varphi'_y - \frac{d}{d x} \varphi'_{y'} + \cdots + (-1)^p \frac{d^p}{d x^p} \varphi'_{y^{(p)}} = 0. \tag{4}$$

Qualche maggior particolare occorre aggiungere sulle curve variate $\mathfrak{L}$ con cui vorremo confrontare $\mathfrak{C}$. Intanto, se noi le rappresentiamo con

$$y = y(x) = \eta(x) + z(x), \tag{5}$$

la $z(x)$ è nulla colle sue derivate dei primi $p-1$ ordini in P_1 e P_2: ma inoltre è noto che da una parte perchè il problema abbia senso, $y(x)$, e quindi $z(x)$, debbono avere finite e continue le derivate dei primi $p-1$ ordini almeno; in altri termini occorre supporle di classe $D^{(p)}$ almeno, poichè ove si considerino curve le quali abbiano pure discontinuità nelle derivate p-esime, l'integrale (1) non ammette più minimo (**): e che d'altra parte, premesso ciò, nel ricercare le condizioni perchè $\mathfrak{C}$ dia il minimo, si può senza inconveniente supporre $\mathfrak{L}$ di classe $C^{(2p)}$, o anche analitica (***).

Se si impone a $\mathfrak{L}$ di soddisfare alle disuguaglianze

$$|z| = |y - \eta| \leq \rho_0, \quad |z'| = |y' - \eta'| \leq \rho_1, \ldots, \quad |z^{(q)}| = |y^{(q)} - \eta^{(q)}| \leq \rho_q, \quad (q \leq p), \tag{6}$$

mentre nessuna disuguaglianza si impone a $y^{(q+1)}, \ldots, y^{(p)}$, diremo che $\mathfrak{L}$ giace *nell'intorno* $\left[\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_q, \underset{(q+1)}{\infty}, \ldots, \underset{(p)}{\infty}\right]$ *di ordine* p *di* $\mathfrak{C}$; $\rho_0, \rho_1, \ldots$, si diranno *la prima, seconda, ... dimensione dell'intorno*. Con tali denominazioni,

(*) Circa l'obbiezione di Du Bois-Reymond per questo problema vedi Zermelo, *Ueber die Herleitung der Differentialgleichungen, etc.*, Math. Annalen, Vol. 58 (1904), pag. 558.

(**) Zermelo, Dissertazione citata, pag. 44 e ss. Hadamard, l. c., pag. 145.

(***) Hadamard, l. c., pag. 51 e ss.

il problema che ci proponiamo si enuncerà in modo preciso così: *cercare sotto quali condizioni* $\mathfrak{C}$ *dà il minimo rispetto alle curve* $\mathfrak{L}$ *di un intorno le cui prime* q_1 $(q_1 \leqq p+1)$ *dimensioni siano sufficientemente piccole, e le residue* $p+1-q_1$ *siano date a priori finite o infinite.* Un tale intorno lo chiameremo D_{q_1}; e, chiamando r un'indeterminata che si sottintende debba scegliersi convenientemente piccola, noi lo indicheremo con $\left[\underset{(0)}{r}, \underset{(1)}{r}, \dots, \underset{(q_1-1)}{r}, \rho_{q_1}, \rho_{q_2}, \dots, \rho_p\right]$, i numeri ρ essendo finiti o infiniti. Il problema proposto si spezzerà in tanti problemi parziali secondo i valori del numero q_1 e delle $p+1-q_1$ dimensioni prefissate. Ed è chiaro che, se $\mathfrak{C}$ dà il minimo in un dato intorno D_q, essa dà pure in particolare il minimo in tutti gli intorni D_{q_1} con $q_1 > q$ che hanno le ultime $p+1-q_1$ dimensioni uguali o minori di quelle corrispondenti di D_q: onde è da prevedere che al diminuire di q il problema diverrà sempre più difficile, e converrà, per accertare il minimo, imporre nuove condizioni sempre più restrittive.

Conviene però notare che le dimensioni di un intorno si possono pensare sempre legate da certe relazioni di disuguaglianza: le quali permettono di ridurre assai il numero dei casi, che secondo quanto precede apparirebbero possibili. Ciò risulterà da alcuni lemmi che andiamo a dimostrare.

Lemma XI. *Se nel tratto* $(a\,b)$ $(a<b)$ *la funzione* $\zeta(x)$ *è di classe* $C^{(i)}$ *ed è sempre* $\zeta^{(i)}(x) > k$, *oppure è sempre* $\zeta^{(i)}(x) < -k$, k *indicando un numero* >0, *la funzione* $\zeta(x)$ *ha un'oscillazione* $> k\dfrac{(b-a)^i}{2^{i(2i-1)}}$.

Sia infatti $i=1$: sarà $\zeta(b)-\zeta(a) = \int_a^b \zeta'(x)\,dx$: essendo per ipotesi ζ' continua e $\zeta' > k$, segue $\zeta(b)-\zeta(a) > k(b-a)$: che dimostra l'enunciato per $i=1$.

Si supponga ora dimostrato il lemma per $i<\tau$, e proviamolo per $i=\tau$. Poichè si suppone che sia sempre $\zeta^{(\tau)}(x) > k$ oppure $\zeta^{(\tau)}(x) < -k$, presi due qualunque punti c_1 e c_2 di $(a\,b)$ ragionando come sopra per il caso di $\tau=1$, si avrà $|\zeta^{(\tau-1)}(c_1)-\zeta^{(\tau-1)}(c_2)| > k|c_1-c_2|$. Ne viene che, se consideriamo i due intervalli $\left(a, a+\dfrac{b-a}{4}\right)$, e $\left(b-\dfrac{b-a}{4}, b\right)$, in uno almeno di essi $\zeta^{(\tau-1)}(x)$ non cambia segno, ed anzi è sempre in valore assoluto $> k\dfrac{b-a}{4}$. Poichè, se c_1 e c_2 fossero due punti, l'uno nel primo, l'altro nel secondo di detti intervalli, in cui fosse $|\zeta^{(\tau-1)}(c_1)| < k\dfrac{b-a}{4}$,

$\zeta^{(i-1)}(c_2) < k\frac{b-a}{4}$ sarebbe $\zeta^{(i-1)}(c_1) - \zeta^{(i-1)}(c_2) > k\frac{b-a}{2}$, ciò che contraddice alla precedente disuguaglianza poichè

$$c_2 - c_1 > \left(b - \frac{b-a}{4}\right) - \left(a + \frac{b-a}{4}\right) = \frac{b-a}{2}.$$

Si chiami dunque $(a_1 b_1)$ quello dei detti intervalli in cui è sempre $\zeta^{(i-1)}(x) > k\frac{b-a}{4}$ o $\zeta^{(i-1)}(x) < -k\frac{b-a}{4}$: e si applichi — come per ipotesi è legittimo — il nostro lemma ponendo $i-1$ al posto di i, $(a_1 b_1)$ al posto di $(a b)$, $k\frac{b-a}{4}$ al posto di k. L'oscillazione di ζ in $(a_1 b_1)$ sarà quindi maggiore di $k\frac{b-a}{4}\frac{(b_1-a_1)^{i-1}}{2^{(i+1)(i-2)}} = k\frac{(b-a)^i}{2^{(i+2)(i-1)}}$: ed a fortiori ciò varrà quindi per $(a b)$.

Lemma XII. *Sia ζ una funzione di classe $D^{(q)}$ in $(a b)$: si supponga $|\zeta| < \rho_0$, $|\zeta^{(q)}| < \rho_q$: e, per fissare le idee, si supponga $\rho_0^{\frac{1}{q}} < \frac{b-a}{2}$* (*). *Esistono q numeri positivi $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, funzioni di ρ_q soltanto, tali che*

$$|\zeta^{(i)}| < \alpha_i\, \rho_0^{\frac{q-i}{q}} \quad (i = 1 \ldots q). \tag{7}$$

Il teorema è vero per $i = q$, poichè basta allora fare $\alpha_q = \rho_q$: noi lo supporremo dimostrato per $i > \tau$, e lo proveremo per $i = \tau$: con ciò sarà dimostrato in generale.

Sia c il punto in cui $\zeta^{(\tau)}(x)$ assume il suo massimo valore assoluto: e, per fissare le idee, sia $\zeta^{(\tau)}(c) = l > 0$. Sia c_1 un punto di $(a b)$ tale che $|c_1 - c| = \rho_0^{\frac{1}{q}}$: poichè si suppone $\rho_0^{\frac{1}{q}} < \frac{b-a}{2}$, un tale punto esisterà certamente. Per la formula di Taylor è

$$\zeta^{(\tau)}(x) = l + \zeta^{(\tau+1)}(c)(x-c) + \frac{1}{2!}\zeta^{(\tau+2)}(c)(x-c)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{(q-\tau)!}\zeta^{(q)}(x)(x-c)^{q-\tau}$$

(*) Poichè in quanto segue useremo questo teorema quando ρ_0 tende a zero, questa limitazione che lega ρ_0 e $b-a$ si potrà sempre supporre soddisfatta, quindi non ci importa toglierla. Però sarebbe facile modificare il ragionamento in modo da evitare questa ipotesi: le α_i risulterebbero funzioni, oltre che di ρ_q, anche di $b-a$ e di ρ_0, crescenti con ρ_0.

$\bar{x}$ indicando un numero compreso fra x e c. Quindi, ricordando che per $i > \tau$ si ammettono vere le (7), se x è un punto di $(c_1\, c)$ per cui quindi $|x - c| < \rho_0^{\frac{1}{q}}$, sarà

$$\zeta^{(\tau)}(x) > l - \rho_0^{\frac{q-\tau}{q}} \left[\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!}\alpha_{\tau+2} + \cdots + \frac{1}{(q-\tau)!}\alpha_q\right]. \tag{8}$$

Distinguiamo due casi secondo che è

$$l \leq \rho_0^{\frac{q-\tau}{q}} \left[\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!}\alpha_{\tau+2} + \cdots + \frac{1}{(q-\tau)!}\alpha_q\right]; \tag{9}$$

oppure è

$$l > \rho_0^{\frac{q-\tau}{q}} \left[\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!}\alpha_{\tau+2} + \cdots + \frac{1}{(q-\tau)!}\alpha_q\right].$$

In questo secondo caso il secondo membro di (8) è positivo: quindi si può applicare a ζ ed all'intervallo (c_1, c) il lemma precedente: avremo da (8) che l'oscillazione di ζ in (c_1, c) supera

$$\left[l - \rho_0^{\frac{q-\tau}{q}} \left(\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!}\alpha_{\tau+2} + \cdots + \frac{1}{(q-\tau)!}\alpha_q\right)\right] \frac{\rho_0^{\frac{\tau}{q}}}{2^{(\tau+2)(\tau+1)}}.$$

Ma l'oscillazione di ζ in $(a\, b)$, e quindi a fortiori in $(c_1\, c)$, non può superare $2\rho_0$: quindi si avrà

$$\left[l - \rho_0^{\frac{q-\tau}{q}} \left(\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!}\alpha_{\tau+2} + \cdots + \frac{1}{(q-\tau)!}\alpha_q\right)\right] \rho_0^{\frac{\tau}{q}} < 2^{(\tau+2)(\tau-1)+1}\rho_0,$$

e quindi pure

$$l < \left[2^{\tau^2+\tau-1} + \alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!}\alpha_{\tau+2} + \cdots + \frac{1}{(q-\tau)!}\alpha_q\right] \rho_0^{\frac{q-\tau}{q}}. \tag{10}$$

l verifica dunque l'una o l'altra delle due disuguaglianze (9) o (10), e poichè (10) include (9), risulta senz'altro dimostrata la (7) per $i = \tau$ ove si ponga

$$\alpha_\tau = 2^{\tau^2+\tau-1} + \alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!}\alpha_{\tau+2} + \cdots + \frac{1}{(q-\tau)!}\alpha_q. \tag{11}$$

È quindi pienamente dimostrato il lemma, e la formola (11), ove si aggiunga $\alpha_q = \rho_q$, determina per ricorrenza le α_i.

Il contenuto di questo lemma si può anche enunciare dicendo che, quando si considerano degli intorni di una data curva $\mathfrak{C}$ di cui la prima e la $(q+1)$esima dimensione siano ρ_0 e ρ_q, ci si può sempre, senza portare alcuna limitazione effettiva, limitare a considerare il caso in cui la i-esima dimensione con $i \leq q$ sia data da un numero $< \alpha_i \rho_0^{q-i+1}$. In particolare ove si considerino degli intorni del tipo D_{q_1} in cui almeno la prima dimensione ci si riserva di prendere arbitrariamente piccola, si può senz'altro supporre che anche arbitrariamente piccole si possano prendere tutte le dimensioni che precedono quella che tra le $p+1-q_1$ dimensioni prefissate che non sono $\sim$ è di ordine massimo. In altri termini dunque noi potremo, senza restringere la portata delle nostre considerazioni, limitarci a studiare le condizioni sufficienti (o necessarie) perchè $\mathfrak{C}$ dia il minimo rispetto alle curve $\mathfrak{L}$ che appartengono ad un intorno D_{q_1} di uno dei due tipi seguenti

$$\left[\underset{(0)}{r}, \ \underset{(1)}{r}, \ldots \underset{(q_1-1)}{r}, \ \rho_{q_1}, \ \underset{(q_1+1)}{\sim}, \ \underset{(q_1+2)}{\sim}, \ldots \underset{(p)}{\sim}\right], \tag{12}$$

$$\left[\underset{(0)}{r}, \ \underset{(1)}{r}, \ldots \underset{(q_1-1)}{r}, \ \underset{(q_1)}{\sim}, \ \underset{(q_1+1)}{\sim}, \ \underset{(q_1+2)}{\sim}, \ldots \underset{(p)}{\sim}\right]; \tag{13}$$

poichè la ricerca delle condizioni di minimo rispetto ad un intorno D_{q_1} del tipo $\left[\underset{(0)}{r}, \ \underset{(1)}{r}, \ldots \underset{(q_1-1)}{r}, \ \rho_{q_1}, \ \rho_{q_1+1}, \ldots \rho_q, \ \underset{(q+1)}{\sim}, \ldots \underset{(p)}{\sim}\right]$ per cui le $\rho_{q_1}, \rho_{q_1+1}, \ldots$ fossero qualunque finite o no, ma la ρ_q fosse finita, è equivalente alla ricerca delle condizioni di minimo in un intorno D_q del tipo (12). Per brevità a seconda che $\mathfrak{C}$ darà ad I il minimo in un intorno del tipo (12) o (13), diremo che $\mathfrak{C}$ *dà il minimo di ordine q_1-1 nel campo limitato od illimitato* (*): la distinzione cade solo nel caso in cui $q_1 = p+1$ perchè allora tutte le dimensioni dell'intorno sono da scegliersi arbitrariamente piccole (minimo debole).

In quanto segue noi daremo condizioni sufficienti per il minimo di ordine $p-1$ nel campo limitato o illimitato, e di ordine $p-2$ nel campo limitato. Mostreremo poi su esempi che quando si voglia studiare il minimo di ordine $p-2$ nel campo illimitato, e a maggior ragione quando si voglia il minimo di ordine $q < p-2$, si dovrà certo introdurre delle condizioni di tipo nuovo, e probabilmente assai diverso da quelle note come condizioni necessarie.

(*) Con tale terminologia i due teoremi dei nn. 3 e 7 del Capitolo precedente si dovrebbero chiamare rispettivamente teoremi delle condizioni sufficienti per il minimo di $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$ di ordine 0 nel campo limitato e nel campo illimitato.

2. *La variazione seconda e la trasformazione di Legendre-Jacobi.* — Ci è necessario richiamare alcuni risultati noti sulla variazione seconda ed alcune identità che ci saranno utili in seguito. Seguendo Clebsch e Frobenius (*) indichiamo con $\Psi(u)$ una forma differenziale lineare autoaggiunta di ordine $2p$, sia $\psi(x)$ il coefficiente di $u^{(2p)}$ in essa: sia infine $u_1, u_2, \dots, u_p$ un sistema di soluzioni associate (**) dell'equazione

$$\Psi(u) = 0. \tag{14}$$

Se $z(x)$ è una funzione che si annulla colle sue derivate dei primi $p-1$ ordini in x_1 e in x_2 e che si può porre sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} z &= z_1 u_1 + z_2 u_2 + \cdots + z_p u_p \\ z' &= z_1 u'_1 + z_2 u'_2 + \cdots + z_p u'_p \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z^{(p-1)} &= z_1 u_1^{(p-1)} + z_2 u_2^{(p-1)} + \cdots + z_p u_p^{(p-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

si ha l'identità

$$\int_{x_1}^{x_2} z \Psi(z)\, dx = (-1)^p \int_{x_1}^{x_2} \psi(x) (z'_1 u_1^{(p-1)} + \cdots + z'_p u_p^{(p-1)})^2\, dx. \tag{16}$$

Ciò posto, si consideri la variazione seconda di (1): sappiamo che sempre nell'ipotesi che z si annulli colle derivate dei suoi primi $(p-1)$ ordini in x_1 e in x_2, si ha

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 I &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{0 \leq i,k \leq p} \varphi''_{y^{(i)} y^{(k)}} z^{(i)} z^{(k)}\right] dx = \int_{x_1}^{x_2} z \Psi(z)\, dx \\ \Psi(u) &= \sum_{0 \leq i,k \leq p} (-1)^i \frac{d^i [\varphi''_{y^{(i)} y^{(k)}} u^{(k)}]}{dx^i}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Chiameremo *equazione di Jacobi* l'equazione $\Psi(u) = 0$: per la formula (16), se z si esprime per un sistema di soluzioni associate dell'equazione di Jacobi per mezzo delle (15), si ha

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 I &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{0 \leq i,k \leq p} \varphi''_{y^{(i)} y^{(k)}} z^{(i)} z^{(k)}\right] dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi''_{y^{(p)} y^{(p)}} \left[z'_1 u_1^{(p-1)} + z'_2 u_2^{(p-1)} + \cdots + z'_p u_p^{(p-1)}\right]^2 dx. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(*) Cfr. specialmente Frobenius, *Crelles Journal*, Vol. 85 (1878).

(**) E cioè tali che, detta $\psi(u, v)$ la forma bilineare associata alla $\psi(u)$, si abbia $\psi(u_i, u_k) = 0$ per tutti i valori diversi di i e k.

È opportuno trasformare ancora leggermente la (18): si ponga

$$Z_i = \sum z_l\, u_l^{(i)},\quad (i = 0, 1, \ldots, p);\qquad \overline{Z}_i = \sum z'_l\, u_l^{(i-1)},\quad (i = 1, \ldots, p): \tag{19}$$

le (15) si scriveranno

$$z = Z_0,\quad z' = Z_1, \ldots,\quad z^{(p-1)} = Z_{p-1},\quad z^{(p)} = Z_p + \overline{Z}_p, \tag{20}$$

ed avranno come conseguenza le altre

$$\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \cdots = \overline{Z}_{p-1} = 0. \tag{21}$$

Infine la (18) darà luogo all'identità seguente, fondamentale per noi:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{0 \leq i, k \leq p} \varphi''_{y^{(i)} y^{(k)}} Z_i Z_k + 2\, \overline{Z}_p \sum_{0 \leq i \leq p} \varphi''_{y^{(p)} y^{(i)}} Z_i \right] d\, x = 0. \tag{22}$$

È noto che la condizione di JACOBI — necessaria perchè $\mathfrak{C}$ dia ad I un valore massimo o minimo — si può esprimere dicendo che esiste un sistema di soluzioni associate dell'equazione di JACOBI, il cui Wronskiano è $\neq 0$ in tutto il tratto $(x_1\, x_2)$. D'ora in poi supporremo che $\mathfrak{C}$ soddisfaccia alla condizione di JACOBI: e che $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sia il sistema di funzioni di cui questa condizione afferma l'esistenza: indicando con $W(r, s, \ldots, t)$ il Wronskiano di $r, s, \ldots, t$, supporremo precisamente che in $(x_1\, x_2)$ sia

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_p) > m_1 > 0; \tag{23}$$

ed inoltre che le u_i e le loro derivate dei primi p ordini siano in modulo tutte inferiori a m_2:

$$\left[|u_i|, |u'_i|, \ldots, |u_i^{(p)}| \right] < m_2 \qquad (i = 1, \ldots, p). \tag{24}$$

In tale ipotesi, qualunque sia la $\mathfrak{L}$, e quindi la funzione $z(x)$ di (5), si potranno determinare le z_l in modo che siano soddisfatte le (15), poichè le (15) sono equazioni lineari nelle z_l il cui determinante è $W(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Importa notare le relazioni che passeranno tra le $z^{(k)} = Z_k$ $(0 \leq k \leq p-1)$, z_l, Z_p, $\overline{Z}_p$. Si avrà dalle (15)

$$z_l = \sum_0^{p-1} \alpha_{lk}(x)\, z^{(k)}, \tag{25$_1$}$$

$$Z_p = \sum_0^{p-1} \beta_k(x)\, z^{(k)}, \tag{25$_2$}$$

dove

$$z_{ik}(x) = \frac{1}{W(u_1 \ldots u_p)} \frac{\partial W(u_1 \ldots u_p)}{\partial u_i^{(k)}},$$

$$\beta_k(x) = \sum z_{ik}\, u_i^{(p)}.$$

Dalle (23) e (24) segue quindi che esisteranno due numeri positivi a_1 e a_2 dipendenti solo da m_1, m_2 (e da p) tali che

$$|z_{ik}(x)| < a_1, \qquad |\beta_k(x)| < a_2. \tag{26}$$

Inoltre per $\overline{Z}_i = \sum z'_l\, u_l^{(p-i)}$ si potranno anche trovare altre espressioni eliminando mediante le (21) alcune delle z'_l. Ad esempio si avranno per $\overline{Z}_p$ le nuove espressioni

$$\overline{Z}_p = \gamma_l(x)\, z'_l \qquad (l = 1 \ldots p) \tag{27}$$

con

$$\gamma_l(x) = \frac{W(u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}, u_l, u_{l+1}, \ldots, u_p)}{W(u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}, u_{l+1}, \ldots, u_p)};$$

e per le (23) e (24) si potrà trovare un numero positivo a_3 tale che

$$|\gamma_l(x)| > a_3. \tag{28}$$

3. *Trasformazione e partizione della variazione totale.* Si ponga, come al solito,

$$\left.\begin{aligned} &E(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)};\, y^{(p)}, \overline{y}^{(p)}) = \\ &\qquad f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}, \overline{y}^{(p)}) - f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}, y^{(p)}) - \\ &\qquad - (\overline{y}^{(p)} - y^{(p)})\, f'_{y^{(p)}}(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}, y^{(p)}), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

e si mantengano le notazioni del numero precedente. Si ha subito:

$$\left.\begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \Big[f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) - \varphi \Big]\, dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} E(x, y, \ldots, y^{(p-1)};\, \eta^{(p)} + Z_p, y^{(p)})\, dx + \\ &\qquad + \int_{x_1}^{x_2} \Big[f(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}, \eta^{(p)} + Z_p) - \varphi + \\ &\qquad\qquad + Z_p\, f'_{y^{(p)}}(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}, \eta^{(p)} + Z_p) \Big]\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Ma per la formola di TAYLOR, rammentando che per $i < p + 1$ è $y^{(i)} = \zeta^{(i)} + Z_i$, si avrà

$$
\left.
\begin{aligned}
& f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \zeta^{(p)} + Z_p) - \varphi = \\
& \qquad\qquad = \sum_{0 \le i \le p} \varphi'_{y^{(i)}} Z_i + \frac{1}{2} \sum_{0 \le i, h \le p} \varphi''_{y^{(i)} y^{(h)}} Z_i Z_h + \lambda_1, \\
& f'_{y^{(p)}}(x, y, \dots, y^{(p-1)}, \zeta^{(p)} + Z_p) = \varphi'_{y^{(p)}} + \sum_{0 \le i \le p} \varphi''_{y^{(i)} y^{(p)}} Z_i + \lambda_2,
\end{aligned}
\right\} \qquad (31)
$$

dove si pone

$$
\left.
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{3!} \sum_{i,h,k} \bar f'''_{y^{(i)} y^{(h)} y^{(k)}} Z_i Z_h Z_k, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (0 \le i, h, k \le p) \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2!} \sum_{i,h} f'''_{y^{(i)} y^{(h)} y^{(p)}} Z_i Z_h,
\end{aligned}
\right\} \qquad (32)
$$

e con $\bar f'''$, f''' si indicano valori delle derivate terze di f calcolati in punti convenienti della forma

$$
\left.
\begin{aligned}
& (x, \zeta + \bar\theta Z_0, \dots, \zeta^{(p-1)} + \bar\theta Z_{p-1}, \zeta^{(p)} + \bar\theta Z_p), \\
& (x, \zeta + \theta Z_0, \dots, \zeta^{(p-1)} + \theta Z_{p-1}, \zeta^{(p)} + \theta Z_p)
\end{aligned}
\right\} \qquad (33)
$$

con $0 < \theta < 1$, $0 < \bar\theta < 1$. Sostituiamo (31) nell'ultimo integrale di (30): si vede subito che gli integrali che portano su termini di primo e di secondo grado nelle Z_i, $\bar Z_i$ sono nulli per le identità (3) e (22). E si otterrà pertanto

$$
\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \zeta^{(p)} + Z_p, y^{(p)})\, dx + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 - \bar Z_p \lambda_2)\, dx. \qquad (34)
$$

È questa la formula analoga alla (16) del Cap. I.

4. *Il minimo di ordine $p - 1$ nel campo limitato o illimitato.* Partendo dalla formula precedente, è assai facile dimostrare i due teoremi seguenti relativi al minimo di ordine $p - 1$ nel campo limitato o illimitato che sono gli analoghi dei teoremi del Cap. I.

I. *Se l'estremale $\mathfrak{E}$ soddisfa alla condizione di Jacobi e se inoltre sono soddisfatte le condizioni seguenti:*

1.° $f''_{y^{(p)}y^{(p)}}(x, \zeta, \zeta', \dots, \zeta^{(p)}) > 0$.

2.° $E(x, \zeta, \zeta', \dots, \zeta^{(p-1)}; \zeta^{(p)}, y^{(p)}) > 0$ per $0 < |y^{(p)} - \zeta^{(p)}| \le \rho$,

si può trovare un numero r tale che $\mathfrak{E}$ dà ad I il valore minimo rispetto a *tutte le curve* $\mathfrak{L}$ *che soddisfanno alle stesse condizioni che* $\mathfrak{C}$ *negli estremi e sono tali che*

$$|y - \eta| \leq r, \qquad |y^{(p)} - \eta^{(p)}| \leq \rho_p .$$

O anche, come risulta dal lemma XII, *rispetto a tutte le curve* $\mathfrak{L}$ *che appartengono all'intorno* $\left[\underset{(0)}{r}, \underset{(1)}{r}, \ldots, \underset{(p-1)}{r}, \rho_p\right]$, *ove* r *sia scelto convenientemente piccolo.*

Le precedenti condizioni, quando si intendano le disuguaglianze prese in senso largo, sono pure necessarie per il minimo.

II. *Se l'estremale* $\mathfrak{C}$ *soddisfa alla condizione di Jacobi, ed inoltre è tale che*

1.° $f''_{y^{(p)}}(x, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(p)}) > 0,$

2.° *esistono* $p+1$ *numeri* $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_p$ *tali che per* $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_0, \ldots, |y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)}| \leq r_{p-1}$, $|y^{(p)} - \eta^{(p)}| \leq r_p$, $0 < |y^{(p)} - \overline{y}^{(p)}|$ *sia* $E(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)};\ y^{(p)}, \overline{y}^{(p)}) > 0,$

si può trovare un numero r *tale che* $\mathfrak{C}$ *dà il minimo rispetto a tutte le curve* $\mathfrak{L}$ *che soddisfanno alle stesse condizioni di* $\mathfrak{C}$ *negli estremi ed appartengono all'intorno* $\left[\underset{(0)}{r}, \underset{(1)}{r}, \ldots, \underset{(p-1)}{r}, \infty\right]$ *di* $\mathfrak{C}$.

La dimostrazione di questi due teoremi è affatto simile a quella degli analoghi nel caso $p = 1$. Importa richiamarne alcuni punti essenziali, per mostrare in che parti essa venga a mancare quando si parli di un minimo di ordine $< p - 2$. Fissiamo la mente sul primo di questi teoremi. È essenziale il notare che, in conseguenza delle osservazioni finali del n.° 2, quando si abbia $|z| < r$, $|z'| < r, \ldots, |z^{(p-1)}| \leq r$, si ha pure che $|Z_i| \leq r$ per $i < p - 1$, $|Z_p| \leq a_2 r$. In base a questo si vede subito che per r convenientemente piccolo per il primo integrale di (34) si avrà una limitazione del tipo

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)};\ \eta^{(p)} + Z_p, y^{(p)})\, dx > \mu \int_{x_1}^{x_2} \overline{Z}_p^2\, dx,$$

che per (27) e (28) si potrà pure scrivere

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)};\ \eta^{(p)} + Z_p, y^{(p)})\, dx > \frac{\mu\, a^2}{p} \sum_{1}^{p}{}_i \int_{x_1}^{x_2} z_i'^2\, dx. \tag{35}$$

D'altro canto, indicando con M il massimo delle derivate terze di $f(x, y, \ldots, y^{(p)})$ nell'intorno $\left[\underset{(0)}{r}, \underset{(1)}{r}, \ldots, \underset{(p-1)}{r}, \underset{(p)}{a_2 r}\right]$ di $\mathfrak{C}$, si avrà per (32), (33)

$$\int_{x_1}^{x_2} (\Omega - \cdots Z_i)\, dx < \frac{1}{3!} M \sum_{ihk} \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h Z_k|\, dx + \frac{1}{2!} M \sum_{ih} \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h \overline{Z}_p|\, dx. \tag{36}$$

Ma, supposto per semplicità $a_2 > 1$, per modo che senza eccezione si possa scrivere $|Z_i| < a_2 r \, (0 \leq i \leq p)$, si ha, ricordando il lemma III:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h Z_k| \, d x < a_2 r \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h| \, d x \leq a_2 r m_2^2 \sum_1^p{}_{ih} \int_{x_1}^{x_2} |z_h z_i| \, d x \leq \\ \leq \frac{a_2 m_2^2}{2} r \sum_1^p{}_{l_1 l_2} \int_{x_1}^{x_2} (z^2_{l_1} + z^2_{l_2}) \, d x \leq a_2 m_2^2 K' r \sum_1^p{}_{l} \int_{x_1}^{x_2} z_l^2 \, d x. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

E analogamente, ricordando anche (19) e (23):

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h \overline{Z}_p| \, d x < a_2 r \int_{x_1}^{x_2} |Z_i \overline{Z}_p| \, d x \leq a_2 m_2^2 r \sum_1^p{}_{hl} \int_{x_1}^{x_2} |z_h z'_l| \, d x \leq \\ \leq \frac{a_2 m_2^2}{2} r \sum_1^p{}_{l_1 l_2} \int_{x_1}^{x_2} (z^2_{l_1} + z'^2_{l_2}) \, d x \leq \frac{a_2 m_2 (K'_1 + 1)}{2} r \sum_1^p{}_{l} \int_{x_1}^{x_2} z'^2_l \, d x. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

È chiaro come sommando le (35) (36), per (37) e (38) si abbia

$$\left. \begin{aligned} & \Delta I > \left(\frac{\mu a_3^2}{p} - r H_6 \right) \sum_1^p{}_{l} \int_{x_1}^{x_2} z'^2_l \, d x \\ & H_6 = \frac{1}{3!} (p+1)^3 a_2 m_2^2 K' + \frac{1}{4} (p+1)^2 a_2 m_2^2 (K'_1 + 1), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

onde basta supporre $r < \dfrac{\mu a_3^2}{p H_6}$, perchè sia $\Delta I > 0$.

Non insisterò su questa dimostrazione nè su quella del teorema II perchè questi teoremi risultano d'altra parte anche dalla ordinaria teoria (*). Notiamo invece che, ove si voglia parlare di minimo di ordine $\leq p - 2$, come faremo in seguito, il punto in cui il precedente ragionamento viene a mancare, sta nelle disuguaglianze (37) e (38). Perchè ove ad es. si voglia il minimo di ordine $p - 2$, si potrà solo imporre che $|z|, |z'|, \ldots, |z^{(p-2)}|$ siano inferiori ad un numero r che resta in nostro arbitrio scegliere sufficientemente piccolo: ne verrà che $|Z_1|, |Z_2|, \ldots, |Z_{p-2}|$ saranno ancora inferiori ad r; ma nulla si potrà dire per $|Z_{p-1}|$ e $|Z_p|$. Onde non sarà possibile senz'altro dedurre le disuguaglianze (37) e (38) quando gli indici i, h, k siano tutti uguali a $p - 1$ o a p. Cosicchè per procedere noi dovremo con particolari artifici eliminare appunto questi termini. Occorre a tale scopo premettere un lemma.

(*) Hadamard, l. c., pag. 462.

5. LEMMA XIII. *Sia un integrale della forma* $\int_{x_1}^{x_2} \gamma(x, z, z', \ldots, z^{(p-1)})\, z^{(p)}\, dx$; *e sia* γ *una funzione che abbia le derivate prime. Si può determinare una funzione* $\gamma_1(x, z, z', \ldots, z^{(p-1)})$ *tale che, se* z *è una funzione arbitraria che si annulli colle sue derivate di ordine* $\leqq p-1$ *in* x_1 *e* x_2, *sia identicamente*

$$\int_{x_1}^{x_2} \gamma(x, z, z', \ldots, z^{(p-1)})\, z^{(p)}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \gamma_1(x, z, z', \ldots, z^{(p-1)})\, dx. \tag{40}$$

Invero si ponga

$$\delta(x, z, z', \ldots, z^{(p-2)}, z^{(p-1)}) = \int_0^{z^{(p-1)}} \gamma(x, z, z', \ldots, z^{(p-2)}, \zeta)\, d\zeta;$$

si avrà identicamente, se z è un'arbitraria funzione di x, di classe $C^{(p)}$

$$\frac{d\delta}{dx} = \gamma(x, z, z', \ldots, z^{(p-2)}, z^{(p-1)})\, z^{(p)} + \int_0^{z^{(p-1)}} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \sum_1^{p-1} \frac{\partial \gamma}{\partial z^{(k-1)}}\, z^{(k)}\right) d\zeta.$$

D'altra parte $\delta(x, z, z', \ldots, z^{(p-2)}, 0) = 0$: quindi, se z si annulla colle sue derivate dei primi $p-1$ ordini in x_1 e x_2, sarà

$$0 = \delta(x_2, 0, \ldots, 0) - \delta(x_1, 0, \ldots, 0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\,\delta(x, z, z', \ldots, z^{(p-1)})}{dx}\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x, z, \ldots, z^{(p-1)})\, z^{(p)}\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \gamma_1(x, z, z', \ldots, z^{(p-1)})\, dx$$

dove si ponga

$$\gamma_1(x, z, z', \ldots, z^{(p-1)}) = -\int_0^{z^{(p-1)}} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \sum_1^{p-1} \frac{\partial \gamma}{\partial z^{(k-1)}}\, z^{(k)}\right) d\zeta. \tag{41}$$

E questa dimostra la (40).

Sulla (41) si possono fare due osservazioni.

Osservazione I. Se γ ha le derivate parziali dei primi s ordini rapporto a $z, z', \ldots, z^{(p-1)}$, e se $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ ha le analoghe derivate parziali di ordine $\leqq s-1$, anche γ_1 ha le derivate parziali di ordine $\leqq s-1$. Se inoltre in un certo campo finito C in cui siano soddisfatte disuguaglianze della forma $|z^{(i)}| \leqq \rho_i$ le derivate di γ e di $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ sono inferiori in modulo a un certo numero M_1, le derivate di γ_1 in C sono inferiori a un numero della forma αM_1, dove α è una funzione (non decrescente) delle ρ_i.

Osservazione II. Se per $z = z' = \ldots = z^{(p-1)} = 0$, γ e quindi pure $\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}$ hanno le derivate parziali rapporto a $z, z', \ldots, z^{(p-1)}$ dei primi s_1 ordini nulle, lo stesso sarà per le derivate parziali di γ_1 di ordine $\leq s_1 + 1$. Naturalmente si suppone $s_1 \leq s - 2$, altrimenti non saremmo certi per l'osservazione I che esistessero le derivate di γ_1 di ordine $s_1 + 1$.

Applicando a γ e γ_1 la formula di Taylor arrestata ai primi termini non nulli nell'origine, si può dire che se γ è della forma

$$\gamma = \sum \gamma_{i_1 \ldots i_{s_1}} z^{(i_1)} \ldots z^{(i_{s_1})},$$

la γ_1 ha la forma:

$$\gamma_1 = \sum \gamma_{1, i_1 i_2 \ldots i_{s_1} i_{s_1+1}} z^{(i_1)} z^{(i_2)} \ldots z^{(i_{s_1+1})}.$$

6. *Il minimo d'ordine $p - 2$ nel campo limitato.* Introdurremo ora l'ipotesi che f sia di classe $C^{(2)}$ per $(x\, y)$ in R e per $y' \ldots y^{(p)}$ finiti; tale ipotesi è conseguenza di quelle fatte in principio del Capitolo fuorchè per $p = 2$. Avremo allora il teorema seguente: *Sia $\mathfrak{C}$ un'estremale del problema la quale soddisfaccia alla condizione di Jacobi: e, fissato un numero ρ_{p-1}, supponiamo che per*

$$| y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)} | \leq \rho_{p-1} \tag{42}$$

$$| y^{(p)} - \eta^{(p)} | \leq A \quad \textit{dove} \quad A > a_2\, \rho_{p-1} \tag{43}$$

siano soddisfatte le condizioni seguenti:

1.° $f''_{y^{(p)2}}(x, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(p-2)}, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}) > 0$,

2.° *esistano $p - 1$ numeri $r_0, r_1, \ldots, r_{p-2}$ tali che per* $| y - \eta | \leq r_0$, $| y' - \eta' | \leq r_1, \ldots, | y^{(p-2)} - \eta^{(p-2)} | \leq r_{p-2}$, $0 < | \bar{y}^{(p)} - y^{(p)} |$ *sia*

$$E(x, y, y', \ldots, y^{(p-2)}, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > 0;$$

è possibile trovare un r tanto piccolo che $\mathfrak{C}$ dia ad I il minimo rispetto alle curve $\mathfrak{L}$ che soddisfanno alle stesse condizioni negli estremi e che giacciono nell'intorno $r_{(0)}, r_{(1)}, \ldots, r_{(p-2)}, \rho_{p-1}, \infty\,]$ *di $\mathfrak{C}$.* O anche per il lemma XII, sotto forma apparentemente più larga, *è possibile trovare un r tale che $\mathfrak{C}$ dia ad I il minimo rispetto alle curve $\mathfrak{L}$ le quali soddisfanno la limitazione (42) e la*

$$| y - \eta | < r.$$

Cominciamo coll'osservare che, semplicemente ricordando la definizione della funzione E, si può estendere il teorema del n.° 5 del Cap. I sul comportamento della funzione E per y' tendente ad ∞, dimostrando che: se in un campo finito e chiuso T di valori di $(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)})$ sono soddisfatte le condizioni seguenti:

1.° $f''_{y^{(p)2}}(x, y, y', \dots, y^{(p-2)}, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}) > 0$,

2.° $E(x, y, y', \dots, y^{(p-2)}, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > 0$ per $0 < |\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}|$,

se T_1 è un campo chiuso contenuto in T — per cui esista un $\delta > 0$ tale che ogni punto di T_1 sia il punto di mezzo di un segmento di lunghezza $2\,\delta$, parallelo all'asse delle $y^{(p)}$ e totalmente contenuto in T, — esistono due numeri positivi σ_1 e μ_1 tali che, se $|\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}| > \sigma_1$ e $(x, y, \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)})$ è di T_1, si ha

$$E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > \mu_1 |\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}|. \tag{44}$$

Ciò premesso, dalle condizioni poste nel nostro teorema segue evidentemente che si può prendere un r', minore di $r_0, r_1, \dots, r_{p-2}$, e tale che sia

$$A > \alpha_2 (\rho_{p-1} + (p-1)\, r'), \tag{45}$$

e che per valori di $x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}$ che soddisfanno a (42), (43) e alle

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad |y - \eta| \leq r', \quad |y' - \eta'| \leq r', \dots, \quad |y^{(p-2)} - \eta^{(p-2)}| \leq r', \tag{46}$$

si abbia sempre

$$f''_{y^{(p)2}}(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}) > 0$$

$$E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < |\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}|.$$

Prendiamo come campo T il campo dato da (42), (43), (46); come campo T_1 il campo dato da (42), (46), e

$$|\bar{y}^{(p)} - \eta^{(p)}| \leq \alpha_2 (\rho_{p-1} + (p-1)\, r'), \tag{47}$$

come numero δ il numero $A - \alpha_2(\rho_{p-1} + (p-1)\, r')$ che per (45) è > 0; applichiamo il teorema ora enunciato: si potrà dunque determinare σ_1 e μ_1 tali che nel campo dato da (42), (46), (47), tosto che è

$$|\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}| > \sigma_1, \tag{48}$$

si abbia (44).

D'altra parte, posto al solito

$$E_1(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) = \frac{E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)})}{(\bar{y}^{(p)} - y^{(p)})^2} \text{ se } \bar{y}^{(p)} - y^{(p)} \neq 0,$$

$$E_1(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, \bar{y}^{(p)}) = \frac{1}{2} f''_{y^{(p)2}}(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}),$$

la funzione E_1 risulta sempre continua e positiva nel campo (42), (46), (47): quindi se aggiungiamo la limitazione

$$| y^{(p)} - y'^{(p)} | < \sigma_1 , \tag{49}$$

si può determinare un μ tale che in (42), (46), (47), (49) sia $E_1 > \mu$: sarà allora

$$E(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}; y^{(p)}, y'^{(p)}) > \mu (y^{(p)} - y'^{(p)})^2 . \tag{50}$$

In tali condizioni veniamo all'esame di ΔI: e presa una qualunque curva $\mathfrak{L}$ soddisfacente alle (39), (43), applichiamo (34). Incominciamo ad esaminare il primo integrale: intanto in esso per $y^{(p)}$ compare $\tilde{y}^{(p)} + Z_p$: ma per $(25)_2$ e (26), $| Z_p | \leq a_2 (\sigma_{p-1} + (p-1) r')$, cioè risulta soddisfatta la (47): si possono dunque applicare le disuguaglianze (44), (50): quindi, chiamando χ l'insieme dei punti di $(x_1 x_2)$ in cui $| Z_p | \leq \sigma_1$, e χ_1 l'insieme complementare, sarà

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}; \tilde{y}^{(p)} + Z_p, y^{(p)})\, dx > \mu \int_{\chi} \overline{Z}_p^2 \, dx + \mu_1 \int_{\chi_1} | \overline{Z}_p | \, dx :$$

che per (27) e (28) possiamo pure scrivere

$$\left.\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}; \tilde{y}^{(p)} + Z_p, y^{(p)})\, dx > \mu \frac{a^2}{p} \sum_1^p \int_{\chi} z_i^2 \, dx \\ + \frac{\mu_1 a_1}{p} \sum_1^p \int_{\chi_1} | z_i | \, dx .\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Più delicato è l'esame dell'altro integrale di (34). Osserviamo anzitutto che se si pone per $\overline{Z}_p$ il suo valore $z^{(p)} + Z_p$ si ha

$$\lambda_1 + \lambda_2 \overline{Z}_p = (\lambda_1 + \lambda_2 Z_p) + \lambda_2 z^{(p)} .$$

Ma per (32) e $(25)_2$ si ha

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_2 Z_p = \sum \bar{g}_{ihk} \, z^{(i)} z^{(h)} z^{(k)} \\ \bar{g}_{ihk} = \frac{1}{3!} \bar{f}'''_{y^{(i)} y^{(h)} y^{(k)}} - \frac{1}{2!} f'''_{y^{(i)} y^{(h)} y^{(k)}} \beta_k .\end{aligned}\right\} \quad (i, h, k \leq p - 1) \tag{52}$$

Se quindi M indica un numero che superi in valore assoluto i valori delle derivate terze di f nel campo (46), (47), avremo $| \bar{g}_{ihk} | < \left(\frac{1}{3!} + \frac{a}{2!} \right) M$.

Quanto a $\lambda_2 z^{(p)}$ si osservi che per (31) è

$$\lambda_2 = f'_{y^{(p)}}(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}, \eta^{(p)} + Z^{(p)}) - \varphi'_{y^{(p)}} - \sum_0^p \varphi''_{y^{(i)}y^{(p)}} Z_i =$$

$$= f'_{y^{(p)}}(x, \eta + z, \eta' + z', \ldots, \eta^{(p-1)} + z^{(p-1)}, \eta^{(p)} + \sum_0^{p-1} \beta_i z^{(i)}) - \varphi'_{y^{(p)}}(x) -$$

$$- \sum_0^{p-1} \varphi''_{y^{(i)}y^{(p)}} z^{(i)} - \varphi''_{y^{(p)}} \sum_0^{p-1} \beta_i z^{(i)} ;$$

essa è dunque una funzione che ammette le derivate parziali dei primi 4 ordini rispetto alle $z, z', \ldots, z^{(p-1)}$; e $\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial x}$ ammette le derivate analoghe dei primi 3 ordini; e infine per le (32) evidentemente λ_2 e le sue dette derivate parziali dei primi 2 ordini si annullano per $z = z' = \cdots = z^{(p-1)} = 0$. Applicando allora il lemma XII a $\int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 z^{(p)} d\,x$, avremo

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 z^{(p)} d\,x = \int_{x_1}^{x_2} \Sigma\, \overline{\overline{g}}_{ihk}\, z^{(i)} z^{(h)} z^{(k)} d\,x \qquad (i,\ h,\ k \leq p-1). \tag{53}$$

E per l'osservazione 1 del n.° 5, se M è anche maggiore dei valori delle derivate dei primi 5 ordini nel campo (46), (47), le $\overline{\overline{g}}_{ihk}$ sono tutte nel campo (46), (47) inferiori ad un numero della forma $\alpha_1 M$ dove α_1 è un numero, analogo ad α, il quale dipende solo dai massimi moduli delle $z^{(i)}$ in (46), (47), e dal massimo modulo delle η e delle loro derivate, e da a_1, a_2.

Riassumendo dalle (52) e (53) abbiamo l'identità

$$\int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 + \lambda_2 \overline{Z}_p)\, d\,x = \Sigma \int_{x_1}^{x_2} g_{ihk}\, z^{(i)} z^{(h)} z^{(k)} d\,x \tag{54}$$

dove i, h, k sono compresi fra 0 e $p-1$, e le g_{ihk} sono quantità che soddisfanno ad una disuguaglianza del tipo

$$|\, g_{ihk} \,| < a_4 M. \tag{55}$$

Ciò posto indicando con r un'indeterminata ($\leq r'$) che ci riserbiamo di fissare convenientemente, supponiamo che sia

$$|\, z \,| \leq r, \quad |\, z' \,| \leq r, \ldots, \quad |\, z^{(p-2)} \,| \leq r. \tag{56}$$

Consideriamo un termine qualunque di (52) che non sia quello in $z^{(p-1)3}$ e cioè tale che uno degli indici almeno sia $< p-1$: per fissare le idee, l'indice $< p - 1$ sia i. Applicando ripetutamente il lemma III si ha per $l < p - 1$,

$$\int_{x_1}^{x_2} z^{(l)2}\, d\,x < K'^{\,p-1-l} \int_{x_1}^{x_2} z^{(p-1)2}\, d\,x,$$

quindi per (55), (56)

$$\left.\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{x_2} g_{ihk}\, z^{(i)}\, z^{(h)}\, z^{(k)}\, d\,x\right| &< a_6\, M\, r \int_{x_1}^{x_2} |\, z^{(h)}\, z^{(k)}\,|\, d\,x \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\, a_6\, M\, r \left[\int_{x_1}^{x_2} z^{(h)2}\, d\,x + \int_{x_1}^{x_2} z^{(k)2}\, d\,x\right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\, a_6\, M\, r \left\{ K'^{\,p-1-h} + K'^{\,p-1-k} \right\} \int_{x_1}^{x_2} z^{(p-1)2}\, d\,x \leq \\ &\leq \frac{m_2^2}{2}\, a_6\, M\, r \left\{ K'^{\,p-1-h} + K'^{\,p-1-k} \right\} \sum_1^p{}_{l_1 l_2} \int_{x_1}^{x_2} |\, z_{l_1}\, z_{l_2}\,|\, d\,x.\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Quanto al termine in $z^{(p-1)3}$ si osservi che

$$|\, z^{(p-1)}\,|^3 = \frac{d\,[\,|\, z^{(p-1)}\,|\, z^{(p-1)}\, z^{(p-2)}\,]}{d\,x} - 2\, z^{(p-2)}\, |\, z^{(p-1)}\,|\, z^{(p)},$$

onde

$$\left.\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{x_2} g_{p-1\,p-1\,p-1}\, z^{(p-1)3}\, d\,x\right| &< a_6\, M \int_{x_1}^{x_2} |\, z^{(p-1)}\,|^3\, d\,x = \\ &= 2\, a_6\, M \int_{x_1}^{x_2} |\, z^{(p-2)}\, z^{(p-1)}\, z^{(p)}\,|\, d\,x \leq \\ &\leq 2\, a_6\, M\, r \int_{x_1}^{x_2} |\, z^{(p-1)}\, z^{(p)}\,|\, d\,x \leq \\ &\leq 2\, m_2^2\, a_6\, M\, r \left\{ \sum_1^p{}_{l_1 l_2} \int_{x_1}^{x_2} |\, z_{l_1}\, z_{l_2}\,|\, d\,x + \sum_1^p{}_{l_1 l_2} \int_{x_1}^{x_2} |\, z_{l_1}\, z'_{l_2}\,|\, d\,x \right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Ora ricordiamo che per $(25)_1$ e (26) è sempre

$$|\, z_l\,| < a_1\, (\rho_{p-1} + (p-1)\, r') ; \qquad (59)$$

quindi applicando il lemma VII avremo

$$\left.\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} |\, z_{l_1}\, z_{l_2}\,|\, d\,x \leq \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (z_{l_1}^2 + z_{l_2}^2)\, d\,x &\leq \frac{1}{2}\, K \int_{Z} (z'^2_{l_1} + z'^2_{l_2})\, d\,x + \\ &+ \frac{1}{2}\, K'_2 \int_{Z_1} \left[\,|\, z'_{l_1}\,| + |\, z'_{l_2}\,|\,\right] d\,x,\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

dove per (59) è $K'_2 = a_1(\rho_{p-1} + (p-1)r')(x_2 - x_1)$. Imitando poi il ragionamento del lemma VI, sarà

$$\left.\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} |z_{l_1} z'_{l_2}|\, dx &\leq \int_{Z} |z_{l_1} z'_{l_2}|\, dx + a_1\left[\rho_{p-1} + (p-1)r'\right] \int_{Z_1} |z'_{l_2}|\, dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{Z} z_{l_1}^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{Z} z'^2_{l_2}\, dx + a_1\left[\rho_{p-1} + (p-1)r'\right] \int_{Z_1} |z'_{l_2}|\, dx \leq \\
&\leq \frac{1}{2} K \int_{Z} z'^2_{l_1}\, dx + \frac{1}{2}\int_{Z} z'^2_{l_2}\, dx + \frac{1}{2} K'_2 \int_{Z_1} |z'_{l_1}|\, dx + \\
&\qquad + a_1\left[\rho_{p-1} + (p-1)r'\right] \int_{Z_1} |z'_{l_2}|\, dx.
\end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Onde infine raccogliendo dalle (54), (57), (58), (60) e (61), avremo

$$\int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 + \lambda_2 \bar{Z}_p)\, dx < r\left[H_7 \sum_1^p{}_l \int_Z z'^2_l\, dx + H_8 \sum_1^p{}_l \int_{Z_1} |z'_l|\, dx\right]. \qquad (62)$$

dove H_7 e H_8 sono numeri formati con m_2, a_6, M, $a_1(\rho_{p-1} + (p-1)r')$, K', K'_2, p, ma indipendenti da r.

Associando (62) colla (51) si avrà

$$\Delta I \geq \left(\mu_1 \frac{a_5^2}{p} - r H_7\right) \int_Z z'^2_l\, dx + \left(\mu_1 \frac{a_3}{p} - r H_8\right) \int_{Z_1} |z'_l|\, dx, \qquad (63)$$

onde basterà prendere r tale che si abbia, oltrechè $r \leq r'$

$$r < \frac{\mu_1 a_5^2}{p H_7}, \qquad r < \frac{\mu_1 a_3}{p H_8},$$

perchè sia $\Delta I > 0$. c. v. d.

7. *Osservazioni critiche: il caso regolare.* Il confronto dell'enunciato del teorema precedente coll'enunciato del teorema II del n.° 4 ci fa vedere immediatamente come in sostanza le condizioni imposte siano nei due casi di tipo affatto analogo, e differiscano per il solo fatto che le condizioni relative alle funzioni E e $f''_{y^{(p)}y^{(p)}}$ nel teorema precedente devonsi ammettere soddisfatte per un insieme di valori di $y^{(p-1)}$, $y^{(p)}$ più ampio che nel teorema II. Sarebbe del resto facile mostrare che le condizioni del teorema II del n.° 4 non sarebbero sufficienti nel caso presente.

Un caso assai importante in cui tutte queste condizioni sono soddisfatte è il caso che, per analogia a quanto si usa fare se $p = 1$, diremo il *caso regolare*: un problema di minimo dicesi regolare in un certo campo R del piano xy, se in R è sempre $f''_{y^{(p)}y^{(p)}}(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}, y^{(p)}) > 0$, qualunque siano $y', y'', \ldots, y^{(p)}$. È chiaro che soddisfatta questa condizione in un intorno di $\mathfrak{C}$, ne risultano subito soddisfatte anche le condizioni 1.° e 2.° del nostro teorema; onde potremo conchiudere: *se il problema è regolare nell'intorno di $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ dà il minimo di ordine $p-2$ nel campo limitato.*

8. *Sul minimo di ordine $p-2$ nel campo illimitato e sui minimi di ordine $< p-2$.* Si dovrebbe ora spingere ulteriormente l'analisi sui minimi in campi meno restrittivi: non mi è riuscito di trovare nuove condizioni sufficienti di tipo non troppo evidentemente banale. Si può però notare che per studiare tali casi occorrerà certo introdurre delle condizioni di tipo nuovo: precisamente dirò che non si possono ottenere condizioni sufficienti per questi ulteriori minimi solo coll'allargare il campo in cui si immaginano variabili le $y, y', \ldots, y^{(p-1)}, y^{(p)}, \overline{y}^{(p)}$ nelle funzioni $f''_{y^{(p)}y^{(p)}}$, E; come avveniva invece nei tre teoremi dimostrati fin qui.

Perciò consideriamo l'integrale

$$I = \int_0^1 \left[\sqrt{1+y''^2} - e^{y}\right] d\,x. \tag{64}$$

Se noi imponiamo che nei punti $x = 0$ e $x = 1$, y ed y' si annullino, l'estremale $\mathfrak{C}$ di (64) che soddisfa a dette condizioni è il segmento $0 \leq x \leq 1$ dell'asse delle x, e questa curva dà ad I il valore 0: ed evidentemente soddisfa la condizione di JACOBI.

D'altra parte il problema è *sempre regolare*, poichè $f''_{y''y''} = \dfrac{1}{(1+y''^2)^{\frac{3}{2}}}$;

ne segue che è *sempre* $f_{y''y''}(x, y, y', y'') > 0$, $E(x, y, y'; y'', \overline{y}'') > 0$ per $|\overline{y}'' - y''| > 0$. Per il teorema precedente quel segmento dà ad I il minimo di ordine 0 nel campo limitato; cioè fissato un numero ρ_1 arbitrario, si può determinare un $r(\rho_1)$ tale che tutte le curve per cui $|y| \leq r(\rho_1)$, $|y'| < \rho_1$ danno ad I un valore > 0. Ora io dimostrerò che invece detto segmento *non dà* certo il minimo di ordine 0 nel campo illimitato: ciò che proviene dal fatto che col tendere di ρ_1 all'infinito, $r(\rho_1)$ tende necessariamente a zero.

Preso dunque un r arbitrariamente piccolo, sia $\mathfrak{L}$ la curva data dalle formule:

quando $0 \leq x \leq r^2$, sia $y = \frac{x^2}{2r^3}$, $y' = \frac{x}{r^3}$, $y'' = \frac{1}{r^3}$,

quando $r^2 < x \leq 2r^2$, sia $y = -r + \frac{2x}{r} - \frac{x^2}{2r^3}$, $y' = \frac{2}{r} - \frac{x}{r^3}$, $y'' = -\frac{1}{r^3}$,

quando $2r^2 < x \leq 1$, sia

$$y = r\left[3 - 2\frac{1-x}{1-2r^2}\right]\left(\frac{1-x}{1-2r^2}\right)^2,$$

$$y' = -6r\frac{1-x}{(1-2r^2)^2}\left(1 - \frac{1-x}{1-2r^2}\right), \quad y'' = \frac{6r}{(1-2r)^2}\left(1 - 2\frac{1-x}{1-2r^2}\right).$$

È chiaro che tale curva è di classe $D^{(2)}$, e quindi può essere assunta quale curva variata: inoltre y assume su di essa il massimo valore in $x = 2r^2$ e vale r: tale curva giace dunque nell'intorno assegnato.

Si calcoli il valore di I ad essa relativa: si ottiene

$$I_{\mathfrak{L}} = -2r^2\left(e^{\frac{1}{r}} - 1\right) + O(r),$$

dove con $O(r)$ indichiamo una quantità che quando r tende a zero diventa infinita di ordine ≤ 1. Sarà quindi per r sufficientemente piccolo $I_{\mathfrak{L}} < 0 = I_{\mathfrak{C}}$.

c. v. d.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XXI della Serie III, pag. 173 e seguenti.

Tipo-Lit. Rebeschini di Turati e C.
Milano, 1913.

MILANO — TIPO-LIT. REBESCHINI DI TURATI E C.

Offerto dall' Autore.

ESTRATTO

DAGLI *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.*

Sopra una classe di trascendenti meromorfe.

(*Del Dott.* Eugenio Elia Levi, *a Pisa.*)

1. Nella presente Nota mi propongo di risolvere la questione seguente: *Costrurre tutte le funzioni $f(z)$, meromorfe in tutto il piano (al finito) della variabile complessa z, che soddisfanno le equazioni funzionali*

$$\left.\begin{array}{l} f(z+\omega)=f(z) \\ f(z+\omega_1)=R(f(z)) \end{array}\right\} \tag{1}$$

dove ω ed ω_1 sono costanti arbitrarie e $R(x)$ è il simbolo di una funzione razionale di x (*). È naturale che una tale funzione non esisterà qualunque siano ω, ω_1, R: si tratterà quindi sia di trovare le condizioni sotto cui le (1) possono essere soddisfatte da qualche funzione $f(z)$, sia di costrurre effettivamente le $f(z)$ corrispondenti.

Se si pone $u=e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}$, una funzione $f(z)$ che soddisfaccia alle precedenti condizioni diviene una funzione uniforme della variabile u con punti singolari essenziali al più nei punti $u=0$ ed $u=\infty$: le equazioni (1) si ridurranno ad una sola equazione $\varphi(m\,u)=R(\varphi(u))$ dove $m=e^{\frac{2\pi i\omega_1}{\omega}}$. Ed inversamente una funzione $\varphi(u)$ con punti singolari solo nell'origine e per $u=\infty$ e soddisfacente all'equazione $\varphi(m\,u)=R(\varphi(u))$ si trasforma ponendo $u=e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}$

(*) Il Picard trattò un problema analogo nelle Memorie: *Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes* (Acta Mathematica, Vol. 18 e 23). In queste il Picard dimostrò che date m funzioni razionali $R_1, R_2, \ldots, R_m$ in m variabili è sempre possibile costruire delle funzioni meromorfe *nel semipiano* che soddisfacciano le equazioni

$$f_i(z+\omega)=f_i(z),\quad f_i(z+\omega_1)=R_i(f_1(z),\ f_2(z),\ldots,f_m(z)),\quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Se le $x'_i=R_i(x_1\,x_2\ldots x_m)$ definiscono una trasformazione birazionale le funzioni costruite sono meromorfe in tutto il piano.

in una funzione $f(z)$ che soddisfa alle condizioni del problema: onde potremo concludere che il problema proposto equivale all'altro:

Costruire le funzioni $\varphi(u)$ della variabile complessa u i cui punti singolari essenziali, se esistono, cadono nell'origine od all'infinito e che soddisfano l'equazione

$$\varphi(m\,u) = R(\varphi(u)) \tag{2}$$

dove m è una costante arbitraria ed $R(x)$ è, come precedentemente, il simbolo di una funzione razionale di x (*).

2. Occorre che premettiamo qualche osservazione riguardante la funzione razionale $R(x)$.

Si ponga

$$\psi(z) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0);$$

sarà

$$\psi(z + \omega) = \psi(z)$$

$$\psi(z + \omega_1) = R_1(\psi(z))$$

con

$$R_1(x) = \frac{\alpha R\left(\dfrac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}\right) + \beta}{\gamma R\left(\dfrac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}\right) + \delta}. \tag{3}$$

Vale a dire che una sostituzione lineare qualunque (non degenere) porta da una funzione $f(z)$ che soddisfa alle condizioni del problema ad una $\psi(z)$ che soddisfa ancora alle condizioni del problema per una *conveniente* funzione razionale R.

Usufruendo dell'arbitrarietà di α, β, γ, δ si può fare in modo che $R_1(x)$ soddisfaccia ad alcune condizioni. Ponendo $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ la (3) si può

(*) Il Poincaré trattò sotto qualche restrizione un problema analogo a questo nella Memoria: *Sur une classe nouvelle de trascendentes uniformes* (Journal de Mathématiques, IV série, vol. 6, 1890), anche nel caso di più funzioni incognite. I risultati di quella Memoria saranno richiamati più in là per quella parte che ci sarà necessaria (vedi n. 6).

scrivere

$$R_1(x) = \frac{\alpha P\left(\frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}\right) + \beta Q\left(\frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}\right)}{\gamma P\left(\frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}\right) + \delta Q\left(\frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}\right)}.$$

Si determinino anzitutto γ e δ in modo che sia soddisfatta l'equazione

$$P\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) + \frac{\delta}{\gamma}\, Q\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = 0.$$

Se $\frac{P(x)}{Q(x)}$ è irreduttibile, $P\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ e $Q\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ non saranno ambedue $= 0$. Si scelgano allora α e β in modo che $\frac{\alpha}{\beta} \neq \frac{\gamma}{\delta}$ e quindi $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$; sarà

$$\alpha P\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) + \beta Q\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = 0;$$

ed in $R_1(x)$ il numeratore resterà di grado maggiore di una unità almeno del denominatore. Ponendo di nuovo R al posto di R_1 e chiamando h il grado del numeratore, potremo quindi anzitutto supporre $R(x) = \frac{P_h(x)}{Q_{h-1}(x)}$ dove $P_h(x)$ è un polinomio di grado h e $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h - 1$ *al più*.

Ma si può fare di più. Formiamo l'equazione $P_h(x) - x\, Q_{h-1}(x) = 0$; o essa non ammette radici, ed in tal caso si deve avere identicamente $P_h(x) - x\, Q_{h-1}(x) = a$, a essendo una costante diversa da zero, e cioè

$$R(x) = x + \frac{a}{Q_{h-1}(x)} \qquad (a = \text{cost.});$$

oppure essa ammette radici: sia β una di esse. Colla sostituzione $x = x' + \beta$ la funzione razionale $R(x)$ verrà sostituita da una funzione ancora della forma $\frac{P_h(x)}{Q_{h-1}(x)}$, ma per cui si avrà $P_h(0) = 0$ ossia $P_h(x) = x\, P_{h-1}(x)$. Possiamo quindi limitarci a cercare le funzioni meromorfe $f(z)$ per cui le equazioni funzionali (1) appartengono ad uno dei tipi seguenti:

$$f(z + \omega) = f(z), \quad f(z + \omega_1) = \frac{f(z)\, P_{h-1}(f(z))}{Q_{h-1}(f(z))} \qquad (1)_1$$

dove $P_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ e $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ al più:

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f(z+\omega_1)=f(z)+\frac{a}{Q_{h-1}(f(z))}\qquad (a=\text{cost.}\neq 0)\qquad (1)'_2$$

dove $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ (*).

Possiamo ancora semplificare la questione: poichè se una funzione soddisfa un sistema $(1)'_2$ se ne può dedurre una che soddisfaccia un sistema di equazioni del tipo $(1)'_1$. Infatti o $Q_{h-1}(x)$ è una costante ($h=1$), oppure $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio vero e proprio.

Nel primo caso $f(z)$ soddisfa il sistema

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f(z+\omega_1)=f(z)+a,$$

e la funzione $\psi(z)=e^{f(z)}$ soddisfa il sistema

$$\psi(z+\omega)=\psi(z),\quad \psi(z+\omega_1)=k\,\psi(z)\qquad (k=e^a)$$

che è del tipo $(1)_1$ (**).

(*) Geometricamente: la relazione $x'=R(x)$ definisce una corrispondenza sopra la retta, la quale si può ottenere ponendo $x'=f(z+\omega_1)$, $x=f(z)$ dove $f(z)$ soddisfa alle (1). Se questa corrispondenza ha due punti uniti, si può mediante una trasformazione lineare assumere questi come punti 0 e ∞: fatta una tale trasformazione lineare sulla x, per ottenere la corrispondenza basterà porre $x'=f(z+\omega_1)$ e $x=f(z)$ dove $f(z)$ soddisfa alle $(1)'_1$. Se invece la corrispondenza ha un solo punto unito si potrà prendere, con una sostituzione lineare, questo punto come punto all'∞: in tal modo $x'-x$ deve annullarsi solo per $x=\infty$ e cioè essere della forma $\frac{a}{Q_{h-1}(x)}$ ($a=$ cost): in tal caso la $f(z)$ corrispondente soddisfa alle $(1)'_2$. E qui debbonsi distinguere due casi: se la corrispondenza è una proiettività parabolica ($h=1$) ogni sua potenza è ancora una proiettività parabolica collo stesso punto unito: se non è una proiettività, la discussione che segue nel testo dimostra rigorosamente che il suo quadrato possiede altri punti uniti distinti da quelli della corrispondenza primitiva: cosa che facilmente si può prevedere conteggiando il loro numero. Ed allora sostituendo alla corrispondenza primitiva il quadrato di essa si ricade nel primo caso. È questo in sostanza il risultato espresso dal teorema finale del presente n. 2.

(**) Si noti che la proposizione inversa non è valida: poichè non sempre il logaritmo di una funzione $\psi(z)$ che soddisfaccia l'equazione $\psi(z+\omega)=\psi(z)$ soddisfa pure l'equazione medesima: occorre perciò che il logaritmo riprenda la stessa determinazione nei punti z e $z+\omega$. Non sarebbe difficile esaurire direttamente lo studio del caso in cui le equazioni sono del tipo $f(z+\omega)=f(z)$, $f(z+\omega_1)=f(z)+a$: tuttavia per omogeneità di trattazione, seguiremo l'artificio indicato nel testo.

Se $Q_{h-1}(x)$ non è costante si avrà

$$\left. \begin{aligned} f(z+2\omega_1) &= f(z) + \frac{a}{Q_{h-1}(f(z))} + \frac{a}{Q_{h-1}\left[f(z) + \frac{a}{Q_{h-1}(f(z))}\right]} \\ &= f(z) + a\,\frac{Q_{(h-1)h}(f(z)) + Q_{h-1}^{h}(f(z))}{Q_{(h-1)h}(f(z)) \cdot Q_{h-1}(f(z))} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

ove $Q_{h(h-1)}(x)$ rappresenta un polinomio di grado $h(h-1)$. Ora $Q_{h(h-1)}(x)=0$ e $Q_{h-1}(x)=0$ non hanno radici comuni; infatti se $\beta_1 \ldots \beta_{h-1}$ sono le radici della equazione $Q_{h-1}(x)=0$, quelle di $Q_{h(h-1)}(x)=0$ sono le radici delle $h-1$ equazioni $x\,Q_{h-1}(x) + a = \beta_i\,Q_{h-1}(x)$, ossia $Q_{h-1}(x)(\beta_i - x) - a = 0$; e quindi non possono mai coincidere colle β_i. La frazione del secondo membro di (4) è quindi irreduttibile: il suo denominatore risulta un polinomio di grado $(h+1)(h-1)$; ed il suo numeratore, se si osserva che in $Q_{h(h-1)}(x)$ e $Q_{h-1}^{h}(x)$ i coefficienti di $x^{h(h-1)}$ sono uguali, risulta un polinomio di grado $h(h-1)$. Esisteranno quindi delle radici dell'equazione $Q_{(h-1)h}(x) + Q_{h-1}^{h}(x) = 0$; se β è una di esse, si vede facilmente che la funzione $\psi(z) = f(z) - \beta$ soddisfa ad un sistema di equazioni del tipo di $(1)'_1$ relativamente ai periodi ω e $2\omega_1$.

Concludendo possiamo dunque dire che basta risolvere la questione seguente:

Costrurre tutte le funzioni meromorfe $f(z)$ che soddisfanno le equazioni

$$f(z+\omega) = f(z), \quad f(z+\omega_1) = \frac{f(z)\,P_{h-1}(f(z))}{Q_{h-1}(f(z))} \tag{1$_1$}$$

dove $P_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ e $Q_{h-1}(x)$ è un polinomio di grado $h-1$ al più.

Assoggettando queste funzioni ad una qualunque sostituzione lineare, si otterranno altrettante nuove funzioni del tipo cercato. Inoltre potranno ancora essere funzioni che soddisfanno al nostro problema i logaritmi delle funzioni $f(z)$ che si ottengono quando nella seconda delle $(1)_1$ sia $h=1$ talchè essa si riduca a $f(z+\omega_1) = k\,f(z)$ (k = cost.) (*).

Oppure possiamo anche limitarci a

Costrurre tutte le funzioni $\varphi(u)$ i cui punti singolari essenziali, se esistono,

(*) Cfr. la nota precedente.

cadono nell'origine e all'infinito e che soddisfanno all'equazione

$$\varphi(m\,u) = \frac{\varphi(u)\,P_{h-1}(\varphi(u))}{Q_{h-1}(\varphi(u))}, \tag{2$_1$}$$

dove $m = e^{\frac{2\pi i\omega_1}{\omega}}$ *e* $P_{h-1}(x)$, $Q_{h-1}(x)$ *hanno il solito significato.*

Si noti che, se invece delle funzioni $f(z)$ o $\varphi(u)$ soddisfacenti $(1)_1$ o $(2)_1$, si considerano le funzioni $\frac{1}{f(z)}$ o $\frac{1}{\varphi(u)}$, le nuove funzioni soddisfanno ancora delle equazioni del tipo $(1)_1$ o $(2)_1$. Ed ancora dal modo stesso con cui si è dimostrato la possibilità di giungere ad equazioni del tipo $(1)_1$ (od $(1)'_1$) e $(2)_1$ risulta che se β è una radice dell'equazione $P_{h-1}(x) - Q_{h-1}(x) = 0$, le funzioni $f(z) - \beta$ e $\varphi(u) - \beta$ soddisfanno insieme colle $f(z)$ e $\varphi(u)$ ad equazioni dei tipi $(1)_1$ e $(2)_1$ (*).

3. Incominciamo coll'esaminare se il rapporto $\frac{\omega}{\omega_1}$ può essere reale: in tal caso m è di modulo 1 e tutti i punti u, $m\,u$, $m^2\,u \ldots$ stanno su un cerchio di centro l'origine. Dobbiamo distinguere due casi secondochè $\frac{\omega}{\omega_1}$ è razionale o no.

Se $\frac{\omega}{\omega_1}$ è razionale, si ponga $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{p}{q}$ p e q essendo interi primi fra loro. Si considerino allora due interi h e k tali che $h\,p + k\,q = 1$, e si ponga $\omega'_1 = h\,\omega + k\,\omega_1$: si avrà $\omega'_1 = \left(h + k\,\frac{q}{p}\right)\omega = \frac{\omega}{p} = \frac{\omega_1}{q}$. D'altra parte se si pone $R_i(x) = R(R_{i-1}(x))$, $R_1(x) = R(R(x))$, si ha

$$f(z + \omega'_1) = f(z + h\,\omega + k\,\omega_1) = f(z + k\,\omega_1) = R_{k-1}(f(z)).$$

Quindi la funzione cercata soddisfa ad una equazione del tipo della seconda delle (1), anche rispetto al periodo $\omega'_1 = \frac{\omega}{p}$.

(*) Si ricordi che per passare dal tipo di equazioni $f(z+\omega_1) = \frac{P_h(f(z))}{Q_{h-1}(f(z))}$ di cui è un caso particolare il tipo $(1)_1$ al tipo $(1)'_1$ (od $(1)_1$) bastava sostituire a $f(z)$ la funzione $\psi(z) = f(z) - \beta$ dove β era radice di $P_h(x) - x\,Q_{h-1}(x) = 0$. Nel caso presente in cui

$$P_h(x) = x\,P_{h-1}(x)$$

tale equazione si riduce a $P_{h-1}(x) - Q_{h-1}(x) = 0$.

Inversamente se $f(z)$ è tale che $f(z+\omega'_1)=R_1(f(z))$, si avrà che $f(z+\omega_1)=f(z+q\,\omega'_1)$ è una funzione razionale di $f(z)$. Quindi in questo caso possiamo sostituire al periodo ω_1 che ha rapporto razionale con ω un periodo che sia precisamente un sottomultiplo di ω: e quindi limitarci a cercare le funzioni $f(z)$ che soddisfanno le equazioni

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=R(f(z)).$$

Le due equazioni non sono indipendenti: perchè esse siano compatibili occorre che $R_{p-1}(x)=x$.

Ma in tal caso la sostituzione $x'=R(x)$ si inverte univocamente colla $x=R_{p-2}(x')$, quindi $R(x)$ deve essere lineare e quindi riducibile con una trasformazione lineare alla forma kx od $x+a$ $(a\neq 0)$ corrispondentemente ai tipi $(1)'_1$ ed $(1)'_2$ del n.° 2. Ma le equazioni

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=f(z)+a\qquad (a\neq 0)$$

non sono compatibili; e le altre

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=k\,f(z)\tag{5}$$

sono compatibili solo quando $k^p=1$ ossia $k=e^{\frac{2\pi i r}{p}}$ $(r=0,1,2,\ldots,p-1)$.

Una funzione di z che soddisfa in tal caso le (5) è $e^{\frac{2\pi i r z}{\omega}}$. E se $f(z)$ è una qualunque altra funzione che soddisfaccia le (5) la funzione $\psi(z)=\dfrac{f(z)}{e^{\frac{2\pi i r z}{\omega}}}$ soddisfa l'equazione $\psi\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=\psi(z)$, onde notoriamente è una funzione meromorfa di $e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}$. E inversamente una funzione meromorfa di $e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}$ soddisfa l'equazione $\psi\left(z+\frac{\omega}{p}\right)=\psi(z)$. Quindi *le funzioni che soddisfanno al nostro problema quando il rapporto* $\frac{\omega}{\omega_1}$ *è della forma* $\frac{p}{q}$ *sono le funzioni*

$$f(z)=e^{\frac{2\pi i r z}{\omega}}\,\psi\left(e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}\right).$$

dove ξ è il simbolo di una qualunque funzione meromorfa ed r è uno dei numeri $0, 1, 2, \ldots, p-1$, (e le loro funzioni lineari fratte). *Le equazioni corrispondenti sono*

$$f(z+\omega)=f(z), \quad f(z+\omega_1)=e^{\frac{2\pi irq}{p}}f(z).$$

Sia da una osservazione precedente, sia dalla diretta ispezione della formula risulta che i logaritmi di queste funzioni non soddisfanno alle condizioni del problema, tranne quando $r=0$, nel qual caso non possono dare che delle funzioni della stessa forma che le precedenti.

4. Nel caso che il rapporto $\frac{\omega}{\omega_1}$ sia irrazionale non può esistere alcun tipo di funzioni $f(z)$ o $\varphi(u)$ che soddisfacciano ad equazioni della forma (1) o (2) oltre al caso evidente $f(z)=k\,e^{\frac{2\pi irz}{\omega}}$ ossia $\varphi(u)=k\,u^r$.

Torna più comodo in questo caso porci il problema nella seconda forma: allora i punti u, mu, $m^2u, \ldots$, che, come già si è notato, sono su un cerchio, sono tutti distinti e tali che vicino quanto si vuole ad un punto arbitrario del cerchio si potrà trovare dei punti $m^s u$ con s grande a piacere. Ciò posto, si osservi anzitutto che una funzione $\varphi(u)$ che soddisfaccia una equazione del tipo $(2)_1$, non può avere in un punto al finito diverso dall'origine uno zero od un polo, od assumere un valore α radice di $P_{h-1}(x)=0$ od un valore β radice di $Q_{h-1}(x)=0$. Poichè se in un punto u, $\varphi(u)$ assumesse il valore zero od un valore α, nei punti mu, $m^2u, \ldots, m^s u, \ldots$ la funzione avrebbe degli zeri: onde nell'intorno di u cadrebbero infiniti zeri il che è assurdo se si suppone che $\varphi(u)$ non abbia punti singolari essenziali altro che nell'origine od all'infinito. Analogamente se $\varphi(u)$ avesse un polo in u oppure assumesse un valore β, in mu, $m^2u, \ldots, m^s u, \ldots$ avrebbe sempre dei poli (poichè nella funzione razionale del secondo membro di $(2)_1$ il numeratore è di grado superiore al denominatore): onde in prossimità di u si avranno infiniti poli: il che, come prima è assurdo.

Ma per un noto teorema del Picard la funzione deve assumere qualunque valore, due al più eccettuati, in punti al finito diversi dall'origine, quindi tutti i valori α e β devono coincidere collo 0 o coll'∞: e quindi l'equazione $(2)_1$ deve essere della forma:

$$\varphi(mu)=c\,(\varphi(u))^h.$$

Ora o è $|c| = 1$, $h = 1$, oppure è $h \geq 2$ e c qualunque o $h = 1$ e $|c| \gtrless 1$. Cominciando dal caso in cui $h \geq 2$ e c qualunque, o $h = 1$ e $|c| \gtrless 1$ si osservi che cambiando al più m in $\frac{1}{m}$ si può supporre senz'altro o $h \geq 2$ o $h = 1$ $|c| > 1$. Si prenda allora un numero positivo A tale che $|c| A^h \geq \gamma A$ con γ reale e > 1: ciò è sempre possibile; poichè, se $h \geq 2$ basta prendere un qualunque $\gamma > 1$ e scegliere poi A così grande che $\gamma \leq |c| A^{h-1}$, se poi $h = 1$ $|c| > 1$ basta prendere A qualunque e per γ lo stesso valore $|c|$. Si prenda poi un punto u diverso dall'origine in cui $|\varphi(u)| = A$: siccome $\varphi(u)$ non prende già in punti diversi dall'origine i valori zero ed ∞, tali punti esisteranno certamente. Allora nei punti $m\,u$, $m^2\,u, \ldots$, $m^s\,u \ldots$ si avrà

$$
\begin{aligned}
|\varphi(m\,u)| &= |c| A^h \geq \gamma A \\
|\varphi(m^2\,u)| &\geq |c| (\gamma A)^h \geq \gamma^{h+1} A \geq \gamma^2 A \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
|\varphi(m^s\,u)| &\geq |c| (\gamma^{s-1} A)^h \geq \gamma^s A \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

E quindi ricordando che $\gamma > 1$, vicino quanto si vuole ad u si troveranno altri punti in cui $\varphi(u)$ prende valori in modulo maggiori di una qualunque quantità assegnata: ciò che è assurdo.

Se poi $h = 1$ $|c| = 1$, si deduce su un qualunque cerchio di centro l'origine $\varphi(u)$ è di modulo costante. Ed infatti preso un punto arbitrario u, in cui la funzione abbia un valore di modulo $= A$, in tutti i punti $m\,u$, $m^2\,u, \ldots$, $m^s\,u \ldots$, $\varphi(u)$ prenderà dei valori in modulo uguali ad A; e siccome questi punti formano un insieme ovunque denso sul cerchio; ne segue per continuità che il modulo di $\varphi(u)$ è costante sul cerchio medesimo. Si deduce che $|\varphi(u)|$ è funzione di $|u|$, e quindi che, posto $u = u_1 + i\,u_2$, $\log |\varphi(u)|$ è una funzione armonica di u_1 e u_2 dipendente da $|u|$ solamente. Si deduce che $\log |\varphi(u)| = r \log |u| + k$ (*), dove r e k sono costanti, e quindi $|\varphi(u)| = k\,|u|$

(*) Sia $u = u_1 + i\,u_2 = \varrho\, e^{i\vartheta}$, e cioè $|u| = \varrho$. Una funzione $\chi(u_1\, u_2)$ armonica di u_1 ed u_2, considerata come funzione di ϱ e ϑ deve come è noto soddisfare l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi}{\partial \varrho} = 0;$$

se quindi χ per ipotesi è indipendente da ϑ deve necessariamente avere la forma

$$\chi = r \log \varrho + k \qquad (r \text{ e } k \text{ costanti}).$$

dove r e k sono ancora costanti: la condizione che $\varphi(u)$ sia meromorfa impone che r sia intero positivo o negativo. Questa soluzione fu già trovata nel numero precedente e, come è naturale, la ritroveremo in seguito anche per qualunque valore di m.

5. Ci rimane a trattare il caso in cui $\dfrac{\omega}{\omega_1}$ è complesso: ricorrendo ancora alla seconda forma del nostro problema dovremo cercare le funzioni $\varphi(u)$ che soddisfanno a $(2)_1$ ed hanno singolarità essenziali al più nell'origine ed all'infinito, il numero m essendo di modulo $\neq 1$. Se $\varphi(u)$ ha un solo punto singolare essenziale si può sempre supporre che esso sia all'infinito, perchè ove fosse nell'origine basterebbe cambiare u in $\dfrac{1}{u}$ per ricondurci a quel caso.

Possiamo quindi distinguere tre casi:

1.° $\varphi(u)$ è regolare od ha una singolarità polare nell'origine, ed è $m > 1$.

2.° $\varphi(u)$ è regolare od ha una singolarità polare nell'origine, ed è $m < 1$.

3.° $\varphi(u)$ ha una singolarità essenziale sia nell'origine che all'infinito.

Tratteremo nei numeri seguenti dei tre casi notati.

6. La ricerca relativa ai primi due casi si può facilmente esaurire ricorrendo ai risultati ottenuti dal Poincaré nella Memoria citata. Da $(2)_1$ ponendo $u = 0$ segue

$$\varphi(0) = \varphi(0) \frac{P_{h-1}(\varphi(0))}{Q_{h-1}(\varphi(0))}$$

quindi: o $\varphi(0) = 0$, o $\varphi(0) = \infty$, od infine $\varphi(0)$ è tale che $\dfrac{P_{h-1}(\varphi(0))}{Q_{h-1}(\varphi(0))} = 1$. Il secondo di questi casi si riconduce al primo cambiando $\varphi(u)$ in $\dfrac{1}{\varphi(u)}$; il terzo cambiando $\varphi(u)$ in $\varphi(u) - \beta$, β essendo una radice (il valore di $\varphi(0)$) di $P_{h-1}(x) - Q_{h-1}(x) = 0$: con ciò in virtù dell'osservazione finale del n.° 2 non si muta la forma dell'equazione cui soddisfa la funzione cercata: onde possiamo supporre che la funzione $\varphi(u)$ soddisfaccia all'equazione $(2)_1$ ed insieme sia tale che $\varphi(0) = 0$.

Ciò posto ricordiamo che il risultato del Poincaré si può enunciare nel modo seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano funzioni $\varphi(u)$, *regolari in un intorno dell'origine che soddisfacciano l'equazione* (2), *ed abbiano nell'origine uno zero di primo ordine, è che si abbia* $\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x\,P_{h-1}(x)}{Q_{h-1}(x)}\right)\right]_{x=0} = m$. *Tutte queste funzioni si ottengono sostituendo* γu *ad* u *in una di esse,* γ *essendo una costante arbitraria* (*).

Per giungere a risolvere il nostro problema occorre studiare quando gli sviluppi del Poincaré rappresentano funzioni monodrome in tutto il piano, e come si modificano le precedenti conclusioni quando si supponga che $\varphi(u)$ abbia nell'origine uno zero di ordine k qualsiasi > 1.

Incominciamo da quest'ultima questione. È facile vedere che in tal caso deve essere $\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x\,P_{h-1}(x)}{Q_{h-1}(x)}\right)\right]_{x=0} = m^k$ e che la funzione $\varphi(u)$, se esiste deve essere funzione di u^k. Essendo infatti $\varphi(u)$ regolare nell'origine per ipotesi, la si potrà sviluppare in serie di u, per mostrare l'asserto basterà mostrare che la derivata r-esima è nell'origine diversa da zero solo quando $r \equiv 0 \pmod{k}$. Invero posto $\frac{x\,P_{h-1}(x)}{Q_{h-1}(x)} = R(x)$ dall'equazione $\varphi(m\,u) = R(\varphi(u))$ si deduce

$$m\,\varphi'(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi'(u),$$

$$m^2\,\varphi''(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi''(u) + R''(\varphi(u))\,\varphi'^2(u),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m^k\,\varphi^{(k)}(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi^{(k)}(u) + H_k(u),$$

dove $H_k(u)$ è una somma di termini ciascuno dei quali contiene a fattore tante derivate di $\varphi(u)$ di ordine $< k$ che la somma degli indici di ogni termine è k, ed almeno una derivata di $R(x)$ di ordine maggiore di 1. Onde intanto dall'ipotesi che le prime $k-1$ derivate si annullino per $u = 0$ segue $H_k(0) = 0$; e quindi affinchè sia $\varphi^{(k)}(0) \neq 0$, occorre che sia $R'(0) = m^k$. Si

(*) Il Poincaré suppone $|m| > 1$. È chiaro che per la dimostrazione della convergenza degli sviluppi ottenuti dal Poincaré tale restrizione non è necessaria. Essa è necessaria nei ragionamenti del Poincaré solo in quanto gli serve a dedurre che lo sviluppo regolare nell'origine rappresenta una funzione regolare e monodroma in tutto il piano.

ha poi

$$m^{k+1}\varphi^{(k+1)}(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi^{(k+1)}(u) + H_{k+1}(u),$$
$$m^{k+2}\varphi^{(k+2)}(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi^{(k+2)}(u) + H_{k+2}(u),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m^{l}\varphi^{(l)}(m\,u) = R'(\varphi(u))\,\varphi^{(l)}(u) + H_{l}(u),$$

dove $H_l(u)$ è una somma di termini ciascuno dei quali contiene a fattore tante derivate di $\varphi(u)$ di ordine $< l$ che la somma degli indici sia $= l$, ed almeno una derivata di $R(x)$ di ordine maggiore di 1. Ricordiamo che non può mai essere $m^l = m^k$ per $l \neq k$, poichè si suppose $|m| > 1$; dall'eguaglianza $R'(0) = m^k$ segue allora che $\varphi^{(l)}(0) = 0$ tutte le volte che $H_l(0) = 0$. Ora ogni termine di $H_{k+1}, H_{k+2}, \dots, H_{2k-1}$ deve contenere almeno una derivata di ordine $< k$, quindi sarà $H_{k+1}(0) = H_{k+2}(0) \dots = H_{2k-1}(0) = 0$; invece $H_{2k}(u)$ può contenere un termine in cui compaia $[\varphi^{(k)}(u)]^2$, onde potrà darsi che $H_{2k}(0) \neq 0$ e quindi $\varphi^{(2k)}(0) \neq 0$. Ed in generale, ammesso che tutte le derivate di ordine $r \not\equiv 0 \pmod{k}$ minore di un certo numero l siano nulle nell'origine, lo saranno ancora tutte quelle di ordine l se non è $l \equiv 0 \pmod{k}$; perchè quando ciò non sia ogni termine di H_l deve pure contenere una derivata di ordine $r \not\equiv 0 \pmod{k}$ e quindi sarà $H_l(0) = 0$ e $\varphi^{(l)}(0) = 0$. Onde risulta dimostrato l'assunto.

Cosicchè se esiste una funzione che soddisfaccia alle nostre condizioni ed abbia uno zero di ordine k nell'origine, questa dovrà essere funzione di u^k e come tale soddisferà l'equazione $\varphi(m^k u^k) = R(\varphi(u^k))$, dove $R(x)$ è tale che $R(0) = 0$, $\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=0} = m^k$.

Ponendo $u^k = v$, la nostra funzione diventa una funzione di v che soddisfa l'equazione

$$\varphi(m^k v) = R(\varphi(v))$$

e che ha in $v = 0$ uno zero di primo ordine. Ma allora il teorema del Poincaré ci dice che le condizioni imposte ad $R(x)$ sono sufficienti per assicurarci dell'esistenza di una tale funzione, onde ne verrà di conseguenza che la funzione cercata avente uno zero di ordine k nell'origine esiste.

Dai calcoli precedenti segue inoltre che, quando $h = 1$, e quindi l'equazione si riduce alla forma $\varphi(m\,u) = c\,\varphi(u)$, $\varphi(u)$ non può differire da u^k, k essendo un intero positivo e c essendo uguale ad m^k, o dalle funzioni $(\varrho\,u)^k$ che da quelle si ottengono mutando u in $\varrho\,u$: ed invero tutte le quantità

$H_1(u)$ saranno identicamente nulle perchè le derivate di ordine >1 di $R(x) = c\,x$ sono nulle.

Rimane ad esaminare quali di queste funzioni sono monodrome in tutto il piano. Se si è nella prima delle ipotesi fatte nel numero antecedente e cioè $|m| > 1$, dal fatto stesso che la funzione è regolare nell'origine e soddisfa l'equazione $(2)_1$, segue, come già osserva il Poincaré, che la funzione $\varphi(u)$ è regolare in tutto il piano. Diremo che queste funzioni appartengono alla *classe del* Poincaré.

Se invece $|m| < 1$, tale deduzione non è possibile. Ma si osservi allora che la funzione non può avere poli in nessun punto al finito del piano eccettuata l'origine, poichè in virtù dell'equazione $(2)_1$ se u è un polo di $\varphi(u)$ anche $m\,u$, $m^2\,u, \ldots,$ $m^n\,u, \ldots$ sono poli di $\varphi(u)$, e di tali punti in virtù dell'ipotesi $|m| < 1$ se ne potrà trovare quanti se ne vuole vicino all'origine onde l'origine risulterebbe un punto singolare essenziale per $\varphi(u)$ contro l'ipotesi: e per la stessa ragione $\varphi(u)$ non può avere zeri al finito fuori dell'origine. Ed analogamente $\varphi(u)$ non può assumere al finito, fuori dell'origine un valore α radice di $P_{h-1}(x) = 0$, o un valore β radice di $Q_{h-1}(x) = 0$ perchè in $m\,u$ avrebbe uno zero od un polo rispettivamente. Quindi per un ragionamento analogo a quello del n.° 4 l'equazione avrà la forma $\varphi(m\,u) = c\,[\varphi(u)]^k$, e dovrà essere $\left[\frac{d}{dx}(c\,x^h)\right]_{x=0} = m^k$ ossia $[h\,c\,x^{h-1}]_{x=0} = m^k$, onde $h = 1$ $c = m^k$. Per una osservazione fatta precedentemente otterremo di qui necessariamente $\varphi(u) = C\,u^k$. Queste ultime funzioni le abbiamo già trovate: di più rientrano nella classe ora studiata, poichè esse si comportano regolarmente anche all'infinito onde basta cambiare u in $\frac{1}{u}$ per ottenere che esse soddisfacciano ad una equazione per cui $|m| > 1$. Quindi *tutte le funzioni che rispondono alle condizioni del problema nelle ipotesi 1.ª e 2.ª del n.° 5 si possono considerare come rispondenti al problema nell'ipotesi 1.ª ed appartengono tutte alla classe del* Poincaré.

Si noti che nessuna di queste funzioni è tale che il suo logaritmo soddisfaccia alle condizioni del problema, poichè, essendo esse regolari nell'origine, il logaritmo è necessariamente funzione polidroma di u.

7. Andiamo ora a studiare l'ipotesi 3.ª del n.° 5. Potremo senz'altro supporre $|m| > 1$; ove ciò non fosse basterebbe mutare u in $\frac{1}{u}$, e cioè z in $-z$. Ci proponiamo di mostrare che in questa ipotesi la $(2)_1$ deve ridursi

alla forma

$$\varphi(m u) = c\, \varphi(u).$$

Rammentiamo infatti che, come più volte si è notato, in virtù di $(2)_1$ se u è un polo per $\varphi(u)$ anche $m u$, $m^2 u, \ldots m^s u, \ldots$ sono poli per $\varphi(u)$. Così a ciascun polo u di $\varphi(u)$ ne corrisponde una serie infinita contenuta in una successione

$$\ldots m^{-s} u,\ m^{-s+1} u, \ldots,\ u,\ m u,\ m^2 u, \ldots\ m^s u \ldots \qquad (S)$$

e precisamente, tosto che un numero di questa successione è un polo di $\varphi(u)$, sono pure poli tutti i successivi. Ora una successione (S), contiene sempre un termine ed uno solo in ogni corona circolare Γ compresa fra due cerchi di centro l'origine e raggio ρ e $|m|\rho$. Quindi le serie (S) che nell'intorno dell'origine contengono dei poli sono in numero finito, altrimenti dentro una tale corona Γ esisterebbero infiniti poli e un punto singolare essenziale in un loro punto di condensazione. Ma vi è di più: se il grado di $Q_{h-1}(x)$ è $h - j$ $(j \geqq 1)$ e se $\varphi(u)$ ha un polo in u di ordine t, in $m u$ ha un polo di ordine $t j$, in $m^2 u$ un polo di ordine $t j^2$, ecc.; quindi anche nelle successioni (S) non vi potranno essere poli nei punti $m^s u$ per valori di s grandi a piacere se non è $j = 1$, poichè altrimenti in un punto arbitrario di (S) vi sarebbe un polo di ordine grande a piacere il che è assurdo. Quindi o nell'intorno dell'origine non vi sono poli, oppure $Q_{h-1}(x)$ è proprio di grado $h - 1$ e i poli sono tutti su un numero finito di successioni (S). Analogamente ragionando per gli zeri, si conchiude che nell'intorno dell'origine non vi sono zeri oppure sono distribuiti su un numero finito di successioni (S) e $P_{h-1}(x) = 0$ non ammette lo zero come radice.

Sia ora β (α) una radice di $Q_{h-1}(x) = 0$ (di $P_{h-1}(x) = 0$): se $\varphi(u)$ prende in u il valore β (α), in $m u$ $\varphi(u)$ ha un polo (uno zero), quindi in ogni successione (S) non può aversi che un punto al più in cui $\varphi(u)$ assume il valore β (il valore α) ed una serie (S) che contenga un tal punto è una serie contenente poli (o zeri). Ma per essere finito il numero delle serie (S) contenente poli (o zeri) segue che nell'intorno dell'origine $\varphi(u)$ non assumerà mai nè un valore α, nè un valore β. Ma pel già ricordato teorema del Picard nell'intorno di un punto singolare ogni funzione deve prendere un qualunque suo valore fatta astrazione al più per due di questi; nè verrà che tre casi soltanto possono darsi:

1.° $h > 1$, e $Q_{h-1}(x)$ è di grado $h - 1$: esistono un valore α ed un valore β, ma può essere $\alpha = 0$. L'equazione $(2)_1$ è della forma

$$\varphi(m\,u) = c\,\frac{\varphi(u)\,(\varphi(u) - \alpha)^{h-1}}{(\varphi(u) - \beta)^{h-1}};$$

la funzione $\varphi(u)$ non prende nè il valore α nè il valore β nell'intorno dell'origine; prenderà quindi ogni altro valore.

2.° $h > 1$, ma $Q_{h-1}(x)$ è di grado $< h - 1$; ancora $P_{h-1}(x) = 0$ deve ammettere una sola radice α che può essere anche uguale allo zero: e $\varphi(u)$ non può assumere nè il valore α nè il valore ∞ nell'intorno dell'origine, onde segue che $Q_{h-1}(x) = 0$ non dovrà ammettere radice e quindi l'equazione $(2)_1$ diverrà della forma $\varphi(m\,u) = c\,\varphi(u)\,(\varphi(u) - \alpha)^{h-1}$.

3.° $h = 1$; l'equazione $(2)_1$ è della forma

$$\varphi(m\,u) = c\,\varphi(u).$$

Ma il primo caso non può verificarsi. Invero siccome nell'intorno dell'origine $\varphi(u)$ non può prendere nè il valore α nè il valore β, essa non può prendere neppure i valori di α_1 e β_1 tali che $\frac{\alpha_1\,(\alpha_1 - \alpha)^{h-1}}{(\alpha_1 - \beta)^{h-1}} = \alpha$ oppure $\frac{\beta_1\,(\beta_1 - \alpha)^{h-1}}{(\beta_1 - \beta)^{h-1}} = \beta$: questi valori α_1 e β_1 dovrebbero quindi coincidere tutti con α o β: ciò che evidentemente per essere $\alpha \neq \beta$ non può avvenire.

Analogamente non può aversi il secondo caso. Invero: se $\alpha \neq 0$ esisterà ancora un valore $\alpha_1 \neq \alpha$ tale che $c\,\alpha_1\,(\alpha_1 - \alpha)^{h-1} = \alpha$, e neppure questo valore α_1 non dovrebbe essere ammesso da $\varphi(u)$ il che è assurdo. Se poi $\alpha = 0$ l'equazione diviene $\varphi(m\,u) = c\,(\varphi(u))^h$, e $\varphi(u)$ non deve nell'intorno dell'origine prendere il valore zero nè avervi dei poli. Dall'equazione medesima si deduce che lo stesso si avrà allora in tutto il piano. Ma nell'intorno dell'origine essa prenderà un qualunque valore diverso da 0 e da ∞: in particolare un valore A tale che $|c\,A^h| > \gamma\,|A|$ γ essendo un numero reale e > 1. Ma se u è un tale punto, nel punto $m^s u$ — come risulta da un ragionamento del n.° 4 — $\varphi(u)$ prenderà un valore di modulo $> \gamma^{\frac{h^s - 1}{h - 1}}\,|A|$ e quindi un valore che diviene col crescere di s in modulo maggiore di una qualunque quantità assegnata. Fissato allora s arbitrariamente grande, si prenda un punto u in cui $\varphi(u) = A$ e tale che $|u| < \frac{\rho}{m}$: nella corona Γ compresa fra i cerchi di raggi ρ ed $|m|\,\rho$ e centro l'origine esisterà un punto in cui $\varphi(u)$ diviene maggiore in modulo di $\gamma^s A$: quindi in una tale corona Γ $\varphi(u)$ prenderà dei valori di modulo maggiore di ogni quantità assegnata, il che contradice alla conclusione tratta precedentemente che $\varphi(u)$ non ha poli in tutto il piano.

Non ci resta quindi che di trattare il terzo dei casi precedentemente enumerati.

Ritorniamo perciò alla prima forma del nostro problema: si deve allora cercare le funzioni meromorfe della variabile complessa z che soddisfanno alle equazioni

$$f(z+\omega) = f(z), \qquad f(z+\omega_1) = c\, f(z)$$

e sotto questa forma si riconosce che queste funzioni esistono e non sono che una classe delle funzioni doppiamente periodiche di seconda categoria relative ai periodi ω e ω_1: precisamente esse (*) si ottengono tutte mediante la formula

$$f(z) = \frac{\sigma(z)}{\sigma\left(z - \dfrac{\log c\,\omega}{2\pi i}\right)}\, e^{\frac{\log c\,\eta}{2\pi i} z}\, \varepsilon(z)$$

dove con $\varepsilon(z)$ si indica una qualunque funzione ellittica di periodi ω ed ω_1, con $\sigma(z)$ la funzione σ relativa agli stessi periodi ed infine con η si indica il primo dei periodi di seconda specie.

Resta ancora a vedere, per terminare la nostra classificazione se i logaritmi delle ultime funzioni trovate possono considerarsi come funzioni meromorfe di z che soddisfacciano il sistema:

$$f(z+\omega) = f(z), \qquad f(z+\omega_1) = f(z) + a.$$

Sarebbe facile vedere che sì: del resto immediatamente si vede che le funzioni che soddisfanno a queste equazioni sono tutte e sole le funzioni della forma

$$f(z) = \frac{a}{2\pi i}\left[-\omega\,\zeta(z) + \eta\, z\right] + \varepsilon(z).$$

(*) Cfr. ad esempio Bianchi: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e sulle funzioni ellittiche*, pag. 270 e ss.

8. Riassumendo possiamo conchiudere:

Le funzioni che soddisfanno alle condizioni del problema del n. 1 sono funzioni lineari fralle delle seguenti:

1.° *funzioni della classe del* Poincaré;

2.° *funzioni per cui il secondo membro della seconda equazione* (1) *è lineare in* $\varphi(u)$: *e precisamente*:

2.° a) *se* $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{p}{q}$ (p e q interi primi fra loro) *funzioni della forma* $f(z) = e^{\frac{2\pi i r z}{\omega}} \psi\left(e^{\frac{2\pi i p z}{\omega}}\right)$ *dove* r *è uno dei primi* q *numeri della serie naturale e* ψ *è il simbolo di una funzione meromorfa*:

2.° b) *funzioni ellittiche di prima o seconda categoria di periodi* ω *ed* ω_1 *della forma*

$$\frac{\sigma(z)}{\sigma\left(z - \frac{k\omega}{2\pi i}\right)} e^{-\frac{k\eta}{2\pi}z} \varepsilon(z)$$

dove k *è una costante ed* $\varepsilon(z)$ *è una qualunque funzione ellittica di prima categoria di periodi* ω *ed* ω_1:

2.° c) *funzioni del tipo*

$$k\left\{\omega\zeta(z) - \eta z\right\} \varepsilon(z).$$

Osservazione I. Se invece di una sola funzione prendiamo a considerare come il Picard ed il Poincaré nelle Memorie citate un sistema di più funzioni, l'immediata generalizzazione delle due classi di funzioni del precedente teorema ci riporta ai due tipi già trovati da questi autori e cioè alle funzioni del Poincaré ed a quelle per cui la trasformazione subita dalle funzioni quando la variabile aumenta di ω_1 è birazionale. Sarebbe interessante riconoscere se si può, come nel caso trattato nel presente lavoro, invertire la proposizione anche nel caso generale: ciò non mi è finora riuscito.

Osservazione II. I risultati precedenti si possono facilmente estendere a casi più generali. Così si supponga di sostituire alla prima delle (1) l'equazione $f(z+\omega) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}$ talchè si abbiano a cercare le funzioni meromorfe per cui si ha

$$\left.\begin{aligned} f(z+\omega) &= \frac{\alpha f(z)+\beta}{\gamma f(z)+\delta} \quad (\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0) \\ f(z+\omega_1) &= R(f(z)). \end{aligned}\right\} \tag{1$_2$}$$

Anzitutto dovrà essere

$$R\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)=\frac{\alpha R(x)+\beta}{\gamma R(x)+\delta}. \tag{6}$$

Ma una sostituzione lineare data $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ si può notoriamente trasformare mediante una conveniente sostituzione lineare in una delle forme $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ con $\beta \neq 0$. Si può quindi sempre passare con una sostituzione lineare dalla $f(z)$ ad una $\varphi(z)$ che soddisfaccia alle equazioni

$$\varphi(z+\omega)=\alpha\,\varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega_1)=R^*(\varphi(z)) \tag{1$'_3$}$$

oppure

$$\varphi(z+\omega)=\varphi(z)+\beta, \qquad \varphi(z+\omega_1)=R^*(\varphi(z)) \tag{1$'_4$}$$

dove $R^*(x)$ è una conveniente funzione razionale. Nei due casi rispettivamente la (6) si riduce alla forma

$$R^*(\alpha x)=\alpha R^*(x) \tag{6$_3$}$$

$$R^*(x+\beta)=R^*(x)+\beta. \tag{6$_4$}$$

Cominciamo dal 1.° caso. Dai ragionamenti dei n.i 3, 4, 6 risulta in particolare che una funzione $\varphi(u)$ regolare nell'origine che soddisfaccia ad una equazione $\varphi(mu)=c\,\varphi(u)$ deve essere mediante una trasformazione lineare riducibile ad una delle forme $\varphi(u)=\mu u^k$ (k intero) oppure $\varphi(u)=u^r\psi(u^p)$ ψ essendo una funzione meromorfa ed r, p essendo interi: nei due casi rispettivamente $c=m^k$, oppure $m=e^{\frac{2\pi i}{p}}$, $c=e^{\frac{2\pi i r}{p}}$. Per avere le soluzioni di (6)$_3$ basta cercare quando per le funzioni precedenti si ha $c=m=\alpha$ e φ è razionale. Si deduce che tre soli casi possono aversi:

1.° $\alpha=1$, $R^*(x)$ qualunque.

2.° $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, $R^*(x) = x\,R^{**}(x^p)$ dove R^{**} è ancora il risultato di una funzione razionale,

3.° α qualunque, $R^*(x) = \alpha_1 x$ (α_1 costante).

Il primo caso è quello da noi studiato nel presente lavoro.

Nel secondo caso si avrà

$$\varphi(z+\omega) = e^{\frac{2\pi i}{p}}\varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega_1) = \varphi(z)\,R^{**}([\varphi(z)]^p).$$

Quindi

$$\varphi(z+p\,\omega) = \varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega_1) = \varphi(z)\,R^{**}([\varphi(z)]^p).$$

Si ricade quindi ancora in funzioni che soddisfanno anche ad equazioni del tipo già studiato. Quindi nuove funzioni si possono ottenere solo nel terzo caso: le funzioni cercate soddisfanno alle equazioni

$$\varphi(z+\omega) = \alpha\,\varphi(z), \qquad \varphi(z+\omega_1) = \alpha_1\,\varphi(z). \tag{1)_3$$

Nel caso che si abbiano le equazioni $(1)_1$, la $(6)_1$ ci dice che $R^*(x)$ deve avere la forma $R^*(x) = x + \beta_1$ (β_1 costante). Onde si avrà il sistema

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z) + \beta, \qquad \varphi(z+\omega_1) = \varphi(z) + \beta_1. \tag{1)_4$$

Quindi *le funzioni soddisfacenti* $(1)_2$ *o sono tra le funzioni già trovate, o soddisfanno ad* $(1)_3$, *o ad* $(1)_4$, *od infine sono funzioni lineari di queste.*

Come al n.° 2 basta studiare il sistema di equazioni $(1)_3$. Se $\varphi(z)$ soddisfa ad $(1)_3$ la funzione $\psi(z) = e^{-\log\alpha\frac{z}{\omega}}\,.\,\varphi(z)$ soddisfa le equazioni

$$\psi(z+\omega) = \psi(z), \qquad \psi(z+\omega_1) = c\,\psi(z) \qquad \left(c = \alpha_1\,e^{-\log\alpha\frac{\omega_1}{\omega}}\right)$$

quindi è una delle funzioni dei tipi 2.° a) o 2.° b) di quelle già trovate da noi. E viceversa da ogni funzione $\psi(z)$ se ne deduce una $\varphi(z)$ soddisfacente $(1)_3$. Onde *le funzioni soddisfacenti* $(1)_3$ *sono:*

a) *le funzioni* $\varphi(z) = e^{kz}\,\psi\left(e^{\frac{2\pi p z}{\omega}}\right)$ dove k è costante, ψ è il simbolo di una funzione meromorfa, p è intero (tranne che nel caso in cui ψ è una costante, dovrà per queste funzioni essere $\frac{\omega}{\omega_1}$ razionale della forma $\frac{p}{q}$).

b) le funzioni doppiamente periodiche di prima o seconda categoria.

Corrispondentemente *le funzioni che soddisfanno* (1)$_4$ *sono:*

a) le funzioni $\varphi(z) = kz + \psi\left(e^{\frac{2 i \pi p z}{\omega}}\right)$ (Ancora se ψ non è una costante per tali funzioni deve essere $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{p}{q}$).

b) le funzioni della forma

$$c_1 \zeta(z) + c_2 z + \varepsilon(u).$$

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XIV della Serie III, pag. 93 e seguenti.

Milano, 1907. — Tipo-Lit. Rebeschini
di Turati e C.

MILANO — TIPO-LIT. REBESCHINI DI TURATI E C

Offerto dall' Autore.

Con cordiali saluti

ESTRATTO

DAGLI *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.*

Caratteristiche multiple e Problema di Cauchy.

(*Di* Eugenio Elia Levi, *a Genova.*)

1. — Sia:

$$F(x\, y\, z\, p_{10}\, p_{01} \ldots p_{0n}) = 0 \qquad \left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\, \partial y^k}\right) \tag{1}$$

un'equazione alle derivate parziali di ordine n in due variabili indipendenti: è noto come la considerazione delle caratteristiche costituisca il più potente elemento di classificazione delle equazioni medesime. Particolarmente studiato è il caso delle caratteristiche semplici (*): valgono per esse i seguenti fondamentali teoremi:

I. — *Una caratteristica semplice di ordine n è contenuta in una semplice infinità di caratteristiche di ordine $n+1$, e più in generale in una infinità di caratteristiche di ordine $n+h$ dipendente da h costanti arbitrarie. Se due superficie soluzioni dell'equazione* (1) *ammettono una caratteristica di ordine n a comune ed in un punto di essa hanno un contatto di ordine $n+h$ (cioè hanno a comune un elemento di ordine $n+h$), esse hanno un contatto di ordine $n+h$ lungo tutta la caratteristica* (**).

Tale teorema vale sia dal punto di vista delle funzioni di variabili reali, sia dal punto di vista delle funzioni analitiche: con questo solo che nel primo caso devesi supporre che la corrispondente radice dell'equazione delle caratteristiche sia non solo semplice, ma anche reale.

II. — *Supposta l'equazione* (1) *analitica, una caratteristica semplice di ordine n, analitica, appartiene ad infinite superficie integrali dell'equazione data analitiche nell'intorno di essa: e una di tali superficie è pienamente individuata quando si assegni che, oltrechè contenere la caratteristica, essa debba*

(*) E cioè corrispondente ad una radice semplice dell'equazione delle caratteristiche

$$\frac{\partial F}{\partial p_{n0}} \lambda^n + \frac{\partial F}{\partial p_{n-1\,1}} \lambda^{n-1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_{0n}} = 0.$$

(**) Goursat, *Leçons sur l'intégration des equations aux derivées partielles du second ordre.* Vol. II, Cap. X e specialmente pag. 299-302.

passare per una curva arbitraria che incontri la caratteristica in un punto ed ivi sia tale che le varie determinazioni dell'elemento di ordine n che ne risultano, siano concordi (*).

III. — *Se in un campo* Δ *dello spazio* S (**) *in cui sono coordinate* $x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n}$ *la* (1) *ha caratteristiche tutte reali e semplici, il problema di* Cauchy *ammette una ed una sola soluzione anche dal punto di vista delle funzioni di variabili reali* (***).

Il caso delle caratteristiche multiple è assai meno studiato: si sa che nessuno di questi tre teoremi resta vero: che in generale una caratteristica di ordine n è contenuta in una sola caratteristica di ordine $n+1$, in una sola di ordine $n+2, \ldots$ in una sola di ordine $n+h$; che parimenti una caratteristica analitica assegnata di ordine n non sempre appartiene ad una superficie analitica nell'intorno di essa (****); che infine il problema di Cauchy non è sempre risolubile dal punto di vista delle funzioni di variabili reali ($*_*$).

(*) Goursat, Cap. X, n. 211, pag. 303-309.

(**) S ha $\frac{(n+2)(n+1)}{2} + 2$ dimensioni.

(***) E. E. Levi, *Sul problema di* Cauchy *per le equazioni a caratteristiche reali e distinte.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII, serie 5.ª, 1.º sem. 1908, pag. 331-339. Ivi sono anche date altre indicazioni bibliografiche relative ai pochi casi particolari in cui questo teorema era stato dimostrato prima. Vedi anche le altre mie Note: *Sul problema di* Cauchy *per le equazioni lineari in due variabili indipendenti a caratteristiche reali.* Rendiconti dell'Istituto Lombardo, vol. XLI, serie II, Nota I (pag. 408-428), Nota II (pag. 691-712). Citerò in seguito questi miei lavori con « Lincei », « Lombardo I », « Lombardo II ». Noterò qui che i metodi usati in queste ultime note possono servire a stabilire altri teoremi di esistenza analoghi a questi: ad es. il teorema di esistenza che si presenta nel caso della estensione del metodo di Riemann alle equazioni di ordine superiore al secondo, quale è stata indicata dai sigg. Holmgren (*Sur l'extension de la méthode d'intégration de* Riemann. Archiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. I, 1903-04) e Burgatti (*Sull'estensione del metodo di integrazione di* Riemann, ecc. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1906 (2.º sem.)).

(****) È noto l'esempio della Kovalevski (*Theorie der partiellen Differentialgleichungen.* Crelles Journal, 80). Vedi anche gli altri del Riquier (*Sur une question fondamentale du calcul intégral.* Acta Math., Vol. 23, n. 20, pag. 251-259). Vedi anche la breve, ma interessante nota del Le Roux nel Bulletin di Darboux, 1895 (vol. 19, 2.ª serie), pag. 122-8: *Sur les intégrales analytiques de l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

($*_*$) Holmgren, *Om Cauchys problem vid de lineara etc. . . .* (Arkiv för Mathematik Astronomi och Fysik, 1906) ed anche la mia Nota: *Sul problema di Cauchy* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1907, 2.º sem., serie 5.ª, vol. XVI). E vedi anche « Lombardo II ».

Pure basta approfondire leggermente i calcoli usuali per giungere ad una determinazione molto migliore di questi risultati. E ciò mi propongo di fare nel presente lavoro: limitandomi a trattare il caso delle caratteristiche doppie, e, con minori particolari, quello delle caratteristiche triple: analoghi risultati si otterrebbero certamente nel caso delle caratteristiche multiple.

Riassumo qui brevemente i risultati ottenuti, indicando come mi pare si inquadrino nella teoria generale.

I. — (§ I). — *Esistono tre tipi di caratteristiche doppie.*

Tipo A_2). — *La caratteristica di ordine n è contenuta in due sole — eventualmente coincidenti — caratteristiche di ordine $n+1$.*

Tipo B_2). — *La caratteristica di ordine n è contenuta in una doppia infinità di caratteristiche di ordine $n+1$, in generale è contenuta in un'insieme di caratteristiche di ordine $n+h$ dipendente da $2h$ costanti arbitrarie.*

Tipo C_2). — *Le caratteristiche di ordine $n+1$ contenenti la caratteristica di ordine n dipendono da una funzione arbitraria.*

Due superficie che abbiano un contatto di ordine $n+h+1$ in un punto di una caratteristica del tipo B_2) hanno almeno un contatto di ordine $n+h$ in tutti i punti della caratteristica stessa: ciò non avviene per una caratteristica del tipo C_2). Una caratteristica del tipo A_2) è, in generale, contenuta al più in due sole superficie integrali.

II. — (§ II). — *Una caratteristica analitica del tipo B_2) o C_2) appartiene sempre ad infinite superficie integrali analitiche nell'intorno di essa. Una tale superficie è pienamente individuata quando oltre alla condizione di contenere la caratteristica si assegni che essa debba ancora contenere un'altra curva di elementi di primo ordine che incontri la caratteristica in un punto* — e dia in quel punto per l'elemento di ordine $n+1$ determinazioni concordi con quelle della caratteristica.

III. — (§ III). — *Se in un campo Δ dello spazio S l'equazione ha sempre una caratteristica doppia, essa è sempre del tipo A_2) o del tipo B_2). Se in Δ tutte le caratteristiche sono reali, ma ν di esse sono doppie e del tipo B_2) e le altre sono semplici, il problema di* Cauchy *è risolubile anche dal punto di vista delle funzioni di variabili reali.*

È chiaro il parallelismo tra questi tre teoremi e quelli precedentemente enunciati per le caratteristiche semplici. Se però consideriamo i corrispondenti teoremi I e II, cominciamo col notare che una divergenza notevole è costituita dal presentarsi delle caratteristiche del tipo C_2), le quali sono ancora curve di elementi di ordine n di effettiva indeterminazione della superficie integrale, ma non sono più curve di contatto superiore all'n-esimo per due superficie che passino per esse. È da notarsi però come tali caratteristiche debbono ritenersi in certo modo come eccezionali; ciò si vedrà meglio nel seguito, ma del resto risulta già dal principio dell'enunciato del teorema III.

Pare a me però che ancora più notevole sia l'analogia dei teoremi III. Dopo che fu notato che il problema di Cauchy non ammette sempre soluzione dal punto di vista delle funzioni di variabili reali mi sembra che uno dei problemi più importanti della teoria delle equazioni differenziali sia il classificare le equazioni in tipi per ciascuno dei quali si possa fissare l'economia dei dati iniziali che determinano sempre una ed una sola soluzione: in particolare trovare le equazioni alle derivate parziali per cui il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione (*). — I teoremi III indicano due casi in cui ciò è possibile; io credo che per le equazioni in due variabili indipendenti questi casi e gli analoghi per le caratteristiche multiple esauriscano la classe delle equazioni per cui il problema di Cauchy è risolubile. Pare così di potere affermare in generale che il problema di Cauchy ammette soluzione dal punto di vista delle funzioni di variabili reali quando *tutte* le caratteristiche dell'equazione sono curve di elementi di effettiva indeterminazione per le superficie integrali: ed anzi più precisamente rispetto alla superficie integrale hanno la massima indeterminazione compatibile colla loro multiplicità.

Disgraziatamente l'intima natura di ciò non compare chiaramente dai calcoli che seguono: tuttavia tale presunzione è confermata nel § IV di questo lavoro pel caso delle caratteristiche triple: nè altra difficoltà vi sarebbe nel proseguire l'analisi per la via qui indicata per il caso delle caratteristiche 4-ple, 5-ple, ecc., che quella proveniente dal rapido complicarsi dei calcoli che si presentano.

(*) E. von Weber nell'articolo *Partielle Differentialgleichungen* nell'*Encyclopädie der Math. Wiss.* [Bd. II, A 5, pag. 297, nota 1.ª] osserva che dal punto di vista delle funzioni di variabili reali poche speciali classi di equazioni sono state studiate, ed in particolare manca una estensione del teorema di esistenza di Cauchy-Lipschitz per le equazioni differenziali ordinarie. Una tale estensione non è sempre possibile: il problema si deve quindi porre nel ricercare quando essa è possibile. Del problema di Cauchy dal punto di vista delle funzioni di variabili reali si è occupato assai il prof. Arzelà: ma con scopi del tutto diversi da quelli che io qui mi propongo: egli cercò di maggiormente limitare le condizioni per l'esistenza delle soluzioni delle equazioni di primo ordine per cui il problema di Cauchy già risulta potersi risolvere dall'ordinaria teoria delle caratteristiche (o, con condizioni sovrabbondanti, dal teorema III enunciato più sopra a pag. 162). Potrei dire che le ricerche del prof. Arzelà hanno carattere intensivo: queste mie carattere estensivo.

§ 1.

2. — Consideriamo dunque un'equazione:

$$F(x\,y\,z\,p_{10}\dots p_{0n})=0 \qquad \left(p_{ik}=\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\,\partial y^k}\right) \tag{1}$$

Per maggiore uniformità in quanto segue indicherò sovente con p_{00} la z medesima. Supporrò senz'altro in questo primo paragrafo che la F ammetta derivate finite e continue fino a quell'ordine che occorrerà di considerare.

Userò ancora la notazione seguente. Se $\psi(x\,y\,z\dots p_{0r})$ è una funzione di x, y, z e delle derivate di z fino all'ordine r, indicherò con $\frac{\delta\psi}{\delta x}$, $\frac{\delta\psi}{\delta y}$ le derivate totali di ψ rapporto ad x ed y, e cioè le derivate di ψ quando z e le sue derivate si considerino quali funzioni di x ed y. Porrò poi:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)&=\frac{\delta\psi}{\delta x}-\sum_0^r\frac{\partial\psi}{\partial p_{\nu\,r-\nu}}\,p_{\nu+1\,r-\nu}\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)&=\frac{\delta\psi}{\delta y}-\sum_0^r\frac{\partial\psi}{\partial p_{\nu\,r-\nu}}\,p_{\nu\,r-\nu+1}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ciò posto, si consideri una caratteristica di ordine n di (1): lungo di essa sia x la variabile corrente: le y, z, $p_{10}\dots p_{0n}$ saranno certe funzioni di x, le quali, come è noto, soddisfanno ad (1) ed alle equazioni:

$$dy=\alpha\,dx \quad \text{dove} \quad \frac{\partial F}{\partial p_{n0}}\alpha^n-\frac{\partial F}{\partial p_{n-1\,1}}\alpha^{n-1}+\dots+(-1)^n\frac{\partial F}{\partial p_{0n}}=0 \tag{3}$$

$$dp_{ik}=(p_{i+1\,k}+\alpha\,p_{i\,k+1})\,dx \qquad (i+k=0,1,\dots n-1) \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dp_{i\,n-i}}{dx}\sum_{h=i}^{h=n}\frac{\partial F}{\partial p_{h\,n-h}}(-1)^{h-i}\alpha^{h-i}=0 \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dp_{i-1\,n-i+1}}{dx}\sum_{h=i}^{h=n}\frac{\partial F}{\partial p_{h\,n-h}}(-1)^{h-i}\alpha^{h-i}=0. \tag{6}$$

È noto che (1) (5) e (6) non sono indipendenti, ma che ad es. da (1) e (6) segue (5) (*).

(*) Goursat, vol. II, cap. X, pag. 300.

Se, come supporremo ora, z è una radice multipla di (3) sarà inoltre:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \, i \frac{\partial F}{\partial p_{i\,n-i}} z^{i-1} = 0. \tag{7}$$

Per determinare le caratteristiche di ordine $n+1$, $n+2$.... basterà determinare le p_{ik} con $i+k = n+1$, $n+2$.... in funzione della x per modo che risultino soddisfatte le nuove equazioni (*)

$$\frac{d p_{ik}}{d x} = p_{i+1\,k} + z\, p_{i\,k+1} \qquad (i+k = n,\ n+1,\ n+2 \ldots.) \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\delta F}{\delta y}\right) + \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{d p_{i\,n-i+1}}{d x} \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_{k\,n-k}} (-1)^{k-i-1} z^{k-i-1} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\delta^2 F}{\delta y^2}\right) + \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{d p_{i\,n-i+2}}{d x} \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_{k\,n-k}} (-1)^{k-i-1} z^{k-i-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{9}$$

Dalle (8) si possono ottenere le p_{ik} di ordine $n+1$, $n+2$.... in funzione di una sola delle derivate di ordine $n+1$, $n+2$.... rispettivamente — ad es. di $p_{0\,n+1}$, $p_{0\,n+2}$.... — e delle derivate rapporto ad x delle p_{ik} di ordine $\leq n$, $\leq n+1$.... (**). Sostituendo in (9) avremo delle equazioni in queste ultime incognite $p_{0\,n+1}$, $p_{0\,n+2}$....: determinate queste, si otterranno le altre p_{ik} in modo unico. Generalmente le equazioni che si deducono così da (9) contengono rispettivamente le $\frac{d p_{0\,n+1}}{d x}$, $\frac{d p_{0\,n+2}}{d x}$....: ma quando è soddisfatta (7) i coefficienti di queste derivate sono nulli.

(*) Ricordo che le equazioni (9) si ottengono esprimendo che le (3) (4) (8) sono compatibili colle $\frac{\partial^i F}{\partial y^i} = 0$. Cfr. GOURSAT, vol. II, cap. X, pag. 300 e ss., e più diffusamente per le equazioni di 2.° ordine, vol. I, cap. IV, pag. 181-183.

(**) Le formole che si otterranno saranno le seguenti:

$$p_{i,n-i+h} = \sum_{j=1}^{j=i} (-1)^{j-1} z^{j-1} \frac{d p_{i-j,n-i+j+h-1}}{d x} + (-1)^i z^i p_{0\,n+h}$$

$$\frac{d p_{i,n-i+h}}{d x} = \sum_{j=1}^{j=i} (-1)^{j-1} z^{j-1} \frac{d^2 p_{i-j,n-i+j+h-1}}{d x^2} + \sum_{j=1}^{j=i} (-1)^{j-1} (j-1) z^{j-2} \frac{d z}{d x} \frac{d p_{i-j,n-i+j+h-1}}{d x} +$$

$$+ (-1)^i z^i \frac{d p_{0\,n+h}}{d x} + (-1)^i i z^{i-1} \frac{d z}{d x} p_{0\,n+h}.$$

Eseguendo effettivamente l'eliminazione, si ottengono le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} A\,p_{0n+1}^2 + (B + 2B_1)\,p_{0n+1} + C &= 0 \\ [3A\,p_{0n+1} + (B + 3B_1)]\,p_{0n+2} + C_1 &= 0 \\ [4A\,p_{0n+1} + (B + 4B_1)]\,p_{0n+3} + C_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

In queste equazioni si è posto:

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{j=0}^{j=n} \frac{\partial^2 F}{\partial p_{in-i}\,\partial p_{jn-j}} (-1)^{i+j}\alpha^{i+j} \\ B_1 &= \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \alpha^i \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial p_{in-i}} + \sum_{j+k=n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial p_{in-i}\,\partial p_{jk}}\, p_{j+1k} \right. \\ &\quad + \sum_{j=0}^{j=n} \frac{\partial^2 F}{\partial p_{in-i}\,\partial p_{jn-j}} \left[\frac{d p_{j+1n-j-1}}{dx} - \alpha \frac{d p_{j+2n-j-2}}{dx} + \cdots \right. \\ &\quad \left.\left. \cdots + (-1)^{n-j-1}\alpha^{n-j-1} \frac{d p_{n0}}{dx} \right] \right\} \\ B &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i \frac{\partial F}{\partial p_{in-i+1}}\,\alpha^i - \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dx} \sum_{i=2}^{i=n} (-1)^i\, i\,(i-1) \frac{\partial F}{\partial p_{in-i}}\,\alpha^{i-2}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

In quest'ultima equazione sarà $\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{\delta \alpha}{\delta x} + \alpha \dfrac{\delta \alpha}{\delta y}$.

Quanto alle funzioni $C, C_1, C_2, \ldots$ che compaiono in (10) esse dipendono dalle derivate prime e seconde rapporto ad x delle p_{ik} di ordine $n, n+1, n+2, \ldots$ rispettivamente. Ritorneremo più tardi sul calcolo effettivo di $C, C_1, C_2, \ldots$ sotto alcune ipotesi semplificatrici (§ IV): per ora ci basta osservare che, se esprimiamo i valori delle derivate prime e seconde delle p_{ik} di ordine $n, n+1, \ldots$ per le derivate di $p_{0n}, p_{0n+1}, \ldots$ e le derivate di p_{ik} di ordine inferiore ad $n, n+1, \ldots$ rispettivamente, otterremo facilmente per le C i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=2}^{i=n} (-1)^i\, i\,(i-1) \frac{\partial F}{\partial p_{in-i}}\,\alpha^{i-2}\right] \frac{d^2 p_{0n}}{dx^2} + M \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ C_1 &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=2}^{i=n} (-1)^i\, i\,(i-1) \frac{\partial F}{\partial p_{in-i}}\,\alpha^{i-2}\right] \frac{d^2 p_{0n+1}}{dx^2} + M_1 \frac{\partial F}{\partial y} \\ C_2 &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=2}^{i=n} (-1)^i\, i\,(i-1) \frac{\partial F}{\partial p_{in-i}}\,\alpha^{i-2}\right] \frac{d^2 p_{0n+2}}{dx^2} + M_2 \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

dove le M, M_1, $M_2, \dots$ rappresentano una somma di termini, ciascuno dei quali ha a fattore almeno una p_{ik} od una $\dfrac{d\, p_{ik}}{d\, x}$ per cui $i + k$ è $\leq n$, $\leq n - 1 \dots$ rispettivamente.

3. — Conviene subito notare che nel caso particolarmente importante delle equazioni tali che, in un campo Δ dello spazio S in cui sono coordinate $x\, y\, z\, p_{10} \dots p_{0n}$, la caratteristica corrispondente ad una certa radice α è sempre multipla, le precedenti formule si semplificano molto. Infatti tale ipotesi si traduce in ciò che per quella radice α dell'equazione:

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \frac{\partial F}{\partial p_{i\, n-i}} \alpha^i = 0 \tag{2}$$

che si considera, si ha che, almeno quando sia soddisfatta la:

$$F(x\, y\, z\, p_{10} \dots p_{0n}) = 0, \tag{1}$$

risulta sempre:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i\, i \frac{\partial F}{\partial p_{i\, n-i}} \alpha^{i-1} = 0. \tag{6}$$

Derivando allora (2) rapporto ad una qualunque ω delle variabili x, y, $z, \dots p_{0n}$ si ha identicamente:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i\, i \frac{\partial F}{\partial p_{i\, n-i}} \alpha^{i-1} + \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \frac{\partial^2 F}{\partial p_{i\, n-i}\, \partial \omega} \alpha^i = 0.$$

E quindi per (6)

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \frac{\partial^2 F}{\partial p_{i\, n-i}\, \partial \omega} \alpha^i = 0 \tag{13}$$

Basta allora richiamare le espressioni (11) di A e B_1 per ottenere senz'altro in forza di (13)

$$A = B_1 = 0.$$

Le (9) si riducono allora alla forma più semplice:

$$B\, p_{0\, n+1} = C, \qquad B\, p_{0\, n+2} = C_1, \qquad B\, p_{0\, n+3} = C_2, \dots \tag{14}$$

4. — Basta ora esaminare quali diversi casi possono presentare le equazioni (10) o (14) per classificare le caratteristiche doppie.

Tipo A_2). Almeno una delle quantità A e $B + 2B_1$ sia diversa da zero. Allora la prima delle equazioni (10) ci determina due valori — eventualmente uno solo (*) — per la p_{0n+1}: fissato il quale le successive equazioni (10) determinano in generale in modo unico $p_{0n+2}, p_{0n+3}, \ldots$: quindi una caratteristica di ordine n del tipo A_2) è contenuta in due od in una sola caratteristica di ordine $n + 1$, ed ognuna di queste in una di ordine $n + 2$, in una di ordine $n + 3$, ecc. Si noti però che può benissimo accadere che una delle equazioni (10) sia incompatibile, oppure porti ad una indeterminazione. Si presenterà questo dubbio quando per un conveniente intero ν sia $\nu A p_{0n+1} + B + \nu B_1 = 0$. Allora non esisteranno o esisteranno caratteristiche di ordine $n + \nu + 1$ contenenti la data caratteristica di ordine n a seconda che $C_{\nu+2} \neq 0$ o $C_{\nu+2} = 0$: ed in quest'ultimo caso ne esisteranno infinite.

Nel caso studiato al n.° 3 alle (10) debbonsi sostituire le (14), ed i risultati prendono quindi una maggiore determinazione: esiste allora una sola caratteristica di ordine $n + 1$ contenente quella di ordine n assegnata: e parimente una sola caratteristica di ordine $n + \nu$: non può mai avvenire il caso eccezionale notato pur ora.

Le conclusioni tratte ora relativamente al tipo A_2) valgono nell'ipotesi generale che la caratteristica sia multipla, e non è necessario che essa sia soltanto doppia (Cfr. anche più oltre il § IV).

5. — Quando si abbia invece:

$$A = 0 \qquad B + 2B_1 = 0, \tag{15}$$

perchè la caratteristica di ordine n sia contenuta in una di ordine $n + 1$ e quindi possa appartenere ad una superficie soluzione, occorre che sia ancora:

$$C = 0. \tag{16}$$

Supponiamo questa equazione soddisfatta. Possono avvenire due casi.

Tipo B_2). $A = B = B_1 = 0$. Allora le successive equazioni (10) si riducono senz'altro alle:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0 \ldots \tag{17}$$

(*) I due valori possono essere eventualmente coincidenti: ma può anche avvenire che essi si riducano ad uno solo, perchè sia $A = 0$. L'altra soluzione diventa infinita, ma tale soluzione non ha senso nelle nostre ricerche in quanto si escludono soluzioni singolari sulla caratteristica.

Ma basta richiamare le (12) che ci danno le C_1, C_2,... per riconoscere che quando si supponga la caratteristica doppia, e non più che doppia, le (17) rappresentano effettive equazioni differenziali di secondo ordine nelle p_{0n+1}, p_{0n+2},... successivamente. E noi potremo conchiudere che le caratteristiche di ordine $n+1$ contenenti la caratteristica assegnata di ordine n dipendono da due costanti arbitrarie, quelle di ordine $n+2$ da 4, quelle di ordine $n+h$ da $2h$.

Per queste costanti arbitrarie possiamo assumere i valori che in un punto della caratteristica hanno p_{0n+1}, $\frac{d\,p_{0n+1}}{d\,x}$, p_{0n+2}, $\frac{d\,p_{0n+2}}{d\,x}$, .. p_{0n+h}, $\frac{d\,p_{0n+h}}{d\,x}$. Ma ricordando che $p_{1n+1} = \frac{d\,p_{0n+1}}{d\,x} - z\,p_{0n+2}$, $p_{1n+2} = \frac{d\,p_{0n+2}}{d\,x} - z\,p_{0n+3}$,... possiamo anche assumere come costanti arbitrarie i valori iniziali di p_{0n+1}, p_{0n+2}; p_{1n+1},..., p_{0n+h-1}, p_{1n+h-2}, p_{0n+h}, $\frac{d\,p_{0n+h}}{d\,x}$. Segue di qui: *se due superficie integrali hanno a comune una caratteristica di tipo B_2) ed in un punto di essa hanno un contatto di ordine $n+h$, hanno un contatto di ordine $n+h-1$ almeno lungo tutta la caratteristica.*

Tipo C_2). $A=0$, $B-2B_1=0$, $B_1 \neq 0$. In tal caso la prima equazione (10) è identica per (16). Determinata arbitrariamente p_{0n+1}, le altre equazioni (10) ci danno senza ambiguità p_{0n+2}, p_{0n+3},.... La determinazione delle caratteristiche di ordine $n+1$ dipende dunque da una funzione arbitraria, ma non esiste poi altra ambiguità. Due superficie integrali analitiche diverse non possono avere un contatto di ordine maggiore di n lungo tutta la caratteristica.

Si noti ancora:

1.° Il tipo C_2) non si presenta mai nell'ipotesi del n.° 3 in cui è $B_1 = 0$: onde risulta provato il primo punto dell'enunciato III.

2.° Il tipo C_2) può considerarsi come un caso particolare del tipo A_2), quando avviene che l'ambiguità che abbiamo notato potersi presentare nella risoluzione delle equazioni (10) di quel tipo, si presenti proprio nella prima equazione. E come pel tipo A_2), nella discussione del tipo C_2) è necessario solo che la caratteristica sia multipla, e non che sia proprio doppia. Abbiamo però tenuto distinto il tipo C_2), perchè, quando una tale caratteristica sia soltanto doppia, essa, come si vedrà più minutamente nel paragrafo seguente ha rispetto alle superficie integrali che la contengono un comportamento del tutto analogo a quello del tipo B_2).

Da quanto precede risulta che il teorema I è quindi compiutamente dimostrato.

§ II.

6. Ci proponiamo ora di dimostrare il teorema II: seguiremo perciò passo passo la dimostrazione del teorema analogo per le caratteristiche semplici data dal GOURSAT. Accennerò il più brevemente possibile a questa dimostrazione. Supponiamo dunque l'equazione (1) analitica regolare nell'intorno di una sua caratteristica doppia del tipo B_2) o C_2). Per semplificare i calcoli supponiamo di avere fatto tale trasformazione nelle variabili $x\, y$ e nella funzione incognita z che la caratteristica assegnata venga portata nella curva di elementi di ordine n

$$y = z = p_{10} = p_{01} = \cdots = p_{0n} = 0, \tag{18}$$

e che la curva di elementi del primo ordine ulteriormente assegnata per la superficie integrale appartenga alla varietà $x = 0$.

L'ipotesi che la caratteristica (18) sia doppia — e non più che doppia — ci dà allora che la (1) si può portare nella forma:

$$p_{2\,n-2} = f(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots, p_{ik}, \dots, p_{n0}, p_{1\,n-1}, p_{0n}) \tag{19}$$

risoluta rapporto a $p_{2,n-2}$, f essendo una funzione regolare analitica nell'intorno dell'origine e tale che per i valori (18) si abbia, qualunque sia x,

$$f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} = \frac{\partial f}{\partial p_{1\,n-1}} = 0. \tag{20}$$

L'ipotesi che la caratteristica sia proprio dei tipi B_2) o C_2) porta che per i valori (18) siano soddisfatte le (15) e (16): le quali per le (11) e (12) divengono in questo caso:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_{0n}^2} = 2\frac{\partial^2 f}{\partial p_{0n}\,\partial y} - \frac{\partial f}{\partial p_{0\,n-1}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{21}$$

In altri termini lo sviluppo in serie di f non può contenere termini in x^m, $y\,x^m$, $y^2\,x^m$, $p_{0n}\,x^m$, $p_{1\,n-1}\,x^m$, $p_{0n}^2\,x^m$ ($m = 0, 1, 2\dots$) soltanto, ed i termini in $y\,p_{0n}\,x^m$, $p_{0\,n-1}\,x^m$ li contiene solo nell'aggruppamento $(y\,p_{0n} - 2\,p_{0\,n-1})\,x^m$.

Ciò posto, si cerchi la soluzione dell'equazione (19) per cui si ha:

$$\text{per } y = 0 \qquad z = p_{10} = p_{01} = \cdots = p_{i\,k} = \cdots = p_{1\,n-1} = p_{0n} = 0 \tag{22}$$

$$\text{per } x = 0 \qquad z = \varphi(y) \qquad\qquad p_{10} = \varphi_1(y) \tag{23}$$

dove $\varphi(y)$ e $\varphi_1(y)$ sono due funzioni arbitrarie purchè tali che nell'origine diano per l'elemento di ordine $n-1$ determinazioni concordi con quelle richieste dall'appartenere l'elemento medesimo alla caratteristica (18): $\varphi(y)$ e $\varphi_1(y)$ debbono cioè essere tali che sia:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(n)}(0) = 0 \\ \varphi_1(0) = \varphi'_1(0) = \cdots = \varphi_1^{(n)}(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Per un noto teorema del GOURSAT (*) tale soluzione esiste ed è unica: ed il suo sviluppo in serie si ottiene facilmente calcolando mediante la (10) ed i dati iniziali i valori delle derivate p_{ik} nell'origine.

Per dimostrare il teorema II basterà provare che tale soluzione contiene tutta la caratteristica (18). Ma ciò risulterà tosto che sia dimostrato che i valori (nell'origine) delle p_{ik} con $k \leq n$ che si ottengono per la nostra funzione sono tutti nulli. Ora dalle (22) risulta intanto che è $(p_{ik})_0 = 0$ per $k \leq n-3$: basta quindi studiare le derivate dei tipi p_{in-2}, $p_{i-1\,n-1}$, $p_{i-2\,n}$. Ora è facile vedere col calcolo effettivo, tenendo conto delle 7 equazioni (20) e (21) che così è veramente, e ciò allo stesso modo tenuto dal GOURSAT. Onde anche il teorema II risulta dimostrato (**).

(*) GOURSAT, cap. X, n.° 210, vol. II, pag. 303 e ss.

(**) Per maggior comodità del lettore, indico qui più minutamente la dimostrazione accennata nel testo. Per quanto riguarda le derivate di ordine $n-2$, $n-1$ la cosa risulta immediatamente dalle condizioni iniziali; per quanto riguarda le derivate di ordine n essa è ancora conseguenza delle (23) (24) per riguardo a p_{0n} e p_{1n-1}, è conseguenza di (19) e della prima delle (20) per p_{2n-2}. Infine dalle (24) segue ancora direttamente che è $(p_{1n})_0 = 0$.

Ammettiamo ora che sia stato dimostrato che $(p_{ik})_0 = 0$ per $i+k \leq n+j$ e $k < n$, $(j \geq 0)$ e proponiamoci di dimostrare l'analogo per le derivate di ordine $n+j+1$.

La $p_{j+3\,n-2}$ si otterrà derivando (19) $j+1$ volta rapporto ad x, considerando le p e la z come funzioni di x ed y. Siccome in f non esistono termini in x^m soltanto, con tale derivazione noi otterremo da f una serie contenente in ogni termine una delle variabili y, z, p_{ik} con $i+k \leq n+j+1$ e $k \leq n$ che non sono la $p_{j+3\,n-2}$ medesima. Tutte queste variabili si annullano nell'origine tranne al più $p_{j+2\,n-1}$, $p_{j+1\,n}$: basta quindi provare che nella serie non vi sono termini in $p_{j+2\,n-1}x^m$, $p_{j+1\,n}x^m$ soltanto. Ma ciò risulta subito dal fatto che nello sviluppo di f non vi sono termini in $p_{1n-1}x^m$ e $p_{0n}x^m$. Quindi sarà $(p_{j+3\,n-2})_0 = 0$.

La $p_{j+2\,n-1}$ si ottiene derivando (19) una volta rapporto ad y ed j volte rapporto ad x. Siccome nello sviluppo in serie di f non vi sono termini in $y\,x^m$, i termini dello sviluppo in serie di $p_{j+2\,n-1}$ conterranno tutti una delle variabili y, z, p_{ik} con $i+k \leq n+j+1$, $k \leq n+1$ che non sono la $p_{j+2\,n-1}$ medesima. Ora tutte queste variabili sono nulle nell'origine tranne al più $p_{j+1\,n}$ e le $p_{\alpha\,n+1}$ $(\alpha \leq j)$. Ma un termine in $p_{j+1\,n}x^m$ soltanto dovrebbe provenire da un termine di f il quale contenesse $p_{1n-1}x^m$ soltanto, e di tali termini non esistono. Analogamente

§ III.

7. Andiamo ora ad occuparci del teorema III. Dimostreremo il teorema per gradi, occupandoci prima delle equazioni lineari e poi delle equazioni di tipo qualunque (*).

---

un termine che contenga $p_{\alpha\, n+1}x^m$ soltanto dovrebbe provenire da un termine di f della forma $x^{m+j-\alpha}p_{\alpha n}$: ed ancora tali termini non esistono in f, quindi anche $(p_{j+\alpha\, n})_0 = 0$.

Resta infine da considerare la $p_{j+1\, m}$.

La $p_{j+1\, m}$, se $j = 0$, sarà la p_{1m} e quindi, come già si osservò, sarà nulla nell'origine; se $j \geqq 1$ essa si otterrà derivando (19) $j-1$ volta rapporto ad x, e 2 volte rapporto ad y. Siccome nello sviluppo di f non vi sono termini in $y^2 x^m$ soltanto, ogni termine dello sviluppo in serie di $p_{j+1\, m}$ contiene una almeno delle variabili y, z, p_{ik} con $i+k \leqq n+j+1$, $k \leqq n+2$, che differisca dalla $p_{j+1\, m}$ medesima. Ora tutte queste quantità sono nulle nell'origine tranne al più le $p_{\alpha n+1}$ $(\alpha \leqq j)$ e le $p_{\alpha n+2}$ $(\alpha \leqq j-1)$. Un termine in $p_{\alpha n+2}x^m$ soltanto non può provenire che da un termine della forma $x^{m+j-\alpha-1}p_{\alpha n}$ di f: ma tali termini non esistono in f, e quindi in $p_{j+1\, m}$ non vi sono neppure termini in $p_{\alpha n+2}x^m$. Di termini in $p_{\alpha n+1}$ possono aversi di quadratici e cioè del tipo $p_{\alpha n+1}p_{\beta n+1}x^m$ e di lineari e cioè del tipo $p_{\alpha n+1}x^m$. Un termine in $p_{\alpha n+1}p_{\beta n+1}x^m$ potrebbe provenire solo da un termine in f in $p^2_{\alpha n}x^{m+j-\alpha-\beta-1}$, e quindi tali termini certamente non esistono in $p_{j+1\, m}$ come non esistono questi in f. Termini del tipo $x^m p^{\alpha n+1}$ possono provenire da termini in f dei tre tipi $p_{\alpha n-1}x^{m+j-\alpha}$, $p_{\alpha n}\, y\, x^{m+j-\alpha-1}$, $p_{\alpha n-1}x^{m+j-\alpha-1}$ $\left(\text{e, si noti, il termine } b\, p_{\alpha n}\, y\, x^{m+j-\alpha-1} \text{ di } f \text{ da in } p_{j+1\, m} \text{ il termine } 2b\,\frac{(m+j-\alpha-1)!}{m!}\,x^m p_{\alpha n+1}\right)$. Ma in f non vi sono termini in $p_{\alpha n-1}x^{m+j-\alpha}$; ed i termini degli altri due tipi si presentano in f solo nell'aggruppamento $(y\, p_{\alpha n} - 2 p_{\alpha n-1})x^{m+j-\alpha-1}$ e quindi non possono dare origine a termini contenenti solo $p_{\alpha n+1}x^m$ nello sviluppo di $p_{j+1\, m}$. Quindi anche quest'ultima derivata è nulla nell'origine c. v. d.

(*) La condizione che l'equazione abbia una caratteristica doppia del tipo B_2) porta che tale caratteristica di ordine n deve soddisfare, oltre che alle $\frac{n\,(n+1)}{2} + 3$ equazioni indipendenti (1) (3) (4) (6), anche all'equazione (16) $C = 0$; abbiamo quindi per le caratteristiche di ordine n in tal caso $\frac{n\,(n+1)}{2} + 4$ equazioni ai differenziali ordinarii in $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2$ variabili. Per $n = 2$ si ha $\frac{n\,(n+1)}{2} + 4 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1 = 7$, le caratteristiche vengono allora a dipendere da al più 7 costanti arbitrarie; e la possibilità di risolvere per le equazioni di secondo ordine con caratteristiche del tipo B_2 il problema di Cauchy anche dal punto di vista delle funzioni di variabili reali, che è affermata dal teorema III, è allora evidente. Questo risultato è di E. von Weber, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre dont les deux systèmes de caractéristiques sont confondus*. Comptes Rendus, vol. 124 (1897) pag. 1215. La medesima classe di equazioni era già stata studiata sotto altro punto di vista dal Goursat. Vedi Goursat, *Remarques sur une note récente de* M. Weber, C. R., 124, pag. 1294. Ed anche *Leçons*, vol. I, cap. IV, pag. 205 e ss. ed *Acta Mathematica*, vol. 19.

Ma occorre premettere alcune osservazioni generali onde potere più liberamente proseguire nel seguito.

Anzitutto noi possiamo sempre supporre che i dati iniziali consistono nel chiedere che la funzione z e le sue derivate di ordine $\leq n$ si annullino sull'asse delle y. Invero a tale caso particolare ci si riporta, come è ben noto, con una conveniente trasformazione delle variabili $x\,y$ e sostituendo poi alla funzione incognita z una nuova funzione $z - u$ dove u è scelta in modo opportuno (*). E tali trasformazioni non mutano evidentemente la natura delle caratteristiche dell'equazione che si studia. E se, come devesi sempre supporre, nei dati primitivi nessuno degli elementi iniziali assegnati apparteneva ad una caratteristica, lo stesso avverrà dopo la trasformazione e ciò si tradurrà nell'ipotesi che per i valori $x = z = \cdots = p_{0n} = 0$, e quindi pure in un loro intorno conveniente, le radici di (3) sono tutte finite; od in altri termini che è $\frac{\partial F}{\partial p_{n0}} \neq 0$. Supporremo d'ora in poi che i dati iniziali abbiano questa forma particolare; e potremo allora senz'altro supporre che nel campo Δ dello spazio in cui sono coordinate $x, y, z, \ldots p_{0n}$ l'equazione abbia la forma:

$$F \equiv p_{n0} - f(x\,y\,z\,p_{10} \cdots p_{0n-1}\,p_{n-11}\,p_{n-22} \cdots p_{0n}) = 0. \tag{25}$$

Supporremo poi che in Δ la funzione $f(x\,y\,z\,p_{10} \cdots p_{0n-1}\,p_{n-11} \cdots p_{0n})$ e parimenti le radici $\varkappa$ dell'equazione (3) ammettano tutte le derivate che nei varii casi occorrerà considerare, e che f, le $\varkappa$, e queste loro derivate siano tutte limitate in Δ.

8. Ma dobbiamo aggiungere un'altra considerazione di maggiore importanza.

Il supporre che in un campo Δ di S l'equazione (1) (o (25)) abbia ν $(2\nu \leq n)$ caratteristiche doppie del tipo $B)$ — e le residue $n - 2\nu$ semplici equivale a dire che esistono ν radici dell'equazione (3), che per fissare le idee supporremo siano $\varkappa_1\,\varkappa_2 \ldots \varkappa_\nu$, tali che per ogni indice $j = 1, 2, \ldots \nu$ le equa-

(*) Maggiori particolari relativi a questa trasformazione, in special modo relativi alla ipotesi che occorre supporre soddisfatta per i dati iniziali perchè dopo la trasformazione, l'equazione ammetta ancora le derivate di ordine convenientemente elevato ho dato in « Lombardo II » § VI, pag. 704 e ss.

zioni:

$$\sum_1^n (-1)^i i \frac{\partial F}{\partial p_{i,n-i}} \alpha_j^{i-1} = 0, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} B^{(j)} = \sum_0^{n-1} (-1)^i \frac{\partial F}{\partial p_{i,n-i-1}} \alpha_j^i - \frac{1}{2}\frac{d\alpha_j}{dx}\sum_2^n (-1)^i i(i-1) \frac{\partial^2 F}{\partial p_{i,n-i}^2} \alpha_j^{i-2} = 0, \\ (j = 1 \dots \nu), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

o sono identiche, oppure risultano conseguenze algebriche delle (1), (o (25)), (4), (5), (6) [o conseguenze differenziali di (1), (o (25)), (4), (5)]. Più precisamente possiamo dire che la (7) dovrà risultare conseguenza di (1) (o (25)); e che la (26), quando mediante le (4) se ne suppongano eliminate le $\frac{d p_{ik}}{dx}$ con $i + k \leq n - 1$ che vi compaiono nelle $\frac{d\alpha_j}{dx}$, deve risultare conseguenza di (1), (o (25)), (5), (6), se α_j contiene qualche p_{ik} di ordine n ed invece conseguenza di (1) soltanto se α_j dipende solo da p_{ik} di ordine $< n - 1$.

Ora noi mostreremo nei numeri 8, 9, 10 che *elevando, se occorre, di tre unità al più l'ordine dell'equazione si può sempre supporre che le (7) e (26) siano identiche.*

Esaminiamo anzitutto alcune conseguenze dell'ipotesi che (7) e (26) siano conseguenze di (1) (o (25)), (4) e (6).

Intanto se l'equazione ha la forma (25), le (7) devono essere tutte identiche. Infatti allora le derivate della F non dipenderanno da p_{0n} e quindi neppure ne dipenderanno le radici di (3) ed infine neppure i primi membri delle equazioni (7): onde le (7) non possono essere conseguenza di (25) e quindi per le nostre ipotesi debbono essere identiche. Ed analogamente per il numero 3 risulterà allora identica la relazione $\sum_0^n (-1)^i \frac{\partial^2 F}{\partial p_{i,n-i}\, \partial \omega} \alpha^i = 0$. Quindi in tutto Δ — e non solo sulla varietà (25) — le $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ sono radici doppie di (3): in altri termini l'equazione (3) in tutto Δ avrà ν radici $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ doppie e $n - 2\nu$ semplici $\alpha_{\nu+1} \dots \alpha_{n-\nu}$: e se supporremo che Δ sia sufficientemente piccolo, potremo anche dire che in nessun punto di Δ queste $n - \nu$ quantità saranno uguali, ma esisterà invece un massimo valore g di $\frac{1}{\alpha_i - \alpha_j}$ per $i \neq j$.

Passiamo a studiare le (26). Sostituiamo in esse e nelle (5) e (6) alle $\frac{d p_{n0}}{dx}, \dots \frac{d p_{0n}}{dx}$ i loro valori (8): ed indichiamo ancora con $B^{(j)}$ i valori dei primi membri delle (26) dopo tale sostituzione: le (5) e (6) diverranno invece le:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \tag{27}$$

(cfr. la nota (*) a pag. 166).

E le $B^{(i)} = 0$ dovranno essere conseguenza algebrica della (25) e delle (27) quando si pensino i primi membri di queste equazioni come funzioni di $x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{0n}\,p_{n-1\,0}\ldots p_{1\,n-1}$. Si osservi ora che si ha:

$$\frac{\partial\left(F\;\frac{\partial F}{\partial x}\;\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial\left(p_{n0}\,p_{n-1\,0}\,p_{n-1\,1}\right)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial p_{n-1\,0}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial p_{n-1\,1}} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Segue (*) che perchè $B^{(i)} = 0$ sia consegnenza di (27) e (25) occorre che

(*) Applichiamo qui il seguente teorema: siano $\Phi(x_1 \ldots x_n)$, $F_1(x_1 \ldots x_n) \ldots F_m(x_1 \ldots x_n)$ $m+1$ funzioni finite, continue e derivabili di n variabili $x_1\,x_2\ldots x_n$; e sia $\Phi(x_i) = 0$ un'equazione conseguenza delle $F_1(x_i) = 0$, $F_2(x) = 0, \ldots F_m(x) = 0$; e si supponga $m \leqq n$ e che si possano scegliere m delle variabili $x_1\,x_2\ldots x_n$, ad es., le $x_1\,x_2\ldots x_m$ per modo che sulla varietà $F_1 = F_2 = \ldots F_m = 0$ si abbia:

$$\frac{\partial(F_1\,F_2\ldots F_m)}{\partial(x_1\,x_2\ldots x_m)} \neq 0. \tag{a}$$

Si avrà allora una identità della forma:

$$\Phi(x_i) = \sum_1^m k_i(x)\,F_i(x) \tag{b}$$

le $k_i(x_i)$ essendo funzioni finite e continue delle $x_1\,x_2\ldots x_n$.

Infatti si osservi che basterà dimostrare che si ha la (b) nell'intorno della varietà $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots F_m = 0$: poichè ove una delle F_i è $\neq 0$ evidentemente si ha sempre un'identità del tipo (b). Ma nell'intorno della varietà $F_1 = 0 \ldots F_m = 0$ avendosi la (a) si potrà prendere $F_1\,F_2\ldots F_m\,x_{m+1}\ldots x_n$ quali variabili indipendenti: e si potrà porre:

$$\Phi(x_1\,x_2\ldots x_n) = \Phi(F_1\,F_2\ldots F_m\,x_{m+1}\ldots x_n).$$

Ed allora poichè $\Phi(0\,0\ldots 0\,x_{m+1}\ldots x_n) = 0$ si avrà:

$$\Phi(F_1\,F_2\ldots F_m\,x_{m+1}\ldots x_n) = \Sigma\,k_i(F_1\,F_2\ldots F_m\,x_{m+1}\ldots x_n)\,F_i$$

si abbia identicamente:

$$B^{(1)} = h^{(1)} F + k^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x} + l^{(1)} \frac{\partial F}{\partial y} \tag{28}$$

$h^{(1)}$, $k^{(1)}$, $l^{(1)}$ essendo funzioni finite e continue delle $x\, y\, z\, p\, \dots\, p\, \dots\, p\, p$ in tutto Δ.

9. — Derivando totalmente il primo membro di (25) secondo una direzione arbitraria di coefficiente angolare α, — α' essendo tale che in Δ sia $\frac{1}{\alpha' - \alpha_i} < \gamma$ — otterremo un'equazione lineare nelle derivate di ordine $n + 1$ soddisfatta da tutte le soluzioni di (25): e così procedendo e cioè derivando ancora totalmente secondo altre direzioni arbitrarie di coefficiente angolare α'', α''' giungeremo infine ad una equazione di ordine $n + 3$ lineare nelle derivate dei due ordini massimi $n + 3$ ed $n + 2$.

Studiamo più davvicino queste equazioni che successivamente si ottengono e le loro caratteristiche. La prima di esse si scriverà:

$$F_1 \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{29}$$

ed ogni soluzione di (25) sarà pure soluzione di (29); inversamente ogni soluzione di (29) i cui valori iniziali soddisfacciano (25) è pure soluzione di (25). Si avrà inoltre:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial p_{0n+1}} = \frac{\partial F}{\partial p_{0n}} = 1, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial p_{i,n-i+1}} = \frac{\partial F}{\partial p_{i-1,n-i+1}} + \alpha' \frac{\partial F}{\partial p_{i,n-i}} \\ &\qquad\qquad \frac{\partial F_1}{\partial p_{0,n+1}} = \alpha' \frac{\partial F}{\partial p_{0n}} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

---

dove

$$k_i(F_1 F_2 \dots F_m x_{m+1} \dots x_n) \equiv$$

$$\equiv \frac{\Phi(0 \dots 0 F_i F_{i+1} \dots F_m x_{m+1} \dots x_n) - \Phi(0 0 \dots 0 F_{i+1} \dots F_m x_{m+1} \dots x_n)}{F_i}.$$

E poichè la Φ e quindi pure la φ ammetta le derivate prime finite sarà k_i finita anche quando qualche F_i tende a zero.

Ripassando alle coordinate primitive si ottengono le (b).

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial p_{n0}} &= \frac{\partial F}{\partial p_{n-1\,0}} + \frac{\delta}{\delta x}\frac{\partial F}{\partial p_{n0}} + \alpha' \frac{\delta}{\delta y}\frac{\partial F}{\partial p_{n0}} = \frac{\partial F}{\partial p_{n-1\,0}} \\
\frac{\partial F_1}{\partial p_{n-i\,i}} &= \frac{\partial F}{\partial p_{n-i-1\,i}} + \alpha' \frac{\partial F}{\partial p_{n-i+1\,i-1}} + \frac{\delta}{\delta x}\frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} + \alpha' \frac{\delta}{\delta y}\frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \\
\frac{\partial F_1}{\partial p_{0n}} &= \alpha' \frac{\partial F}{\partial p_{0\,n-1}} + \frac{\delta}{\delta x}\frac{\partial F}{\partial p_{0n}} + \alpha' \frac{\delta}{\delta y}\frac{\partial F}{\partial p_{0n}} .
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Costruiamo per la (29) l'equazione delle caratteristiche: otterremo così l'equazione:

$$0 = \sum_0^{n+1} (-1)^i \frac{\partial F_1}{\partial p_{n-i+1\,i}} \alpha^i \equiv (\alpha - \alpha') \sum_0^n (-1)^i \frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \alpha^i ;$$

onde dedurremo che la (29) ammette le stesse caratteristiche di (25) e di più una nuova caratteristica semplice corrispondente ad α'. Ed ancora evidentemente poichè abbiamo già visto che le (7) risultano identiche, avremo che $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ sono radici doppie anche per la nuova equazione. Infine costruiamo le equazioni analoghe alle (26) per le (29): indicando con $B^{(1)}$ i primi membri, si avrà facilmente per le (31), ricordando che è identicamente:

$$\sum_0^n (-1)^i \frac{\partial^2 F}{\partial p_{n-i\,i}\, \partial \omega} \alpha_j^i = 0$$

e quindi:

$$\sum_0^n (-1)^i \frac{\delta}{\delta x}\frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \alpha^i = 0, \qquad \sum_0^n (-1)^i \frac{\delta}{\delta y}\frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \alpha_j^i = 0,$$

la identità seguente:

$$\left.\begin{aligned}
B_j^{(1)} &= \sum_0^n (-1)^i \frac{\partial F_1}{\partial p_{n-i+1\,i}} \alpha_j^i - \frac{1}{2}\frac{d\alpha_j}{dx} \sum_2^{n+1} (-1)^i\, i\,(i-1) \frac{\partial F_1}{\partial p_{n-i+1\,i}} \alpha_j^{i-2} = \\
&(\alpha_j - \alpha') \Bigg[\sum_0^{n-1} (-1)^i \frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \alpha_j^i - \frac{1}{2}\frac{d\alpha_j}{dx} \sum_2^n (-1)^i\, i\,(i-1) \frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \alpha_j^{i-2} \Bigg] \\
&\qquad\qquad - \frac{d\alpha_j}{dx} \sum_2^n (-1)^i\, i \frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \alpha_j^{i-1} = \\
&(\alpha_j - \alpha') B_j .
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Cosicchè infine noi concludiamo che la (29) è un'equazione che ammette ancora ν caratteristiche doppie corrispondenti alle radici $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$, che di queste quelle che appartengono alla varietà V dello spazio S' (in cui sono coordinate $x, y, z, p_{00} \ldots p_{0n}, p_{n+1\,0} \ldots p_{0\,n+1}$) per la quale sono soddisfatte le equazioni:

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

sono del tipo B_2): mentre in generale per (32) e (28) si ha:

$$B^{(i1)} = (\alpha_i - \alpha')\, B^{(i)} = (\alpha_i - \alpha') \left| h^{(i)} F + k^{(i)} \frac{\partial F}{\partial x} + l^{(i)} \frac{\partial F}{\partial y} \right| .$$

Come si è operato su F, così si opera su F_1: si ha così una nuova equazione:

$$0 = F_2 \equiv \frac{\partial F_1}{\partial x} + \alpha'' \frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (\alpha' + \alpha'') \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} + \alpha'' \alpha' \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} . \tag{33}$$

Ed ancora operando su questa allo stesso modo si otterrà, come si disse già, un'equazione di ordine $n + 3$

$$\left.\begin{aligned} 0 = F_3 &\equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} + \alpha''' \frac{\partial F_2}{\partial y} \equiv \\ &\equiv \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + (\alpha' + \alpha'' + \alpha''') \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\, \partial y} + \\ &\qquad + (\alpha' \alpha'' + \alpha' \alpha''' + \alpha'' \alpha''') \frac{\partial^3 F}{\partial x\, \partial y^2} + \alpha' \alpha'' \alpha''' \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

lineare nelle derivate di ordine $n + 3$ ed $n + 2$: essa avrà cioè la forma:

$$F_3 \equiv \sum_0^{n+3} c_{n+3,i}\, p_{n-i+3,i} + \sum_0^{n+2} c_{n+2,i}\, p_{n-i+2,i} + \dots = 0 \tag{35}$$

le c indicando funzioni di $x, y, z, p_{10} \dots p_{0n+1}$ soltanto. E noi sappiamo ancora che la (35) ha ν caratteristiche doppie corrispondenti alle radici $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ e tali che formando per esse le solite espressioni B si ha:

$$\left.\begin{aligned} B^{(i3)} &\equiv \sum_0^{n+3} (-1)^i c_{n+3,i}\, \alpha_i^i - \frac{1}{2} \frac{d\alpha_i}{dx} \sum_2^{n+3} (-1)^i\, i\,(i-1)\, c_{n+3,i}\, \alpha^{i-2} \equiv \\ &\equiv (\alpha_i - \alpha')(\alpha_i - \alpha'')(\alpha_i - \alpha''')\, B^{(i)} \equiv \\ &\equiv (\alpha_i - \alpha')(\alpha_i - \alpha'')(\alpha_i - \alpha''') \left| h^{(i)} F + k^{(i)} \frac{\partial F}{\partial x} + l^{(i)} \frac{\partial F}{\partial y} \right| . \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Quelle quindi di queste caratteristiche che giacciono sulla V data da:

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

sono del tipo B_2). Ed ancora ogni soluzione di (25) è soluzione di (34) o (35), ed ogni soluzione di (35) i cui dati iniziali soddisfacciano a (25) (29) (33) (34) è pure soluzione di (25).

10. — Per giungere ora alla dimostrazione dell'enunciato del n.° 8 occorre ancora fare un passo e modificare convenientemente l'ultima equazione trovata, sostituendo in essa ai coefficienti $c_{i,n-i+2}$ delle derivate di ordine $n+2$ dei nuovi coefficienti $\gamma_{i,n-i+2}$ determinati dalle condizioni:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{\nu+i,\,n-\nu-i+2} = c_{\nu+i,\,n-\nu-i+2} && (i = 0,\ 1,\dots\ n-\nu) \\ &\sum_0^{n+2}(-1)^i\,\gamma_{i,n-i+2}\,\alpha_j^i - \frac{1}{2}\,\frac{d\,\alpha_j}{d\,x}\sum_2^{n+3}(-1)^i\, i\,(i-1)\,c_{i,n-i+3}\,\alpha_j^{i-2} = 0 && (j = 1,\ 2,\dots\ \nu). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Evidentemente queste equazioni (37) determinano uno ed uno solo sistema di funzioni γ, perchè il determinante dei coefficienti delle γ nelle (37) è uguale al determinante di Cauchy-Vandermonde costruito con $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_\nu$. Ed anzi, siccome le c sono polinomii nelle derivate di F e quindi limitati in funzione del limite superiore di queste, noi potremo dire che anche le γ ammettono un limite superiore funzione di μ e del limite superiore di F, delle α, e delle loro derivate. In altri termini la nuova equazione:

$$F_4 = \sum_0^{n+3} c_{i,n-i+3}\,p_{i,n-i+3} + \sum_0^{n+2} \gamma_{i,n-i+2}\,p_{i,n-i+2} + \dots = 0 \tag{38}$$

dove i termini tralasciati sono uguali agli analoghi di (35) sarà un'equazione, la quale gode, per quanto riguarda il comportarsi delle derivate del primo membro di essa in Δ, delle stesse proprietà di cui godeva (25). Di più poichè i termini di ordine $n+3$ in (35) e (38) coincidono, le radici dell'equazione delle caratteristiche di (38) sono le medesime di quelle di (35), e cioè sono α', α'', α''' e le radici dell'equazione delle caratteristiche di (25): la (38) avrà dunque ν caratteristiche doppie corrispondenti a $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_\nu$; e per il secondo gruppo di equazioni del sistema delle (37), si avrà che tutte queste caratteristiche sono del tipo B_2) avendosi identicamente $B^{(4)} = 0$.

A collegare la nuova equazione (38) colla primitiva dimostrerò ora che l'equazione (38) ammette ancora quali soluzioni tutte le soluzioni di (25), e che inversamente ogni soluzione di (38) i cui dati iniziali soddisfacciano a (25), (29), (33), (38) è soluzione di (25). Infatti dalle identità (36) e dalle equazioni (37) segue che si ha identicamente:

$$\gamma_{m-i,\,i+2} = c_{m-i,\,i+2} + \xi_{m-i,\,i+2}\, F + \eta_{m-i,\,i+2} \frac{\delta F}{\delta x} + \zeta_{m-i,\,i+2} \frac{\delta F}{\delta y} \qquad (i = 0, 1, \dots, r-1)$$

$$\gamma_{\nu,\,\mu} = c_{\nu,\,\mu},$$

$\xi_{m-i,\,i+2}, \eta_{m-i,\,i+2}, \zeta_{m-i,\,i+2}$ essendo funzioni sempre finite e continue in Δ. Onde ancora si ha identicamente:

$$\left.\begin{aligned} F_1 \equiv F_0 &+ \left(\sum_0^{r-1} \xi_{m-i,\,i+2}\, p_{m-i,\,i+2}\right) F + \\ &+ \left(\sum_0^{r-1} \eta_{m-i,\,i+2}\, p_{m-i,\,i+2}\right) \frac{\delta F}{\delta x} + \left(\sum_0^{r-1} \zeta_{m-i,\,i+2}\, p_{m-i,\,i+2}\right) \frac{\delta F}{\delta y} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

cosicchè, se z è una soluzione di (25), per essa si avrà $F_1 - F = 0$.

Inversamente, se z è una soluzione di (38), si ponga:

$$F = p_{m0} - f(x, y, z, \dots, p_{0m}) = u(x\,y);$$

avremo che, posto:

$$\pi(x\,y) = \sum_0^{r-1} \xi_{m-i,\,i+2}\, p_{m-i,\,i+2},$$

$$\rho(x\,y) = \sum_0^{r-1} \eta_{m-i,\,i+2}\, p_{m-i,\,i+2},$$

$$\sigma(x\,y) = \sum_0^{r-1} \zeta_{m-i,\,i+2}\, p_{m-i,\,i+2},$$

per (39) e (34), la u deve soddisfare all'equazione:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (\alpha' + \alpha'' + \alpha''') \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + (\alpha'\alpha'' + \alpha'\alpha''' + \alpha''\alpha''') \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \alpha'\alpha''\alpha''' \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \pi u + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

E quindi, se inizialmente sono soddisfatte le (25) (29) (33) (38), se cioè per $x = 0$ sono nulle le u e le sue derivate dei primi 3 ordini sarà necessariamente ovunque $u = 0$.

Potremo dunque sostituire la (38) alla (25): e per la (38) saranno soddisfatte le condizioni da noi esposte in principio: d'ora innanzi ci limiteremo quindi a considerare equazioni aventi caratteristiche doppie per cui le condizioni che esprimono che queste caratteristiche sono del tipo B_2) risultano identiche.

Giova rilevare che dalle (30) e (31) segue che, se da una tale equazione se ne deduce un'altra derivandola totalmente rapporto ad una direzione arbitraria, questa godrà ancora delle stesse proprietà.

11. — Premesse tutte queste considerazioni incominciamo collo studiare il caso delle equazioni lineari a coefficienti funzioni di x ed y soltanto.

Base delle considerazioni che seguono sarà il teorema seguente da me dimostrato altrove (*):

Siano m operazioni:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial}{\partial y} \, .$$

E si consideri l'equazione:

$$X_1^{\tau_1} X_2^{\tau_2} \dots X_m^{\tau_m} z = \sum b_{i_1 i_2 \dots i_m}(x\, y)\, X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m} z + f(x\, y) \qquad (40)$$

dove è $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_m = n$, $0 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_m \leq n - 1$, $0 \leq i_j \leq \tau_j$ e dove si intenda che X_j^0 rappresenta l'operazione identica. È questa un'equazione con caratteristiche reali e multiple secondo $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_m$ rispettivamente. Supponiamo che $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$ ammettano rispettivamente almeno le derivate dei primi τ_1, $\tau_1 + \tau_2, \dots \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{m-1}$ ordini ed α_m ammetta almeno quelle dei primi $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{m-1} + \tau_m - 1$ ordini. Si supponga infine che in un campo δ, che per comodità supponiamo interno alla striscia $|x| < 1$ e contenente un tratto dell'asse delle y, sia M il massimo modulo delle α_i e delle derivate di cui sopra si ammise l'esistenza, sia μ (analogamente a quanto si pose nel numero 8) il massimo valore assoluto di $\dfrac{1}{\alpha_i - \alpha_j}$ $(i \neq j)$, M_1 il massimo valore assoluto di $b_{i_1 i_2 \dots i_m}$; ed infine che si abbia $|f(x\, y)| < F\, |x|^l$, F e l essendo numeri positivi o nulli. Nel campo δ_1 fornito dal massimo rombo contenuto in δ avente una diagonale sull'asse delle y ed i lati su rette di coefficiente angolare M e $-M$, esiste una ed una sola funzione z completamente caratterizzata dalle condizioni che su essa si possa operare colle $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m}$ e $X_1^{\tau_1} X_2^{\tau_2} \dots X_m^{\tau_m}$, che soddisfaccia a (40), e si annulli sull'asse delle y insieme colle $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m} z$. Ed esiste di più un numero K_n

(*) Cfr. « Lombardo I » § III, n.° 4, pag. 427.

dipendente solo dai numeri M, ρ, M_1 e dalla forma della (40) — e cioè da n, $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_m$ — tale che si ha:

$$\left.\begin{array}{l} z < K_0 \dfrac{1}{l-1} F(x)^{\cdots}, \quad X_1 z < K_1 \dfrac{1}{l-1} F(x)^{\cdots -1} \dots \\ \dots X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m} z < K \dfrac{1}{l-1} F(x)^{\cdots - i_m}, \end{array}\right\} \qquad (41)$$

Sulla funzione z si può anche operare colle operazioni che si ottengono da $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m}$ scambiando l'ordine dei fattori, purchè il nuovo simbolo operatorio così ottenuto abbia ancor senso (e cioè purchè esso, in base alle ipotesi fatte sulle z_i, ammetta ancora lo sviluppo formale per le derivate dei varii ordini). In particolare su z si può operare con quelle operazioni che si ottengono da $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m}$ portando nel primo posto uno dei fattori X corrispondente alla seconda X con esponente diverso da zero (*).

È chiaro che quando i numeri $\tau_1, \tau_2, \dots \tau$ che compaiono in (40) sono tutti 1 o 2, l'equazione (40) è a caratteristiche semplici e doppie.

Ora noi mostreremo che *condizione necessaria e sufficiente affinchè ad una equazione lineare a caratteristiche reali semplici e doppie si possa attribuire la forma* (40) *è che tutte le sue caratteristiche doppie siano del tipo* B_2).

E ciò basterà a dedurre dal teorema ora enunciato il teorema III per le equazioni lineari, quando appena si completi in alcuni punti il ragionamento per modo di provare che non solo si può fare la trasformazione formale di una tale equazione lineare in una equazione del tipo (40), ma che anche la soluzione z di (40) di cui il teorema precedente afferma l'esistenza ammette effettivamente le derivate dei varii ordini.

Ma per dimostrare questo teorema occorre premettere alcuni studii sulle operazioni della forma $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m}$.

12. — Si considerino due o più operazioni di ordine h:

$$\left.\begin{array}{l} R^{(h)} = X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_m^{i_m} = \sum\limits_0^h a \dfrac{\partial}{\partial x \, \partial y^{h-\cdot}} + \dots, \\ R_1^{(h)} = X_1^{i'_1} X_2^{i'_2} \dots X_m^{i'_m} = \sum\limits_0^h a \dfrac{\partial}{\partial x \, \partial y^{\cdot}} + \dots \dots \\ (i_1 + i_2 \dots + i_m = i'_1 + i'_2 + \dots + i'_m = \dots = h) \end{array}\right\} \qquad (42)$$

(*) Così se $i_1 = 0$, $i_2 \neq 0$ coll'operazione $X_2 X_1^{i_1} X_2^{i_2-1} \dots X_m^{i_m}$. Confronta riguardo quest'ultima affermazione « Lombardo I », § III, n.° 5, pag. 428.

i termini tralasciati contenendo solo derivate di ordine $\leq h - 1$. Supponiamo, come prima, $0 \leq i \leq \tau$: per rammentare questa ipotesi, a volte indicherò le $R^{(h)}$ col nome di operazioni di ordine h dedotte dalla $X_1^{\tau_1} X_2^{\tau_2} \ldots X_m^{\tau_m}$: esse si ottengono infatti da questa sopprimendo $\tau_1 - i_1$ fattori X_1, $\tau_2 - i_2$ fattori $X_2, \ldots\ \tau_m - i_m$ fattori X_m.

Dirò per brevità che due tali operazioni sono *equivalenti* quando $a_{i,h-i} = a'_{i,h-i}$: quando cioè esse non differiscono tra di loro che per una combinazione lineare di derivate di ordine inferiore ad h: dirò pure che esse sono equivalenti all'operazione $\sum a_{i,h-i} \frac{\partial^h}{\partial x^i \partial y^{h-i}}$. Dirò che più operazioni $R_1^{(h)} R_2^{(h)} \ldots R_s^{(h)}$ sono indipendenti quando nessuna loro combinazione lineare è equivalente allo zero: o in altri termini quando la matrice dei loro coefficienti $a'_{i,h-i}$, $a''_{i,h-i}, \ldots, a^{(s)}_{i,h-i}$ è diversa da zero.

Si considerino le operazioni $R^{(h)}$ di ordine h dedotte da $X_1^{\tau_1} X_2^{\tau_2} \ldots X_m^{\tau_m}$ $(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_m = n)$, di tali operazioni ve ne sono sole $h + 1 - \sum (\tau_j - n + h)$ indipendenti, la somma essendo estesa a quei valori di τ_j i quali sono maggiori di $n - h$ (*).

Incominciamo col mostrare che non vi possono essere più di

$$h + 1 - \sum (\tau_j - n + h)$$

operazioni in $R^{(h)}$ indipendenti. Siccome per ogni ordine h non esistono certo più di $h + 1$ operazioni indipendenti, basterà perciò mostrare che, se si pone come in (42) $R^{(h)} = \sum_0^h a_{i,h-i} \frac{\partial^h}{\partial x^i \partial y^{h-i}} + \cdots$ le $a_{i,h-i}$ soddisfanno ad un sistema di $\sum (\tau_j - n + h)$ equazioni lineari indipendenti.

Si osservi perciò che una X_j cui corrisponda un esponente $\tau_j > n - h$ è contenuta in ogni operazione $R^{(h)}$ con esponente $\geq \tau_j - n + h$. Concludiamo che l'α_j corrispondente è radice $(\tau_j - n + h)$-pla almeno dell'equazione $\sum (-1)^i a_{i,h-i} \alpha^i = 0$. Segue che i coefficienti $a_{i,h-i}$ dello sviluppo di $R^{(h)}$ soddisferanno, per ogni indice j tale che $\tau_j > n - h$, alle $\tau_j - n + h$ equazioni

(*) In particolare: se $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_m = 1$ vi sono $h + 1$ operazioni indipendenti per ogni ordine $h < n$ come è mostrato in « Lombardo II » § IV, n. 4: se, come sempre nel seguito, con τ indichiamo il massimo dei numeri $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$, vi sono $h + 1$ operazioni indipendenti di ordine $h \leq n - \tau$ come fu enunciato in « Lombardo II » § IV, n. 5.

lineari:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{0}^{n}(-1)^i a_{h-i}\, z_j^{i}=0\\
&\sum_{1}^{n} i\,(-1)^i a_{h-i}\, z_j^{i-1}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{\tau_j-n+h}^{n} i(i-1)\dots(i-\tau_j+n-h+1)(-1)^i a_{h-i}\, z_j^{i-\tau_j+n-h}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

E le $\sum(\tau_j-n+h)$ equazioni lineari (43) sono tutte indipendenti poichè il valore del determinante formato colle prime $\sum(\tau_j-n+h)$ colonne è, a meno del segno e di un coefficiente numerico (*), $\Pi(z_i-z_j)^{(\tau_i-n+h)(\tau_j-n+h)}$, come facilmente si vede con un calcolo perfettamente analogo a quello che si tiene ordinariamente per calcolare il determinante di Cauchy-Vandermonde.

Dimostriamo ora che effettivamente esistono $h+1-\sum(\tau_j-n+h)$ operazioni indipendenti. Posto $\sum(\tau_j-n+h)=\sigma$, è evidente che basterà mostrare che esistono $h-\sigma+1$ operazioni indipendenti $R^{(h-\sigma)}$ dedotte dall'operazione di ordine $n-\sigma$ $X_1^{\tau_1'}X_2^{\tau_2'}\dots X_m^{\tau_m'}$ che si ottiene da $X_1^{\tau_1}X_2^{\tau_2}\dots X_m^{\tau_m}$ diminuendo di $n-h$ unità quegli esponenti τ_j i quali superano $n-h$: poichè, aggiungendo ad una tale operazione $R^{(h-\sigma)}$ i fattori $X_j^{\tau_j-n+h}$ relativi agli indici j per cui $\tau_j>n-h$, si ottiene appunto una delle $R^{(h)}$ primitive. In altri termini ci possiamo limitare a studiare il caso che h sia minore od uguale a $n-\tau$ dove τ, come sempre in seguito, indica il massimo dei numeri $\tau_1\,\tau_2\dots\tau_m$, ed a dimostrare che allora esistono proprio $h+1$ operazioni $R^{(h)}$ indipendenti.

Siccome noi supponiamo che le z_i nel campo che consideriamo restino sempre due a due distinte potremo ordinarle per valori crescenti: chiamiamole, ordinate in questo modo, z', z'', ... $z^{(m)}$: chiamiamo X', X'', ... $X^{(m)}$, τ', τ'', ... $\tau^{(m)}$ le operazioni e gli esponenti corrispondenti. Consideriamo la

---

(*) Il fattore numerico è $\Pi\left(\prod_{1}^{\tau_j-n+h-1} l!\right)$ il prodotto rapporto a j essendo esteso a quei valori dell'indice j per cui $\tau_j>n-h$. Del resto risulta che le (43) sono indipendenti tosto che si osservi che le n equazioni analoghe a (43) le quali esprimono quali sono le radici dell'equazione $\Sigma(-1)^i a_{h-i}\cdot\alpha^i=0$ e quale la loro multiplicità, sono indipendenti, poichè individuano a meno di un fattore le a_{h-i}: onde sono pure indipendenti un qualunque loro gruppo particolare come il sistema delle (43).

successione delle n operazioni:

$$\overset{(1)}{X'},\ \overset{(2)}{X'}\dots\overset{(t')}{X'},\ \overset{(1)}{X''},\ \overset{(2)}{X''}\dots\overset{(t'')}{X''}\dots\overset{(1)}{X^{(m)}},\ \overset{(2)}{X^{(m)}}\dots\overset{(t^{(m)})}{X^{(m)}}. \tag{44}$$

Poniamo inoltre:

$$X_1^{t_1}X_2^{t_2}\dots X_m^{t_m}=\sum\gamma_{n-r\,r}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\,\partial y^r}+\cdots \qquad (\gamma_{n0}=1). \tag{45}$$

Consideriamo poi le $h+1$ operazioni $R_j^{(h)}$, che si ottengono sopprimendo da $X_1^{t_1}X_2^{t_2}\dots X_m^{t_m}$ gli $n-h$ fattori che nella successione (44) occupano i posti compresi fra il j-esimo e il $(n-h+j-1)$-esimo (gli estremi inclusi): è facile vedere che le $h+1$ operazioni così generate sono tutte indipendenti. Infatti si chiami α_j la somma delle $\varkappa$ relative alle operazioni che nella successione (44) occupano i posti dal j-esimo all'$(n-h+j-1)$-esimo: siccome $n-h$ è maggiore od uguale a tutti gli esponenti τ_i, e siccome le $\varkappa$ nella successione (44) sono crescenti, noi avremo che mai α_{j_1} ed α_{j_2} sono uguali, ma anzi che se $j_2>j_1$ è $\alpha_{j_2}>\alpha_{j_1}$, e la loro differenza non può mai scendere al disotto della minima differenza fra due radici diverse $\varkappa_i$. D'altra parte, ricordando che le $\varkappa_1\ \varkappa_2\dots\varkappa_m$ sono le radici dell'equazione $\sum(-1)^r\gamma_{n-r\,r}\,\varkappa^r=0$, e che quindi, per essere $\gamma_{n0}=1$, si ha $\gamma_{n-1\,1}=\sum_1^m\tau_i\varkappa_i$, $\gamma_{n-2\,2}=\cdots$ si deduce immediatamente:

$$R_j^{(h)}=\frac{\partial^n}{\partial x^n}+(\gamma_{n-1\,1}-\alpha_j)\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\,\partial y}+\{\gamma_{n-2\,2}-\alpha_j\{\gamma_{n-1\,1}-\alpha_j\}\}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-2}\,\partial y^2}+\cdots$$

$$\cdots\{\gamma_{n-r\,r}-\alpha_j\{\gamma_{n-r+1\,r-1}-\alpha_j\{\dots\{\gamma_{n-1\,1}-\alpha_j\}\dots\}\}\}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\,\partial y^r}+\cdots$$

e quindi il determinante dei coefficienti delle $R_j^{(h)}$ è uguale a meno del segno a $\prod_{i<l}(\alpha_i-\alpha_l)$ (*). Segue che effettivamente le $R_j^{(h)}$ sono indipendenti. C. v. d.

Ma dalla precedente dimostrazione seguono ancora due altri corollarii per noi molto importanti. Dalla prima parte della dimostrazione segue:

(*) Cfr. per il calcolo di un determinante assolutamente analogo « Lombardo II », § IV, n. 1. Il teorema precedente si sarebbe anche potuto dimostrare un po' più semplicemente per induzione completa; ma ciò non ci avrebbe permesso di dimostrare i corollarii che seguono.

Corollario I. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè una operazione $\sum a_{rh} \frac{\partial^h}{\partial x^r \partial y^{h-r}}$ sia equivalente ad una combinazione lineare di operazioni $R^{(h)}$ è che per ogni indice j tale che $\tau_j > n - h$ siano soddisfatte le $\tau - n + h$ equazioni* (43).

Poniamo mente al fatto che notammo già sopra che la differenza di due α è sempre maggiore della differenza di due α_i, otterremo allora:

Corollario II. — *Se h è minore del numero $n - \tau$, le derivate di ordine h si possono esprimere linearmente per mezzo delle derivate di ordine $\leq h - 1$ e delle $R_1^{(h)}, R_2^{(h)}, \dots R_{h+1}^{(h)}$ con coefficienti certamente inferiori ad un numero che dipende dai numeri M e μ soltanto.*

13. — Allo stesso modo che in « Lombardo II » § IV, n. 2 e 3, noi siamo ora in grado di asserire: Se sopra una funzione z si può operare sia con tutte le operazioni $R^{(h)}$ — h essendo un qualunque numero $\leq n - \tau$, — sia con quelle che si ottengono portando nel primo posto uno dei fattori X corrispondenti alla seconda X con esponente diverso da zero che compare in $R^{(h)}$, la funzione z ammette tutte le derivate dei primi $n - \tau$ ordini. E se le $R^{(h)} z$ per $h \leq s \leq n - \tau$ sono tutte numericamente inferiori ad una quantità, (numero o funzione) P noi possiamo trovare un numero ν dipendente solo da s, M, μ tale che il valore di una qualunque derivata di z di ordine $\leq s$ è inferiore a $\nu_s P_s$.

14. — Ed aggiungiamo infine un'osservazione:

Siano $Y_1\, Y_2 \dots Y_n$ n operazioni distinte o no:

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}, \tag{47}$$

e tali che α_i ammetta le derivate dei primi $i - 1$ ordini, per modo che si possa del prodotto simbolico $Y_1\, Y_2 \dots Y_n$ avere lo sviluppo formale per le derivate dei varii ordini.

Si ponga:

$$\left. \begin{aligned} Y_1\, Y_2 \dots Y_n = \sum \gamma_{n\,r} \frac{\partial^n}{\partial x^r \partial y^{n-r}} &+ \sum \gamma_{n-1\,r} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^r \partial y^{n-r-1}} \\ &+ \sum \gamma_{n-2\,r} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^r \partial y^{n-r-2}} + \dots \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

Il calcolo effettivo mostra facilmente che si hanno le seguenti uguaglianze:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_n(\alpha_i) &= \sum (-1)^r \gamma_r \, \alpha_i^{n-r} = \\
&= (-1)^n (\alpha_i - \alpha_1)(\alpha_i - \alpha_2) \ldots (\alpha_i - \alpha_n) = \\
&= (-1)^n \prod (\alpha_i - \alpha_l) \\
\varphi_{n-1}(\alpha_i) &= \sum (-1)^r \gamma_{r} \, \alpha_i^{n-r-1} = \\
&= (-1)^{n-1} \sum_{i_1 < i} Y_{i_1} \alpha_i \, (\alpha_i - \alpha_1) \ldots (\alpha_i - \alpha_{i_1 - 1})(\alpha_i - \alpha_{i_1 + 1}) \ldots \\
&\qquad \ldots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \ldots (\alpha_i - \alpha_n) = \\
&= (-1)^{n-1} \sum_{i_1 < i} Y_{i_1} \alpha_{i_1} \prod_{l \neq i, i_1} (\alpha_i - \alpha_l) \\
\varphi_{n-2}(\alpha_i) &= \sum (-1)^r \gamma_{r} \, \alpha_i^{n-r-2} = \\
&= (-1)^{n-2} \sum_{i_1 < i_2 < i} Y_{i_1} Y_{i_2} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \prod_{l \neq i, i_1, i_2} (\alpha_i - \alpha_l) + \\
&\qquad + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{i_1 < i_2, i < i_3 \\ i_1 \neq i \neq i_2 \neq i \neq i_3}} Y_{i_1} \alpha_{i_2} \, Y_{i_3} \alpha_{i_3} \prod_{l \neq i, i_1, i_2, i_3} (\alpha_i - \alpha_l)
\end{aligned}
\right\} \quad (49)
$$

. . . .

15. — Ciò posto, siamo ormai in grado di risolvere la questione propostaci nel n. 11.

Sia un'equazione lineare:

$$
\left.
\begin{aligned}
p_{n0} + P_{n-1,1}(xy)\, p_{n-1,1} + \ldots + P_{1,n-1}(xy)\, p_{1,n-1} + P_{0n}(xy)\, p_{0n} + \\
+ \sum_{0 \leq i+h \leq n-1} c_{ih}(xy)\, p_{ih} + f(xy) = 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (50)
$$

E si supponga che essa ammetta ν caratteristiche doppie ed $n - 2\nu$ caratteristiche semplici. Per fissare le idee supporrò, come dissi al n. 8, che le caratteristiche doppie corrispondano alle radici $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$, le semplici alle radici $\alpha_{\nu+1} \ldots \alpha_{n-\nu}$. Per le α e la $f(xy)$ supporrò che nel campo δ definito al numero 11 soddisfacciano alle condizioni del n. 11 medesimo, e che in questo medesimo campo le c_{ih} siano inferiori in valore assoluto ad un certo numero $\mathfrak{M}_1$. Se, conforme a quanto si fece nel n. precedente, poniamo:

$$
X = X_1 X_2 \ldots X_\nu^2 X_{\nu+1} \ldots X_{n-\nu} = \sum \gamma_r \frac{\partial^n}{\partial x^r \, \partial y^{n-r}} + \sum \gamma_r' \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^r \, \partial y^{n-r-1}} + \ldots \quad (51)
$$

i termini tralasciati essendo di ordine $\leq n-2$, noi sappiamo che si ha idenficamente $\gamma_{0n} = 1$, $\gamma_{in}(x\, y) = P_{in}$; e quindi (50) prende la forma:

$$\left.\begin{aligned} X_1^2 X_2^2 \dots X_\nu^2 X_{\nu+1} \dots X_{n-\nu}\, z + \sum_0^{n-1} (c_{i\, n-i-1} - \gamma_{i\, n-i-1})\, p_{i\, n-i-1} \\ + \sum_{i+h \leq n-2} \delta_{ih}(x\, y)\, p_{ih} + f(x\, y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

E dal primo corollario del n. 12 (pag. 187) segue che, affinchè questa equazione si possa portare nella forma (49), occorre e basta che si abbia:

$$\sum_0^{n-1} (-1)^i (c_{i\, n-i-1} - \gamma_{i\, n-i-1})\, z_j^i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots \nu). \tag{53}$$

Ma dalla seconda delle formule (49) segue senz'altro:

$$\sum_0^{n-1} (-1)^i \gamma_{i\, n-i-1}\, z_j^i = X_j z_j\, . (z_j - z_1)^2 (z_j - z_2)^2 \dots (z_j - z_{j-1})^2 (z_j - z_{j+1})^2 \dots$$
$$\dots (z_j - z_\nu)^2 (z_j - z_{\nu+1}) \dots (z_j - z_{n-\nu}):$$

ossia, ricordando che $z_1\, z_2 \dots z_\nu$ sono radici doppie, $z_{\nu+1} \dots z_{n-\nu}$ radici semplici dell'equazione:

$$z^n - P_{n-1\, 1}\, z^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} P_{1\, n-1}\, z + (-1)^n P_{0n} = 0$$

si avrà, per $j = 1, 2, \dots \nu$:

$$\sum_0^{n-1} (-1)^i \gamma_{i\, n-i-1}\, z_j^i = \frac{1}{2} X_j z_j \Big| n(n-1)\, z_j^{n-2} - (n-1)(n-2)\, P_{n-1\, 1}\, z_j^{n-3} + \dots$$
$$\dots + 2(-1)^{n-2} P_{2\, n-2} \Big| .$$

Onde le equazioni (53) diverranno:

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^{n-1} (-1)^i c_{i\, n-i-1}\, z_j^i - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial z_j}{\partial x} + z_j \frac{\partial z_j}{\partial y}\right] \Big| n(n-1)\, z_j^{n-2} - \\ - (n-1)(n-2)\, P_{n-1\, 1}\, z_j^{n-3} + \dots + 2(-1)^{n-2} P_{2\, n-2} \Big| = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Basta confrontare questa equazione coll'espressione di B data al n. 2 (form. (11)) per dedurre senz'altro il teorema enunciato al n. 11: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione lineare* (50) *avente* ν *caratteristiche doppie ed* $n - \nu$ *semplici possa portarsi nella forma* (49) *è che tutte le sue caratteristiche doppie siano del tipo* B_2).

È da notare che in virtù del fatto dimostrato nel n. 2 che i determinanti dei coefficienti delle operazioni indipendenti dei varii ordini dedotte da (51), sono sempre maggiori di una certa potenza di $\frac{1}{\mu}$, nel trasformare la (50) in una equazione del tipo (40), i coefficienti b della nuova equazione saranno ancora inferiori ad un numero M_1 dipendenti da $\mathfrak{M}_1$, μ ed M soltanto. Alle equazioni (50) di questo tipo noi potremo dunque applicare il teorema del n. 11: e, ricordando le osservazioni del n. 13, noi potremo provare così che per esse il problema di Cauchy ammette sempre una ed una sola soluzione la quale possiede tutte le derivate dei primi $n-2$ ordini.

16. — Ma senza enunciare qui con maggiori particolari il teorema analogo al teorema del n. 11 che così veniamo ad ottenere, aggiungiamo subito alcune osservazioni, le quali ci permetteranno di giungere senz'altro al risultato finale. Seguiremo un artificio affatto analogo a quello usato nel § V di « Lombardo II ». Si supponga che l'equazione (50) lineare di ordine n abbia, come prima, ν caratteristiche reali e doppie del tipo $B_2)$ corrispondenti alle radici $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_\nu$, ed $n-\nu$ caratteristiche reali e semplici corrispondenti ad $\alpha_{\nu+1}, \alpha_{\nu+2}, \dots \alpha_{n-\nu}$, e che nel solito campo δ definito al n. 11 i coefficienti c_{ik} ammettano le derivate dei primi g ordini finite e continue ed inferiori ad un numero $\mathfrak{M}_1$; si supponga inoltre che tutte le α ammettano tutte le derivate dei primi g ordini almeno ed inoltre che α_i ammetta le derivate dei primi $2i$ ordini se $i < \nu$, dei primi $2i-\nu$ ordini se $i > \nu$: infine che sia le α_i che le loro derivate siano tutte inferiori ad un numero M: e che μ sia il massimo di $\frac{1}{\alpha_i - \alpha_j}$ $(i \neq j)$. Quanto ad $f(x\, y)$ si ammetta che anche essa abbia le derivate dei primi g ordini finite e continue, e che $F_1, F_2 \dots F_g$, $t_1, t_2, \dots t_g$ siano due successioni di numeri positivi o nulli tali che per ogni $j \leq g$, f e le sue derivate dei primi j ordini siano in modulo inferiori ad $F_j\, x^{t_j}$.

Se noi prendiamo allora g numeri $\alpha_{n-\nu+1}, \alpha_{n-\nu+2}, \dots \alpha_{n-\nu+g}$ tutti inferiori ad M per cui sia $\frac{1}{\alpha_{n-\nu+i} - \alpha_j} < \mu$ $(i = 1, \dots, g,\ j = 1, \dots, n-\nu+g)$, noi potremo per le ipotesi fatte sopra derivare totalmente l'equazione data rapporto alle direzioni di coefficienti angolari $\alpha_{n-\nu+1}, \dots \alpha_{n-\nu+g}$, ed otterremo g equazioni lineari $E_1, E_2, \dots E_g$, di ordine $n+1, n+2, \dots n+g$, tali che, per le osservazioni del n. 9, E_i ammette ancora ν caratteristiche doppie del tipo $B_2)$ corrispondenti alle radici $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_\nu$ ed $n+i-2\nu$ caratteristiche semplici corrispondenti alle radici $\alpha_{\mu+1}, \dots \alpha_{n-\mu+1}$: ed i coefficienti di queste equazioni saranno ancora inferiori ad un certo numero $\mathfrak{M}'_1$ dipendente da μ, M, $\mathfrak{M}_1$ soltanto. E la soluzione cercata dell'equazione proposta è quella soluzione delle equazioni $E_1, E_2, \dots E_g$, i cui dati iniziali sono gli stessi che i primitivi per quanto riguarda le derivate di ordine $= n$, e per quello che riguarda le derivate di ordine inferiore si determinano mediante l'equazione data e le $E_1, E_2, \dots E_g$ medesime.

Le equazioni $E_1, E_2, \dots E_g$ per quanto precede si possono tutte portare nella forma (49); onde ormai, seguendo passo passo i ragionamenti del citato § V di « Lombardo II » specie in quanto si riferisce alla forma che assume il termine noto di $E_1, E_2, \dots E_g$ quando si riportino i dati iniziali nella loro forma normale indicata al n. 7, noi potremo conchiudere che nelle ipotesi precedenti: nel campo δ_1 definito dal massimo rombo contenuto in δ con una diagonale sull'asse delle y e coi lati paralleli alle rette di coefficiente angolare M e $-M$ esiste una ed una sola soluzione di (50) nulla sull'asse delle y insieme colle sue derivate dei primi n ordini, ed esistono $g+1$ numeri $k_n, k_n^{(1)}, \dots, k_n^{(g)}$, dipendenti da n, ν, M, μ, $\mathfrak{M}_1$ soltanto, tali che:

$$
\left.
\begin{aligned}
& |z| < k_n \frac{1}{l+1} F x^{l+n}, \quad \left| p_{10}, \; p_{01} \right| < k_n \frac{1}{l} F x^{l+n-1}, \dots \\
& \qquad\qquad \dots, \; |p_{m-2,0}| < k_n \frac{1}{l+1} F x^{l+2} \\
& |p_{m-1,1}| < k_n^{(1)} \left| \frac{1}{l_1+1} F_1 x^{l_1+2} + F x^{l+1} \right| \\
& |p_{m-2,2}| < k_n^{(2)} \left| \frac{1}{l_2+1} F_2 x^{l_2+2} + F_1 x^{l_1+1} + F x^{l} \right| \\
& \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
& |p_{m-g,g}| < k_n^{(g)} \left| \frac{1}{l_g+1} F_g x^{l_g+2} + F_{g-1} x^{l_{g-1}+1} + F_{g-2} x^{l_{g-2}} \right|.
\end{aligned}
\right\} \tag{55}
$$

17. — Ed ormai per dimostrare il teorema generale non resta più che applicare il metodo indicato in « Lincei » per dimostrare il teorema III per le equazioni a caratteristiche reali e distinte.

Quando la F ammetta un conveniente numero di derivate si potrà evidentemente applicare ad essa il procedimento del n. 2 di quella nota, e cioè dedurre le equazioni di ordine $n+1$, $n+2, \dots$ che si ottengono derivando totalmente F rapporto alle direzioni α', α'', $\alpha''', \dots$; fino a ridurci allo studio di un'equazione lineare nelle derivate dei due ordini massimi e tale che chiamando di nuovo n il suo ordine abbia la forma:

$$p_{n0} + P_{11}\, p_{n-1\,1} + \dots + P_{0n}\, p_{0n} + \sum c_{rs}\, p_{r\,s-1} = f(x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{0\,n-2}) \quad (56)$$

dove le c_{rs} sono funzioni delle derivate dei primi $n-2$ ordini, le P_{ik} delle sole derivate dei primi n_1 ordini, n_1 essendo tale che $2n_1 - 1 \leq n$. Infine delle radici dell'equazione delle caratteristiche di (56) ν sono doppie — siano ad es.: $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_\nu$ —, altre $\nu_1 - 2\nu$ sono semplici — siano ad es.: $\alpha_{\nu+1}\,\alpha_{\nu+2}\ldots\alpha_{\nu_1-\nu}$ —, e le residue $n - \nu_1 + \nu$ sono pure semplici e costanti (*). E poichè si può supporre che per l'equazione primitiva $F = 0$ secondo quanto si vide ai nn. 8-10, le condizioni che esprimono che le caratteristiche doppie siano del tipo B_2) siano identicamente soddisfatte, anche per l'equazione dedotta col nostro procedimento (in virtù dell'identità (32)) le condizioni analoghe saranno pure identicamente soddisfatte e cioè le prime ν caratteristiche saranno del tipo B_2). Inoltre le funzioni P, c, f, α ammetteranno in un campo Δ dello spazio in cui $x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{0n}$ sono coordinate quel certo numero di derivate parziali finite e continue che occorrerà e che qui è inutile più precisamente enunciare.

Sulle equazioni del tipo (56) si ragiona precisamente come sulle equazioni del tipo (6) (pag. 333) di «Lincei»: per esse si dimostra la possibilità di risolvere il problema di Cauchy per approssimazioni successive: determinando la funzione incognita z quale limite delle funzioni z_i soluzioni delle equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
p_{1,n0} + P_{0,1\,n-1}\, p_{1,1\,n-1} + \dots + P_{0,0n}\, p_{1,0n} + \sum c_{0,rs}\, p_{1,r\,s-1} = \\
\qquad\qquad\qquad = f(x\,y\,0\ldots0) = f_0(x\,y) \\
p_{2,n0} + P_{1,1\,n-1}\, p_{2,1\,n-1} + \dots + P_{1,0n}\, p_{2,0n} + \sum c_{1,rs}\, p_{2,r\,s-1} = \\
\qquad\qquad\qquad = f(x\,y\,z_1\ldots p_{1,0\,n-2}) = f_1(x\,y) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_{i,n0} + P_{i-1,1\,n-1}\, p_{i,1\,n-1} + \dots + P_{i-1,0n}\, p_{i,0n} + \sum c_{i-1,rs}\, p_{i,r\,s-1} = \\
\qquad\qquad\qquad = f(x\,y\,z_{i-1}\ldots p_{i-1,0\,n-2}) = f_{i-1}(x\,y) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad (57)$$

(*) Non abbiamo nel testo fissato il numero delle derivazioni che occorrono per dedurre un'equazione del tipo (56) perchè a seconda della forma della equazione primitiva può essere più o meno elevato: però è da notare che data un'equazione qualunque basterà certamente applicare il procedimento di derivazione tante volte quanto è l'ordine dell'equazione aumentato di 1 per dedurre un'equazione del tipo (56): anzi un'equazione che gode ancora di altre proprietà che al nostro scopo non hanno efficacia.

dove $P_{0,i} = P_{0i}(x\,y\,0\,\ldots\,0)$, $c_{0,i} = c_{0i}(z\,y\,0\,\ldots\,0)$, $P_{r,i} = P_{ri}(x\,y\,z_{r}\,\ldots\,p_{r\,0n-2})$, $c_{r,i} = c_{ri}(x\,y\,z\,\ldots\,p_{r\,0n-2})$. Tale sistema è un sistema di equazioni del tipo (50); ed applicando il teorema del numero precedente si dimostra l'esistenza delle funzioni z_r e la loro convergenza a un limite

§ IV.

18. Ci occuperemo ora brevemente delle caratteristiche triple. E per maggior semplicità non mi occuperò delle varie specie di caratteristiche triple che si possono presentare anche isolate: ma limiterò la ricerca al caso in cui l'equazione proposta

$$F(x\,y\,z\,p_{10}\,\ldots\,p_{0n}) = 0 \tag{1}$$

abbia in tutto un campo Δ dello spazio S una caratteristica tripla corrispondente alla radice $\varkappa$ dell'equazione delle caratteristiche. Allora per una tale radice $\varkappa$ noi avremo, ragionando come al n. 3, che non solo sono soddisfatte le:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_0^n (-1)^i \frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \varkappa^i = 0\\
&\sum_1^n (-1)^{i-1}\, i \frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \varkappa^{i-1} = 0\\
&\sum_2^n (-1)^{i-2}\, i(i-1) \frac{\partial F}{\partial p_{n-i\,i}} \varkappa^{i-2} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

ma ancora che, dette ω, ω_1 due qualunque — eventualmente coincidenti delle variabili x, y, $z, \ldots\, p_{0n}$, sono pure soddisfatte le:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_0^n (-1)^i \frac{\partial^2 F}{\partial p_{n-i\,i}\,\partial\omega} \varkappa^i = 0\\
&\sum_0^n (-1)^i \frac{\partial^3 F}{\partial p_{n-i\,i}\,\partial\omega\,\partial\omega_1} \varkappa^i = 0\\
&\sum_1^n (-1)^{i-1}\, i \frac{\partial^2 F}{\partial p_{n-i\,i}\,\partial\omega} \varkappa^{i-1} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Sostituendo allora nella h-esima delle equazioni (9) alle $p_{0n+h}, \ldots\, p_{0n+h-1}$ ed alle loro derivate rapporto ad x le loro espressioni per p_{0n+h}, $\frac{d\,p_{0n+h}}{d\,x}$, p_{0n+h-1}, $\frac{d\,p_{0n+h-1}}{d\,x}$, $\frac{d^2\,p_{0n+h-1}}{d\,x^2}$ e per le p_{ik} di ordine inferiore ad $n+h-1$ e le derivate di queste (*) otterremo le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} B\,p_{0n+1} + E\,\frac{d\,p_{0n}}{d\,x} + (H + 2\,H_1)\,p_{0n} + G &= 0 \\ B\,p_{0n+2} + E\,\frac{d\,p_{0n+1}}{d\,x} + (H + 3\,H_1)\,p_{0n+1} + G_1 &= 0 \\ B\,p_{0n+3} + E\,\frac{d\,p_{0n+2}}{d\,x} + (H + 4\,H_1)\,p_{0n+2} + G_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

. . . .

In queste equazioni B è dato dall'ultima delle (11), che però in questo caso si semplifica in grazia alla terza delle (57):

$$B = \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i \frac{\partial F}{\partial p_{n-i,i}}\,\alpha^i. \tag{60}$$

Si ha inoltre:

$$\left.\begin{aligned} E &= \sum_1^{n-1} (-1)^i\, i\, \frac{\partial F}{\partial p_{n-i,i}}\,\alpha^{i-1} + \frac{1}{2}\frac{d\,\alpha}{d\,x}\sum_3^n (-1)^i\, i\,(i-1)\,(i-2)\,\frac{\partial F}{\partial p_{n-i,i}}\,\alpha^{i-3} \\ H &= \sum_1^{n-2} (-1)^i \frac{\partial F}{\partial p_{n-i-1,i}}\,\alpha^{i-1} + \frac{1}{2}\frac{d\,\alpha}{d\,x}\sum_2^{n-1} (-1)^i\, i\,(i-1)\,\frac{\partial F}{\partial p_{n-i-1,i}}\,\alpha^{i-2} \\ &\quad + \frac{1}{8}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,x}\right)^2 \sum_4^n (-1)^i\, i\,(i-1)\,(i-2)\,(i-3)\,\frac{\partial F}{\partial p_{n-i,i}}\,\alpha^{i-4} \\ &\quad + \frac{1}{6}\frac{d^2\,\alpha}{d\,x^2}\sum_3^n (-1)^i\, i\,(i-1)\,(i-2)\,\frac{\partial F}{\partial p_{n-i,i}}\,\alpha^{i-3} \\ H_1 &= \sum (-1)^i \frac{\delta}{\delta\,y}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{n-i,i}}\right)\alpha^i \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

(*) Nel trasformare la h-esima delle equazioni (9) occorre usare delle formole (che si ottengono facilmente dalle formule della seconda nota di pag. 166):

$$p_{n-i,\,i+h-1} = (-1)^i\,\alpha^i\,p_{0n+h-1} + \ldots$$

$$p_{n-i,\,i+h} = (-1)^i\,\alpha^i\,p_{0n+h} + \binom{i}{2}(-1)^{i-1}\alpha^{i-2}\frac{d\,\alpha}{d\,x}\,p_{0n+h-1} + i\,(-1)^{i-1}\alpha^{i-1}\frac{d\,p_{0n+h-1}}{d\,x} + \ldots$$

$$\frac{d\,p_{n-i,\,i+h}}{d\,x} = (-1)^i\,\alpha^i\,\frac{d\,p_{0n+h}}{d\,x} + (-1)^i\, i\,\alpha^{i-1}\frac{d\,\alpha}{d\,x}\,p_{0n+h}$$
$$+ (-1)^{i-1}\binom{i}{2}\alpha^{i-3}\left[(i-2)\left(\frac{d\,\alpha}{d\,x}\right)^2 + \alpha\,\frac{d^2\,\alpha}{d\,x^2}\right]p_{0n+h-1} + (-1)^{i-1}\,3\binom{i}{2}\alpha^{i-2}\frac{d\,\alpha}{d\,x}\frac{d\,p_{0n+h-1}}{d\,x}$$
$$+ (-1)^{i-1}\, i\,\alpha^{i-1}\frac{d^2\,p_{0n+h-1}}{d\,x^2} + \ldots$$

i termini tralasciati contenendo solo p_{ik} di ordine $\leq n+h-1$ e quindi non portando contributo altro che negli ultimi termini delle (59).

mentre $G_1, G_2, G_3, \dots$ dipendono solo dalle p di ordine $n, n-1, \dots$ rispettivamente e dalle loro derivate: ed anzi hanno la forma:

$$G_1 = \left(\sum_3^n (-1)^i \, i\,(i-1)\,(i-2)\,\frac{\partial F}{\partial p_{n-i,i}}\, z'^{\,i-3}\right) \frac{d\, p_{0n}}{d x} + \dots \tag{62}$$

onde se, come si supporrà d'ora in poi, la caratteristica è proprio tripla, e non più che tripla, esse hanno il coefficiente di $\dfrac{d\, p_{0n}}{d x}$ certamente $\neq 0$.

Se $B \neq 0$ noi ricadiamo in un caso del tutto analogo al caso A) già studiato per le caratteristiche doppie e che potremo indicare con A').

Ma se, come noi supponiamo d'ora in poi, per le caratteristiche che si studiano si ha:

$$B = 0 \tag{63}$$

si dedurrà come al n. 3 che, se ω è una qualunque delle variabili $x, y, z, \dots p_{0n}$, si ha pure:

$$\sum (-1)^i \frac{\partial^2 F}{\partial \omega\, \partial p_{n-i,i}}\, z'^{\,i} = 0$$

onde seguirà $H_1 = 0$, e alle equazioni (59) si dovrà sostituire il sistema più semplice:

$$\left.\begin{aligned}
E\,\frac{d\, p_{0n}}{d x} + H\, p_{0n} + G &= 0\\
E\,\frac{d\, p_{0n-1}}{d x} + H\, p_{0n-1} + G_1 &= 0\\
E\,\frac{d\, p_{0n-2}}{d x} + H\, p_{0n-2} + G_2 &= 0\\
\dots\dots\dots\dots&\dots
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

La prima di queste equazioni dà allora una nuova condizione per le caratteristiche di ordine n. Ma se noi la supponiamo soddisfatta e consideriamo solo le equazioni che seguono, possono aversi più casi.

1.° $E \neq 0$. — Allora le caratteristiche di ordine $n+1$, $n+2, \dots$ che contengono una data caratteristica di ordine n dipendono da 1, 2, 3,... costanti arbitrarie; e due superficie soluzioni di (1) che abbiano in comune una tale caratteristica, se in un punto hanno un contatto di ordine $n+h$, hanno lo stesso contatto lungo la caratteristica.

2.° $E = 0$, $F \neq 0$. — Esiste una sola caratteristica di ordine $n+1$, una sola di ordine $n+2$, una di ordine $n+h$, le quali contengono l'assegnata caratteristica di ordine n: ed in altri termini, supposto che l'equazione e la caratteristica siano analitiche, non può esistere più di una superficie soluzione di (1) analitica nell'intorno della caratteristica assegnata che la contenga.

3.° $E = F = 0$. — Allora anche la seconda delle equazioni (64) diventa una nuova condizione cui deve soddisfare la caratteristica di ordine n poichè si riduce a $G_1 = 0$. Ma, supposto che essa sia soddisfatta, le successive equazioni $G_2 = 0$, $G_3 = 0$.... risultano per (62) equazioni di terzo ordine nelle $p_{0,n+1}$, $p_{0,n+2}$.... E quindi le caratteristiche di ordine $n+1$, $n+2$,...., $n+h$, che contengono la caratteristica data dipendono rispettivamente da 3, 6,.... $3h$ costanti arbitrarie: e due superficie soluzioni di (1) le quali in un punto della caratteristica abbiano un contatto di ordine $n+h$ hanno un contatto di ordine $n+h+2$ almeno in tutti i punti della caratteristica medesima.

Le caratteristiche di quest'ultimo tipo sono quelle per cui compatibilmente colla condizione che la caratteristica sia tripla, resta massima l'arbitrarietà delle caratteristiche di ordine superiore cui esse possono appartenere. Per brevità le indicherò d'ora innanzi col nome di caratteristiche del tipo B_3).

12. Mi propongo ora di mostrare che: *quando un'equazione ha in un campo Δ di S caratteristiche tutte reali o soltanto semplici, doppie, o triple, e quelle doppie sono tutte del tipo B_2), e quelle triple tutte del tipo B_3), il problema di* Cauchy *anche dal punto di vista delle variabili reali ammette per tali equazioni una ed una sola soluzione.*

Io mi limiterò però a dimostrare che *quando un'equazione lineare di ordine n ammette solo caratteristiche semplici, doppie e triple, condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa portare nella forma* (40) *è che le sue caratteristiche doppie siano del tipo B_2), le triple del tipo B_3).*

Si passerà poi da questo teorema al teorema enunciato in principio per le equazioni lineari fondandosi sul teorema enunciato al n. 11 e con considerazioni pienamente analoghe a quelle che nel § III abbiamo ampiamente svolto nei nn. 15 e 16. Ed ancora con ragionamenti analoghi a quelli dei nn. 8, 9, 10 e 17 si passerà da questo caso più semplice delle equazioni lineare al caso dell'equazione generale.

Conviene fare tuttavia notare fin dal principio che qualora si trattasse di equazioni del terzo ordine la possibilità di risovere il problema di Cauchy risulta allora dal fatto che le caratteristiche di terzo ordine triple del tipo B) dipendono solo da un numero finito di costanti arbitrarie.

20. — Sia dunque:

$$\left.\begin{aligned} p_{n0} + P_{n-1\,1}\, p_{n-1\,1} + \dots + P_{1\,n-1}\, p_{1\,n-1} + P_{0n}\, p_{0n} + \\ + \sum_{0 \leq i+h \leq n-1} c_{ih}\, p_{ih} + f(x\,y) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

un'equazione lineare la quale possegga ν_1 caratteristiche triple, $\nu_2 - \nu_1$ caratteristiche doppie, $n - 2\nu_2 - \nu_1$ caratteristiche semplici. Supporrò, per fissare le idee, che $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{\nu_1}$ siano le radici corrispondenti alle caratteristiche triple, $\alpha_{\nu_1+1}, \alpha_{\nu_1+2}, \dots \alpha_{\nu_2}$ quelle corrispondenti alle caratteristiche doppie, $\alpha_{\nu_2+1}, \alpha_{\nu_2+2}, \dots \alpha_{n-\nu_2-\nu_1}$ quelle corrispondenti alle caratteristiche semplici. Quanto alle α, f, c, supporrò che siano soddisfatte nel solito campo δ le condizioni più volte enunciate.

Poniamo:

$$\left.\begin{aligned} & X_1^3 X_2^3 \dots X_{\nu_1}^3 X_{\nu_1+1}^2 \dots X_{\nu_2}^2 X_{\nu_2+1} \dots X_{n-\nu_2-\nu_1} = \\ & = \sum \gamma_{i\,n-i} \frac{\partial^n}{\partial x^i\, \partial y^{n-i}} + \sum \gamma_{i\,n-i-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^i\, \partial y^{n-i-1}} + \sum \gamma_{i\,n-i-2} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^i\, \partial y^{n-i-2}} + \dots \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

i termini tralasciati essendo di ordine inferiore ad $n - 2$. Sappiamo che è $\gamma_{n0} = 1, \gamma_{i\,n-i} = P_{i\,n-i}$: mentre i valori delle altre funzioni γ si otterranno dalle (49) facendovi $Y_{3s+2} = Y_{3s+1} = Y_{3s} = X_s$ per $0 \leq s \leq \nu_1$, $Y_{3\nu_1+2s+1} = Y_{3\nu_1+2s} = X_{\nu_1+s}$, per $0 \leq s \leq \nu_2 - \nu_1$, $Y_{2\nu_2+\nu_1+s} = X_{\nu_2+s}$ per $0 \leq s \leq n - \nu_2 - \nu_1$.

Avremo allora, indicando con $i_1, l_1, m_1 \dots$; $i_2, l_2, m_2 \dots$; $i_3, l_3, m_3 \dots$ indici variabili rispettivamente tra 1 e ν_1, $\nu_1 + 1$ e ν_2, $\nu_2 + 1$ ed $n - \nu_2 - \nu_1$:

$$\left.\begin{aligned} & \sum (-1)^i \gamma_{i\,n-i-1} \tau^i = (-1)^{n-1} \prod_{l_1} (\tau - \alpha_{l_1})^3 \prod_{l_2} (\tau - \alpha_{l_2})^2 \prod_{l_3} (\tau - \alpha_{l_3}) \cdot \\ & \cdot \Bigg\{ 3 \sum_{i_1} \frac{1}{\tau - \alpha_{i_1}} \Bigg[\frac{X_{i_1} \alpha_{i_1}}{\tau - \alpha_{i_1}} + 3 \sum_{m_1 > i_1} \frac{X_{i_1} \alpha_{m_1}}{\tau - \alpha_{m_1}} + 2 \sum_{m_2} \frac{X_{i_1} \alpha_{m_2}}{\tau - \alpha_{m_2}} + \sum_{m_3} \frac{X_{i_1} \alpha_{m_3}}{\tau - \alpha_{m_3}} \Bigg] + \\ & + 2 \sum_{i_2} \frac{1}{\tau - \alpha_{i_2}} \Bigg[\frac{X_{i_2} \alpha_{i_2}}{\tau - \alpha_{i_2}} + 2 \sum_{m_2 > i_2} \frac{X_{i_2} \alpha_{m_2}}{\tau - \alpha_{m_2}} + \sum_{m_3} \frac{X_{i_2} \alpha_{m_3}}{\tau - \alpha_{m_3}} \Bigg] + \\ & + \sum_{m_3 > i_3} \frac{1}{\tau - \alpha_{i_3}} \frac{1}{\tau - \alpha_{m_3}} X_{i_3} \alpha_{m_3} \Bigg\}. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

$$\sum (-1)^{i} \gamma_{\ldots}\, z_i = (-1)^{\ldots} \prod_{i_1} (z_i - z_{i_1})^3 \prod_{i_2} (z_i - z_{i_2})^2 \prod_{i_3} (z_i - z_{i_3}) \,.$$

$$\left\{ \sum_{i_1} \frac{X_{i_1}^{2}\, z_{i_1}}{(z_i - z_{i_1})^{3}} + \cdots\cdots + \right.$$

$$+ 3 \sum_{i_1} \frac{X_{i_1} z_{i_1}}{(z_i - z_{i_1})^{2}} \left[3 \sum_{m_1 < i_1} \frac{X_{m_1} z_{i_1}}{z_i - z_{m_1}} + 3 \sum_{i_1 < m_1} \frac{X_{i_1} z_{m_1}}{z_i - z_{m_1}} + \right. \qquad (68)$$

$$\left. \left. + 2 \sum_{m_2} \frac{X_{i_1} z_{m_2}}{z_i - z_{m_2}} + \sum_{m_3} \frac{X_{i_1} z_{m_3}}{z_i - z_{m_3}} \right] + \cdots\cdots \right\} \text{(*)}.$$

In quest'ultima formula abbiamo scritto quei soli termini che contengono a divisore un'espressione della forma $(z_i - z_{i_1})^2$: i termini tralasciati saranno quindi tali che quando si pone $z_i = z_{i_1}$ si annullano tutti.

Da (66) abbiamo che (65) prende la forma:

$$\left.\begin{aligned} & X_1^3 X_2^3 \ldots X_{\nu_1}^3 X_{\nu_1+1}^2 \ldots X_{\nu_2}^2 X_{\nu_2+1} \ldots X_{n-\nu_2-\nu_1} z + \\ & \qquad + \sum_0^{n-1} (c_{i,m-i-1} - \gamma_{m-i-1})\, p_{m-i-1} + \\ & \qquad + \sum_0^{n-2} (c_{i,m-i-2} - \gamma_{m-i-2})\, p_{m-i-2} + \cdots + f(x\,y) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Dal primo corollario del n. 12 (pag. 187) segue che, affinchè in questa equazione i termini di ordine $n - 1$ si possano esprimere come combinazioni lineari di operazioni $R^{(n-1)}$ dedotte da $X_1^3 \ldots X_{\nu_1}^3 X_{\nu_1+1}^2 \ldots X_{\nu_2}^2 X_{\nu_2+1} \ldots X_{n-\nu_2-\nu_1}$, occorre e basta che sia:

$$\left.\begin{aligned} & \sum (-1)^i (c_{i,m-i-1} - \gamma_{m-i-1})\, z_{i_1}^i = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i_1 = 1 \ldots \nu_1) \\ & \sum (-1)^i\, i\, (c_{i,m-i-1} - \gamma_{m-i-1})\, z_{i_1}^{i-1} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

$$\sum (-1)^i (c_{i,m-i-1} - \gamma_{m-i-1})\, z_{i_2}^i = 0 \qquad (i_2 = \nu_1 + 1 \ldots \nu_2). \qquad (71)$$

Usando di (67) si trasformano immediatamente queste condizioni. Intanto come al n. 15 si vede che le (71) dicono solo che le caratteristiche doppie

---

(*) Abbiamo posto le funzioni precedenti, sotto forma di quozienti per brevità di scrittura, però notiamo che i fattori che entrano a divisore si trovano tutti con esponente maggiore od uguale nel termine fuori della parentesi: e ben sovente occorrerà nei calcoli che seguono tenere conto dei valori degli esponenti che compaiono così nei varii termini piuttosto che dell'effettive espressioni (67) e (68).

sono del tipo B_2). Inoltre osservando che in ogni termine di (67) esiste un fattore almeno del tipo $\alpha - \alpha_{i_1}$ segue che la prima delle (70) diviene:

$$\sum (-1)^i c_{m-i}\, \alpha_{i_1}^i = 0$$

che per la (60) ci dice che per le caratteristiche triple deve aversi anzitutto:

$$B = 0. \tag{72}$$

Quanto alla seconda delle (70) si osserverà che:

$$\sum (-1)^i\, i\, \gamma_{m-i-1}\, \alpha_{i_1}^{i-1} = \left|\frac{d}{d\alpha} \sum (-1)^i \gamma_{m-i-1}\, \alpha^i\right|_{\alpha=\alpha_{i_1}}$$

è uguale alla somma dei termini di (67) i quali contengono il fattore $\alpha - \alpha_{i_1}$ alla prima potenza, divisi per $(\alpha - \alpha_{i_1})$:

$$\sum (-1)^i\, i\, \gamma_{m-i-1}\, \alpha_{i_1}^{i-1} = (-1)^{n-1}\, 3\, X_{i_1} \alpha_{i_1} \prod_{l_1 \neq i_1} (\alpha_{i_1} - \alpha_{l_1})^3 \prod_{l_2} (\alpha_{i_1} - \alpha_{l_2})^2 \prod (\alpha_{i_1} - \alpha_{l_3}) =$$

$$= -\frac{1}{2} X_{i_1} \alpha_{i_1} \left|\frac{d^2}{d\alpha^2} \sum (-1)^i \gamma_{m-i}\, \alpha^i\right|_{\alpha=\alpha_{i_1}}.$$

Onde ancora la seconda delle (70) non è altro, grazie alla prima delle (61), che la

$$E = 0. \tag{73}$$

Supposte soddisfatte queste condizioni il gruppo dei termini di ordine $n-1$ in (69) è equivalente ad una espressione della forma $\sum r R^{(n-1)}$, la somma essendo estesa alle diverse operazioni $R^{(n-1)}$ di ordine $n-1$ dedotte da $X_1^3 \dots X_{r_1}^3 X_{r_1+1}^2 \dots X_{r_2}^2 X_{r_2+1} \dots X_{n-r_2-r_1}$, ed r indicando convenienti coefficienti: posto dunque:

$$\sum r R^{(n-1)} = \sum_0^{n-1} (c_{m-i-1} - \gamma_{m-i-1}) \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^i \partial y^{n-i-1}} + \sum_0^{n-2} \delta_{m-i-2} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^i \partial y^{n-i-2}} + \cdots \tag{74}$$

i termini tralasciati essendo di ordine $\leq n-3$ potremo dare a (65) o (69) la forma:

$$\left.\begin{aligned} & X_1^3 X_2^3 \dots X_{r_1}^3 X_{r_1+1}^2 \dots X_{r_2}^2 X_{r_2+1} \dots X_{n-r_2-r_1} z + \sum r R^{(n-1)} z + \\ & \quad + \sum_0^{n-2} (c_{m-i-2} - \gamma_{m-i-2} - \delta_{m-i-2})\, p_{i,n-i-2} + \cdots + f(x\, y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

E per il solito primo corollario del n. 21 condizione necessaria e sufficiente perchè (75) possa assumere la forma (40) è che si abbia:

$$\sum_0^{n-2} (-1)^i \left(c_{n-i-2} - \gamma_{n-i-2} - \delta_{n-i-2}\right) \alpha_{i_1}^i = 0. \qquad (i_1 = 1 \ldots \nu_1) \tag{76}$$

Senza procedere al calcolo effettivo delle δ_{n-i-2}, osserviamo che siccome una qualunque $R^{(n-1)}$ ammette come radici doppie tutte le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\nu_1}$, se poniamo:

$$R^{(n-1)} = \sum_0^{n-1} \rho_{n-i-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^i \, \partial y^{n-i-1}} + \sum_0^{n-2} \rho_{n-i-2} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^i \, \partial y^{n-i-2}} + \ldots$$

conforme al n. 15 (pag. 189) si avrà:

$$\sum_0^{n-2} (-1)^i \rho_{n-i-2} \, \alpha_{i_1}^i = -\frac{1}{2} X_{i_1} \alpha_{i_1} \left| \frac{d^2}{d\tau^2} \sum_0^{n-1} (-1)^i \rho_{n-i-1} \tau^i \right|_{\tau=\alpha_{i_1}}.$$

E quindi si avrà pure per (74):

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^{n-2} (-1)^i \delta_{n-i-2} \, \alpha_{i_1}^i &= -\frac{1}{2} X_{i_1} \alpha_{i_1} \left| \frac{d^2}{d\tau^2} \sum_0^{n-1} (-1)^i \left(c_{n-i-1} - \gamma_{n-i-1}\right) \tau^i \right|_{\tau=\alpha_{i_1}} = \\ &= -\frac{1}{2} X_{i_1} \alpha_{i_1} \sum_2^{n-1} (-1)^i \, i \, (i-1) \, c_{n-i-1} \, \alpha_{i_1}^{i-2} + \\ &\quad + \frac{1}{2} X_{i_1} \alpha_{i_1} \left| \frac{d^2}{d\tau^2} \sum_0^{i} (-1)^i \gamma_{n-i-1} \tau^i \right|_{\tau=\alpha_{i_1}}. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Ma si ha da (67):

$$\left.\begin{aligned} \left| \frac{d^2}{d\tau^2} \sum (-1)^i \gamma_{n-i-1} \tau^i \right|_{\tau=\alpha_{i_1}} &= (-1)^{n-1} 6 \prod_{l_1 \gtrless i_1} (\alpha_{i_1} - \alpha_{l_1})^3 \prod_l (\alpha_{i_1} - \alpha_l)^2 \prod_l (\alpha_{i_1} - \alpha_l) \,. \\ &\cdot \left\{ X_{i_1} \alpha_{i_1} \left| 3 \sum_{m_1 \gtrless i_1} \frac{1}{\alpha_{i_1} - \alpha_{m_1}} + 2 \sum_m \frac{1}{\alpha_{i_1} - \alpha_{m_2}} + \sum_m \frac{1}{\alpha_{i_1} - \alpha_m} \right| + \right. \\ &+ 3 \sum_{m_1 < i_1} X_{m_1} \alpha_{i_1} \frac{1}{\alpha_{i_1} - \alpha_{m_1}} + 3 \sum_{i_1 < m_1} X_{i_1} \alpha_{m_1} \frac{1}{\alpha_{i_1} - \alpha_{m_1}} + \\ &+ \left. 2 \sum_m X_{i_1} \alpha_m \frac{1}{\alpha_{i_1} - \alpha_m} + \sum_m X_{i_1} \alpha_m \frac{1}{\alpha_{i_1} - \alpha_m} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Per (77) e (78) e per (68) possiamo quindi scrivere la (76) nel modo seguente:

$$\left. \begin{aligned} &\sum_0^{n-2} i\,(-1)^i\, c_{i+2}\, z_{i_1}^i - \frac{1}{2} X_{i_1} z_{i_1} \sum_i^{n-2} (-1)^i\, i\,(i-1)\, c_{i+2}\, z_{i_1}^{i-2} \\ &+ (-1)^n\, 3 \prod_{l_1 = = i_1} (z_{i_1} - z_{l_1})^3 \prod_{l} (z_{i_1} - z_l) \prod_{l} (z_{i_1} - z_l) \cdot \Big\{ \frac{1}{3} X_{i_1}^2 z_{i_1} \\ &+ (X_{i_1} z_{i_1})^2 \left| 3 \sum_{m_1 = = i_1} \frac{1}{z_{i_1} - z_{m_1}} - 2 \sum_{m} \frac{1}{z_{i_1} - z_{m_2}} - \sum_{m} \frac{1}{z_{i_1} - z_m} \right| \Big\} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{79}$$

Ed oramai basta rammentare che $z_1 \ldots z_{r_1}$ sono radici triple, $z_{r_1+1} \ldots z_r$ sono radici doppie, $z_{r+1} \ldots z_{n-r_1-r}$ sono radici semplici di $\sum (-1)^i P_{m,i}\, \tau^i = 0$ dove $P_{mm} = 1$ per dedurre che:

$$\prod_{l_1 = = i_1} (z_{i_1} - z_{l_1})^3 \prod_{l_2} (z_{i_1} - z_{l_2})^2 \prod_{l} (z_{i_1} - z_l) = \frac{1}{6} (-1)^m \left| \frac{d^3}{d\tau^3} \sum (-1)^i P_{m,i}\, \tau^i \right|_{\tau = z_{i_1}},$$

$$\prod_{l_1 = = i_1} (z_{i_1} - z_{l_1})^3 \prod_{l_2} (z_{i_1} - z_l)^2 \prod_{l} (z_{i_1} - z_l) \cdot$$

$$\cdot \left| 3 \sum_{m_1 = = i_1} \frac{1}{z_{i_1} - z_{m_1}} + 2 \sum_{m} \frac{1}{z_{i_1} - z_{m_2}} + 3 \sum_{m} \frac{1}{z_{i_1} - z_m} \right|$$

$$= \frac{1}{24} (-1)^m \left| \frac{d^4}{d\tau^4} \sum (-1)^i P_{m,i}\, \tau^i \right|_{\tau = z_{i_1}}$$

e con ciò mostrare che l'equazione (79) equivale all'altra:

$$H = 0. \tag{80}$$

Le (72), (73) e (80) ci danno evidentemente il teorema da noi enunciato nel n. 19.

Estratto dagli *Annali di Matematica*
Tomo XVI della Serie III, pag. 161 e seguenti.

Milano, 1909 — Tipo-Lit. Rebeschini di Turati e C.

MILANO — TIPO-LIT. REBESCHINI DI TURATI E C.

E. E. LEVI

I PROBLEMI

DEI VALORI AL CONTORNO

PER LE

EQUAZIONI LINEARI TOTALMENTE ELLITTICHE

ALLE DERIVATE PARZIALI

E. E. LEVI

I PROBLEMI

DEI VALORI AL CONTORNO

PER LE

EQUAZIONI LINEARI TOTALMENTE ELLITTICHE

ALLE DERIVATE PARZIALI

I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali

del Dott. Eugenio Elia Levi

Capitolo I.

Concetto generale del metodo e prime applicazioni

§.1 – Introduzione.

1.– Sia data un'equazione lineare totalmente ellittica alle derivate parziali di ordine $2n$. Il problema fondamentale tipico per la teoria di tali equazioni consiste nel determinare una soluzione finita e continua insieme colle sue derivate dei primi $2n$ ordini all'interno di un campo chiuso C, quando si assegnino i valori che la funzione e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini debbono assumere sul contorno γ (curva, superficie, od ipersuperficie) del campo medesimo. E i classici studii sull'equazione $\Delta_2 u = 0$, e i più recenti sulle equazioni più generali:

$$\Delta_2 u + \sum_1^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu + c = 0$$

$$\Delta_4 u = 0 \qquad , \qquad \Delta_{2n} u = 0$$

hanno mostrato che in generale esiste una ed una sola soluzione del problema proposto. Più precisamente risulta da essi che il teorema di esistenza è vero, tosto che è dimostrato il teorema di unicità, ed inversamente che è vero il teorema di unicità tosto che è dimostrato il teorema di esistenza; ed inoltre che dato un campo, ed una equazione, si può sempre - ed in infiniti modi - nell'equazione medesima introdurre un parametro per modo che i teoremi di unicità e di esistenza pel campo dato siano veri per qualunque valore del parametro fatta eccezione per certi valori isolati. Diremo brevemente che i teoremi di esistenza e di unicità valgono generalmente; e vengono sempre a mancare insieme.

In questo lavoro io mi propongo di stabilire questo risultato nel caso delle equazioni lineari in due variabili: ma il metodo che svolgo è assai generale e si presta anche agevolmente a studiare problemi analoghi in cui si muti la natura dei dati al contorno oppure si sostituisca alla considerazione di una sola equazione quella di un sistema. Ulteriori applicazioni di esso io spero di poter dare prossimamente.

Cercherò in questo primo paragrafo di esporre brevemente l'idea fondamentale.

2. - Sia

$$\mathcal{E}u = 0 \tag{1}$$

l'equazione assegnata di ordine $2n$. Conviene sovente nel seguito separare nel primo membro di questa equazione i termini contenenti le derivate di ordine massimo ed il termine noto: scriveremo allora l'equazione (1) anche nel modo seguente.

$$\mathcal{E}u \equiv \mathcal{M}u + \mathcal{N}u + f = 0 \tag{2}$$

Notiamo subito che si può sempre supporre che i valori assegnati su γ per u e per le sue derivate di ordine $\leq n-1$ siano lo zero: basterà invero ove ciò non fosse considerare una funzione u_1 finita e continua colle sue derivate di ordine $\leq 2n$ entro C, la quale prende insieme ed le sue derivate di ordine $\leq n-1$ i valori assegnati su γ; la funzione $u-u_1$ dovrà soddisfare ad una equazione affatto analoga a (2) dove sia cambiato il termine noto, e dovrà annullarsi su γ insieme colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ [1]

Ciò posto, supponiamo, come dicemmo, per fissare le idee, che l'equazione proposta sia in due variabili. Ammettiamo che si possa trovare una funzione $\psi(xy;x_1y_1)$ di due punti (xy) e (x_1y_1) del campo C (il contorno γ incluso) tale che:

1°- la funzione ψ sia finita e continua insieme colle sue derivate dei primi $2n$ ordini in tutti i punti $(xy)\not\equiv(x_1y_1)$;

2°- nei punti $(xy)\equiv(x_1y_1)$ le derivate di ordine $< 2n-2$ siano finite, ma le derivate di ordine $2n-2$, $2n-1$ divengano infinite rispettivamente come $\log r(xy;x_1y_1)$, $\dfrac{1}{r(xy;x_1y_1)}$, $\dfrac{1}{r^2(xy;x_1y_1)}$ [2], o come diremo più brevemente abbiano una singolarità logaritmica, di primo o di secondo ordine. Però la funzione $\mathfrak{M}\psi(xy;x_1y_1)$ abbia una singolarità di ordine <2.

---

(1) Maggiore precisione sulle ipotesi che conviene perciò fare sul contorno γ, sulle funzioni assegnate su esso, perchè si possa costruire la funzione u_1 sarà data più oltre, e risulta dagli studii esposti nell'appendice (§ I) di questo lavoro

(2) $r(xy;x_1y_1)=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$

3° - se una funzione $\varphi(x_1y_1)$ finita e continua insieme colle sue derivate prime; la funzione:

(3) $$u(xy)=\iint_C \gamma(xy;x_1y_1)\varphi(x_1y_1)dx_1dy_1$$

ammetta le derivate dei primi $2n$ ordini e sia tale che:

(4) $$\mathfrak{C}u=\varphi(xy)+\iint_C X(xy,x_1y_1)\varphi(x_1y_1)dx_1dy_1+f(xy)$$

essendo $X(xy;x_1y_1)$ una funzione finita e continua tolto che nei punti in cui $(xy)\equiv(x_1y_1)$ in cui essa diviene infinita di ordine <2.

In queste proprietà che postuliamo per la $\gamma(xy;x_1y_1)$ si riconoscono le proprietà essenziali della soluzione fondamentale di un'equazione totalmente ellittica alquanto attenuate: io ho mostrato altrove(1), e del resto ci occorrerà nel seguito di ritornare di nuovo su di ciò, che una tale funzione si costruisce facilmente quando si conosca la soluzione fondamentale per l'equazione omogenea a coefficienti costanti.

Se ora nella (3) in luogo della funzione $\gamma(xy;x_1y_1)$ si pone una funzione:

(5) $$\Psi(xy;x_1y_1)=\gamma(xy,x_1y_1)+g(xy;x_1y_1)$$

dove $g(xy;x_1y_1)$ rappresenta una funzione finita e continua di (xy) ed (x_1y_1) insieme colle sue derivate dei primi $2n$ ordini, e si considera la funzione:

(6) $$u(xy)=\iint_C \Psi(xy;x_1y_1)\varphi(x_1y_1)dx_1dy_1$$

è chiaro che sarà una formula analoga alla (4):

(7) $$\mathfrak{C}u=\varphi(xy)+\iint_C X_1(xy;x_1y_1)\varphi(x_1y_1)dx_1dy_1+f(xy)$$

---

(1) E. E. Levi - Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XXIV. anno 1907.

$$(7) \qquad X_1(xy;x_1y_1) = X(xy;x_1y_1) + \mathcal{C}\,g(xy;x_1y_1)$$

È allora naturale pensare di usufruire dell'arbitrarietà della funzione $g(xy;x_1y_1)$ per modo di ridurre mediante la (7) la risoluzione del nostro problema ad una equazione integrale. Si prenda invero per $g(xy;x_1y_1)$ una funzione tale che per (x_1y_1) interno a C ed (xy) su γ si riduca a $-\psi(xy;x_1y_1)$ e che parimenti le derivate di ordine $\leq n-1$ rapporto ad x ed y di $g(xy;x_1y_1)$ si riducano per (xy) su γ alle derivate di $\psi(xy;x_1y_1)$ cambiate di segno: la funzione $\Psi(xy;x_1y_1)$ sarà allora nulla per (xy) su γ insieme colle sue derivate rapporto ad x, y di ordine $\leq n-1$; e lo stesso varrà per la funzione $u(xy)$ data da (6); onde per risolvere il nostro problema si dovrà chiedere ancora solo che la $u(xy)$ data da (6) soddisfi a (2) e cioè che la funzione $\varphi(x_1y_1)$, che fin qui è pienamente indeterminata soddisfaccia all'equazione integrale di Fredholm:

$$(8) \qquad \varphi(xy) + \iint_C X_1(xy;x_1y_1)\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 + f(xy) = 0$$

Simile idea quando per $\psi(xy;x_1y_1)$ si assuma $\log. r$, per $g(xy;\xi\eta)$ si prenda la funzione di Green fu applicata già dallo Hilbert e dal Picard (1) nello studio dell'equazione:

---

(1) *D. Hilbert.* - Grundzüge einer allgemeinen Theorie etc. zweite Mittheilung. Göttinger Nachrichten 1904, pag. 213 e ss.

E. Picard. - Sur la solution du problème généralisé de Dirichlet etc. Annales de l'École Normale Sup. 1906. tomo XXIII (pagine 509-516) e C. R. (25 Giugno 1906).

$$\Delta_2 u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = f(xy);$$

ed altri autori[1] cercarono già di avvalorarla per problemi più generali come quelli che qui mi propongo. Ma in tale indirizzo si presenta una difficoltà assai grave[2], la quale insieme con un'altra che sarà tosto richiamata, non pare sia stata notata da questi autori. E forse nel presentarsi di questa difficoltà sta la ragione per cui l'applicazione della teoria delle equazioni integrali alle equazioni ellittiche fu compiuta con successo fin qui piuttosto nell'indirizzo del metodo di Neumann - Fredholm[3] che nell'altro ora indicato.

---

(1) L. Orlando - Sull'integrazione della Δ_4 in un parallelepipedo rettangolo. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XXI (1906) (pag. 316-318). - T. Boggio. Risoluzione del problema dell'equilibrio di un corpo elastico per date tensioni superficiali. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1907 vol. XVI. 2° sem.

(2) Naturalmente tale difficoltà non colpisce minimamente i lavori dell'Hilbert e del Picard.

(4) Il lavoro fondamentale in quest'indirizzo è quello del Fredholm: Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet - (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps - Akademiens Förhand. 1900. N. 1 Stockholm). Vedi anche Plemelj. Randwerthaufgabe der Potentialtheorie. (Monatshefte für Mathematik und Physik XV Jahrg). Molte altre applicazioni ed anche modificazioni si debbono al Fredholm medesimo (Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité. Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik. Bd. 11. n. 28), al Lauricella (Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali... Nuovo Ci-

Invece è facile persuaderci che la funzione $g(xy; x_1y_1)$ di cui sopra si è richiesta l'esistenza e che per brevità chiameremo "funzione compensatrice„ si può costruire in modo che essa sia regolare in C e su γ fin quando $(x_1 y_1)$ è interno a C: infatti allora essa è soggetta alla sola condizione di assumere su γ insieme colle derivate dei primi $n-1$ ordini i valori di $-\varphi(xy; x_1y_1)$ e delle sue derivate e questi valori (almeno quando su C si facciano convenienti ipotesi che saranno tosto precisate) sono dati da funzioni finite e continue insieme colle derivate dei primi $2n$ ordini. Ma quando il punto $(x_1 y_1)$ tende a portarsi in un punto di γ, i valori delle derivate di φ di ordine $2n-2$, $2n-1$ e $2n$ crescono oltre ogni li-

---

mento. Serie 5ª Vol XVII 1907; Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_4 V = 0$. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei vol XVI - 2º sem 1907), il Marcolongo (La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla fisica matematica. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei vol XVI. Iº sem.), il Picard (Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M. Fredholm. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo tomo XXII (1906), Sur une formule relative au potentiel de simple couche etc. Annales de l'École Normale Sup. 1906 tomo XXIII) Sulle questioni che si presentano nell'applicare un tal metodo vedi Lauricella (Sulle equazioni integrali. Annali di Matematica. Tomo XV. Serie III). A questo metodo si possono avvicinare per quanto essi siano molto originali anche le considerazioni di A. Haar: Die Randwertaufgabe der Differentialgleichungen $\Delta_4 u = 0$ Göttinger Nachrichten 1907. Io l'ho applicato ai problemi dei valori al contorno per le equazioni paraboliche (E. E. Levi - Sull'equazione del calore. Annali di Matematica tomo XIV. Serie III. Sul problema di Fourier. Atti dell'Accademia di Torino 1908).

nate e precisamente quelle di ordine $2n$ crescono di secondo ordine rapporto all'inversa della distanza di $(x_1 y_1)$ da γ: onde lo stesso avverrà delle derivate di $g(xy; x_1 y_1)$ od almeno di alcune di esse, - di quelle che sono derivate tangenziali di una derivata di ordine $n-1$ -: cosicchè in generale la funzione $\mathcal{C}g(xy; x_1 y_1)$ che per (7) compare nella funzione caratteristica dell'equazione (8) avrà nei punti di γ una singolarità di secondo ordine, e quindi non si può applicare all'equazione (8) la teoria delle equazioni integrali.[1]

Noi possiamo quindi porci il problema della ricerca della funzione compensatrice nel modo seguente: trovare una funzione $g(xy; x_1 y_1)$ tale che: 1º quando (xy) viene su γ essa e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini prendano i valori della funzione $-\varphi(xy; x_1 y_1)$ e delle derivate di questa dei primi $n-1$ ordini; 2º sia regolare all'interno del campo e tale di più che la funzione $\mathcal{C}g(xy; x_1 y_1)$ o più semplicemente la $\mathcal{M}g(xy; x_1 y_1)$ resti finita od al più diventi infinita di ordine <2 anche quando $(x_1 y_1)$ tende a portarsi su γ.

Si riconosce così come il problema di cercare una funzione compensatrice molto si approssimi al problema primitivo od a quello equivalente della ricerca della funzione di Green: nei due problemi sono le stesse le condizioni al contorno, ed in entrambi è assegnato il comportamento del-

---

[1] È chiara l'importanza di questa difficoltà: se non si tiene conto di essa, non si vede perchè alla $g(xy; x_1 y_1)$ non si possa imporre di soddisfare anche alla condizione che le sue derivate di ordine $n+1, n+2, \dots 2n$ al contorno prendano i valori di quelli delle derivate omonime della funzione $-\varphi(xy; x_1 y_1)$.

la funzione rispetto all'equazione (2): possiamo dire che nel problema primitivo l'equazione (2) deve esser soddisfatta, in questo essa deve essere soddisfatta per quanto riguarda soltanto i termini di massima singolarità. Però è chiaro per quale ragione l'introdurre la funzione compensatrice semplifichi il problema: esso lo spezza in due gradi: nel primo e cioè nella costruzione di tale funzione si soddisfa alle condizioni al contorno e solo approssimatamente all'equazione proposta; nel secondo e cioè nello studio dell'equazione (8) si opera in modo di soddisfare esattamente all'equazione.

In questo secondo punto, e cioè nello studio dell'equazione integrale cui si riduce il problema, nel determinare quando si può assicurare che essa non ha determinante nullo, sta la seconda difficoltà cui si è accennato più sopra.[1]

3.- Per spiegare ulteriormente come io proceda allo studio di queste due questioni, io tratterò nei § seguenti con questo metodo i classici problemi relativi dell'equazione $\Delta_2 u = 0$ prima di affrontare il caso generale: esso risulta allora particolarmente limpido grazie all'ampia teoria già nota dei potenziali di strato e di doppio strato che dovrò ricostruire in parte per le equazioni più genera-

---

[1] La stessa difficoltà costituisce il massimo impedimento nell'estendere il metodo di Neumann - Fredholm. Cfr. Lauricella, Sulle equazioni integrali, Annali di Matematica Vol. XV Serie III. pag. 39-40. Quali siano i vantaggi che relativamente ad essa presenta il metodo che qui propongo ho spiegato più oltre nel n. 7 (§ II)

li tratterò di queste nel Capitolo II.

Ho rimandato all'appendice alcuni teoremi ausiliarii che mi sono necessarii nel corso del lavoro.

Avvertirò ancora che non ho cercato in quanto segue di ottenere la massima economia nelle ipotesi relative alla forma del contorno ed alle condizioni di derivabilità delle funzioni che compaiono nei dati: e cioè sia nei valori al contorno, sia nei coefficienti dell'equazione: poichè ciò mi avrebbe condotto a calcoli e discussioni minute, distraendomi dal preciso argomento del presente lavoro.

§.II. - Problema di Dirichlet.

4. - Supponiamo che la curva γ contorno del campo sia determinata col dare le coordinate xy in funzione dell'arco s:

$$x = x(s) \qquad\qquad y = y(s)$$

e supponiamo che le funzioni $x(s)$, $y(s)$ ammettano le derivate finite e continue dei primi quattro ordini. Indicherò a volte l'arco di γ anche con $s_1, \sigma, \dots$ e precisamente con $x_1(s_1)$, $y_1(s_1)$; $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$; ... le coordinate del punto corrente sulla curva. Se $f_1(xy)$, $f_2(x_1y_1)$, $f_3(\xi\eta)$, ... sono funzioni dei punti (xy), (x_1y_1), $(\xi\eta)$, ..., indicherò con $f_1(s)$, $f_2(s_1)$, $f_3(\sigma)$... le funzioni di $s, s_1, \dots$ cui esse si riducono quando (xy), (x_1y_1), $(\xi\eta)$ ... divengono punti di γ.

Il problema di Dirichlet consiste nel trovare una funzione soddisfacente all'equazione $\Delta_2 u = 0$ che su γ si riduca ad una funzione assegnata $l(s)$. Se noi supponiamo che $l(s)$ ammetta le derivate dei primi due ordini finite e continue, si potrà in virtù delle ipotesi fatte sopra γ costruire una funzione $u_1(xy)$ la quale su γ si riduca a $l(s)$ e nel campo C (il contorno al più escluso) abbia anche le derivate terze (vedi Appendice. §I). È allora legittima la trasformazione del problema enunciata nel §.I (n.2): noi possiamo limitarci a cercare una funzione $u(xy)$ nulla su γ che soddisfaccia all'interno di C all'equazione:

$$\Delta_2 u = f(xy), \tag{1}$$

$f(xy)$ essendo una funzione finita e continua che all'interno di C ammette anche le derivate del primo ordine finite e continue.

Come funzione $\varphi(xy; x_1y_1)$ si deve assumere qui la funzione $\log r(xy; x_1y_1)$.

5. – Procediamo alla costruzione della funzione compensatrice. Si ponga:

$$(2)\qquad e(xy;x_1y_1) = \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(xy;\sigma)}{\partial n_\sigma}\log r(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma.$$

$e(xy;x_1y_1)$ è una soluzione dell'equazione $\Delta_2 e = 0$: inoltre essa è funzione finita e continua insieme colle sue derivate dei varii ordini almeno finchè dei due punti (xy) ed (x_1y_1) l'uno almeno è interno a C. Quando il punto (xy) tende ad un punto (s) del contorno, si avrà:

$$(3)\quad e(s;x_1y_1) = \lim_{(xy)\equiv(s)} e(xy;x_1y_1) = -\log r(s;x_1y_1) + \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma}\log r(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma$$

$$= -\log r(s;x_1y_1) - e_1(s;x_1y_1)$$

Ammettiamo per maggiore semplicità che $x(s)$ ed $y(s)$ abbiano le derivate dei primi 5 ordini finite e continue; ci ridurremo più tardi con un piccolo artificio alle condizioni ammesse per γ nel n. 4. È allora agevole vedere che $e_1(s;x_1y_1)$ ha tutte le derivate che contengono due derivazioni al più rapporto ad s, una al più rapporto ad $x_1 y_1$, finite e continue, anche quando $x_1 y_1$ va su γ. Infatti si osservi che, se si pone:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x(s) - \xi(\sigma) &= \xi'(\sigma)(s-\sigma) + \tfrac{1}{2}\xi_2(s;\sigma)(s-\sigma)^2 \\ y(s) - \eta(\sigma) &= \eta'(\sigma)(s-\sigma) + \tfrac{1}{2}\eta_2(s;\sigma)(s-\sigma)^2, \end{aligned}$$

le funzioni $\xi_2(s;\sigma)$, $\eta_2(s;\sigma)$ ammettono le derivate dei primi 3 ordini finite e continue (Appendice §II). D'altra parte si ha ancora, ricordando che $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma} &= \frac{-[x-\xi]\eta' + [y-\eta]\xi'}{r^2(s;\sigma)} = \\ &= \frac{\eta_2\xi' - \xi_2\eta'}{2 + (s-\sigma)(\xi_2\xi' + \eta_2\eta') + \frac{1}{2}(s-\sigma)^2(\xi_2^2 + \eta_2^2)} \end{aligned};$$

onde segue che anche questa funzione ammette le derivate dei primi 3 ordini finite e continue. Per modo che le funzioni:

$$(6)\quad \begin{cases} e_1(s;x_1y_1) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{\partial \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma} \log r(\sigma; x_1y_1)\, d\sigma \\ \dfrac{\partial e_1(s;x_1y_1)}{\partial s} = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{\partial^2 \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma \partial s} \log r(\sigma; x_1y_1)\, d\sigma \\ \dfrac{\partial^2 e_1(s;x_1y_1)}{\partial s^2} = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{\partial^3 \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma \partial s^2} \log r(\sigma; x_1y_1)\, d\sigma \end{cases}$$

saranno potenziali di semplice strato la cui densità è funzione continua e derivabile dell'arco, onde a loro volta ammetteranno le derivate del primo ordine rapporto x_1y_1 finite e continue in tutto c il contorno γ incluso.

Evidentemente poi all'interno di c esistono ancora tutte le derivate di ordine superiore di queste funzioni (6) rapporto ad (x_1y_1).[1]

È allora possibile costruire in c una funzione $e_1(xy;x_1y_1)$ la quale su γ si riduca alla funzione $e_1(s;x_1y_1)$ ed abbia tutte le derivate le quali non contengono più di due derivazioni rapporto ad xy, e di una rapporto ad x_1y_1 finite e continue in c e su γ ed all'interno di c sia ancora derivabile una volta sia rapporto ad xy, che rapporto ad x_1y_1 (vedi Appendice §1.)

In particolare posto:

$$(7)\qquad \Delta_2 e_1(xy;x_1y_1) = h(xy;x_1y_1)$$

la funzione $h(xy;x_1y_1)$ è finita e continua ed ammette le derivate finite e continue del primo ordine rapporto ad x_1y_1 in c e su γ: ed all'interno di c le derivate prime rapporto ad xy e le seconde rapporto ad x_1y_1

Si ponga allora:

$$(8)\qquad g(xy;x_1y_1) = e(xy;x_1y_1) + e_1(xy;x_1y_1)$$

Essa può assumersi quale funzione compensatrice: per (3) infatti essa soddisfa alle condizioni assegnate su γ: e d'altra parte, sarà per (7):

[1] Nel seguito quando si dirà nell'interno di c o entro c s'intenderà sempre come escluso il contorno γ.

(9) $$\Delta_2 g(xy;x_1y_1) = h(xy;x_1y_1).$$

Onde detta $\varphi(x_1y_1)$ una funzione che entro c ammetta le derivate prime finite e continue, la funzione:

(10) $$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\iint_c \left\{ \log r(xy;x_1y_1) + g(xy;x_1y_1)\right\} \varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1$$

sarà nulla su γ, ammetterà le derivate prime e seconde entro c e sarà tale che:

(11) $$\Delta_2 u(xy) = \varphi(xy) + \frac{1}{2\pi}\iint_c h(xy;x_1y_1)\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1.$$

6.— Affinchè $u(xy)$ data da (10) sia dunque soluzione di (1) occorrerà che la funzione $\varphi(xy)$ ammetta entro c le derivate prime e sia soluzione dell'equazione integrale:

(12) $$\varphi(xy) + \frac{1}{2\pi}\iint_c h(xy;x_1y_1)\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = f(xy).$$

L'equazione integrale (12) può avere determinante nullo oppure no. Se ha determinante non nullo essa ammetterà sempre soluzione: dal fatto che all'interno di c sia la $f(xy)$ che la $h(xy;x_1y_1)$ ammettono derivate prime, segue che lo stesso avverrà per $\varphi(xy)$; onde la funzione rappresentata da (10) risolverà il problema proposto.

Ma può benissimo accadere che il determinante di (12) sia nullo, ed allora esisteranno n funzioni eccezionali in (x_1y_1) linearmente indipendenti $\pi_1(x_1y_1), \pi_2(x_1y_1) \dots \pi_n(x_1y_1)$, ed n funzioni eccezionali in (xy) $\rho_1(xy), \rho_2(xy) \dots \rho_n(xy)$: le prime saranno soluzioni dell'equazione:

$$\pi(x_1y_1) + \iint_c h(xy;x_1y_1)\pi(xy)\,dx\,dy = 0,$$

le altre dell'equazione:

$$\rho(xy) + \iint_c h(xy;x_1y_1)\rho(x_1y_1)\,dx_1dy_1 = 0$$

E quindi come $h(xy;x_1y_1)$ ammette nell'interno di c le derivate seconde rispetto x_1y_1 e in c e su γ le derivate prime, evidentemente anche le $\pi_i(x_1y_1)$ ammetteranno tali derivate.

Ciò posto osserviamo che si può alterare la funzione $g(xy;x_1y_1)$ per una funzione qualunque finita e continua colle sue derivate dei primi 3 ordini nulla quando (xy) è su γ, senza che le proprietà che avevamo richieste per la funzione compensatrice vengano a mancare.

In particolare se con $v_1(xy), v_2(xy), \dots v_m(xy)$ indichiamo m funzioni nulle per (xy) su γ, finite e continue colle loro derivate dei primi tre ordini, alla $g(xy;x_1y_1)$ possiamo sostituire la:

$$g(xy;x_1y_1)+\sum_1^m{}_i\, v_i(xy)\rho_i(x_1y_1)$$

E la funzione:

$$(13)\qquad u(xy)=\frac{1}{2\pi}\iint_C\left\{\log r(xy;x_1y_1)+g(xy;x_1y_1)+\sum_1^m{}_i\, v_i(xy)\rho_i(x_1y_1)\right\}\cdot \varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1$$

sarà ancora nulla su γ, e perchè essa soddisfaccia ad (1) occorre e basta che $\varphi(xy)$ sia soluzione dell'equazione:

$$(14)\quad \varphi(xy)+\frac{1}{2\pi}\iint_C\left\{h(xy;x_1y_1)+\sum_1^m{}_i\, \rho_i(x_1y_1)\Delta_2 v_i(xy)\right\}\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1=f(xy)$$

Ora noi sappiamo[1] che la nuova equazione integrale (14) avrà determinante diverso da zero se, posto:

$$(15)\quad \begin{cases} \mathcal{K}_{ij}=\displaystyle\iint_C \pi_i(xy)\,\Delta_2 v_j(xy)\,dx\,dy \\[2ex] k_{ij}=\displaystyle\iint_C \rho_i(xy)\,\rho_j(xy)\,dx\,dy. \end{cases}$$

i determinanti $|\mathcal{K}_{ij}|, |k_{ij}|$ sono diversi da zero. Ora intanto è $|k_{ij}|$ certamente diverso da zero poichè le $\rho_i(xy)$ sono linearmente indipendenti. Cosicchè per mostrare che la (14) ammette sempre soluzioni basta mostrare che si possono sempre prendere le funzioni $v_1, v_2, \dots v_m$ finora sottoposte alla sola condizione di annullarsi su γ, in modo che il deter-

---

[1] Cfr. E. Schmidt – Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. 2° Abh. §. 6 Mathematische Annalen. Bd. LXIII (1907)

minimente $|\mathcal{X}_{ij}|$ sia diverso da zero.

Ora è facile provare fondandosi sul noto teorema di unicità per il problema che stiamo studiando che così è veramente. Basterà mostrare perciò che presa una qualunque combinazione lineare $\pi(xy)$ delle $\pi_1(xy), \pi_2(xy), \dots \pi_m(xy)$ si può sempre determinare una $v(xy)$ nulla su $\jmath$. tale che:

$$\mathcal{X} = \iint_c \Delta_2\, v(xy)\cdot\pi(xy)\,dx\,dy \neq 0 \text{ [1]}$$

per una nota formula si ha ricordando che deve essere $v(s)=0$:

$$(16)\quad \mathcal{X} = \iint_c \Delta_2 v(xy)\cdot\pi(xy)\,dx\,dy = \iint_c v(xy)\cdot\Delta_2\pi(xy)\,dx\,dy - \int_{\jmath} \frac{\partial v(s)}{\partial n_s}\pi(s)\,ds.$$

Notiamo subito che può far venire il dubbio che l'integrale doppio che compare nel secondo termine non esista: poichè abbiamo visto più sopra la $\pi(xy)$ ha le derivate prime finite e continue anche su $\jmath$, ma le derivate seconde solo all'interno di c. Ma osserviamo che preso un qua-

---

[1] Infatti se è $|\mathcal{X}_{ij}|=0$ qualunque siano le $v_i(xy)$, chiamiamo μ la massima caratteristica di $|\mathcal{X}_{ij}|$. Supponiamo come è sempre possibile che $v_1\ v_2 \dots v_\mu$ siano state fissate per modo che la matrice delle $\mathcal{X}_{ij}$ con $j=1\dots\mu$ sia diversa da zero: esisteranno delle costanti $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m$ tali che si ha:

$$\alpha_1\mathcal{X}_{1i} + \alpha_2\mathcal{X}_{2i} + \dots + \alpha_m\mathcal{X}_{mi} = 0 \qquad (i = 1\dots\mu)$$

e l'ipotesi che $|\mathcal{X}_{ij}|$ sia necessariamente di caratteristica μ si può allora esprimere dicendo che qualunque funzione $v(xy)$ si prenda come $v_{\mu+1}(xy)$ sempre si ha:

$$\alpha_1\mathcal{X}_{1\mu+1} + \alpha_2\mathcal{X}_{2\mu+1} + \dots + \alpha_m\mathcal{X}_{m\mu+1} = 0$$

E cioè che posto $\pi(xy) = \alpha_1\pi_1(xy) + \alpha_2\pi_2(xy) + \dots + \alpha_m\pi_\mu(xy)$ si ha qualunque sia la funzione $v_{\mu+1}(xy)$ nulla su $\jmath$.

$$\mathcal{X} = \iint \pi(xy)\,\Delta_2 v_{\mu+1}(xy)\,dx\,dy = \alpha_1\mathcal{X}_{1\mu+1} + \alpha_2\mathcal{X}_{2\mu+1} + \dots + \alpha_m\mathcal{X}_{m\mu+1} = 0$$

unque campo C_1 interno a C limitato da una curva γ_1 ad esso si può applicare certamente la formula detta sopra:

$$\iint_{C_1} \Delta_2 v(xy)\cdot\pi(xy)\,dx\,dy = \iint_{C_1} v(xy)\cdot\Delta_2\pi(xy)\,dx\,dy + \int_{\gamma_1}\left[v(s_1)\frac{\partial\pi(s_1)}{\partial n_{s_1}} - \frac{\partial v(s_1)}{\partial n_{s_1}}\pi(s_1)\right]ds_1$$

e che, per la continuità di π, delle sue derivate prime in C e su γ; quando C_1 tende a C, γ_1 a γ, l'integrale del primo membro tende a $\mathcal{X}$ e l'integrale curvilineo del secondo membro tende all'integrale curvilineo di (16); dedurremo che anche $\iint_{C_1} v(xy)\cdot\Delta_2\pi(xy)\,dx\,dy$ tende ad un limite, che esiste quindi $\iint_C v(xy)\,\Delta_2\pi(xy)\,dx\,dy$, e che vale la (16).

Ora perchè il secondo membro di (16) sia nullo qualunque sia la funzione $v(xy)$ la quale soddisfaccia alla sola condizione di essere nulla su γ, occorrerà che si abbia $\pi(s)=0$ su γ e $\Delta_2\pi(xy)=0$ in tutto C (1). Ma per

---

(1) Infatti ove in un punto (x_0y_0) di C fosse $\Delta_2\pi(xy)\neq 0$ ad es. >0 si potrebbe descrivere un cerchio $[R]$ di raggio R e centro (x_0y_0) interno a C e tale che in esso fosse sempre $\Delta_2\pi>0$. Determiniamo allora, come è sempre possibile, una funzione $v(xy)$ nulla fuori del cerchio $[R]$ positiva all'interno, finita e continua insieme alle sue derivate dei primi tre ordini. Tale è la funzione definita dal porre $v(xy)=\left[R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2\right]^4$ entro $[R]$, $V(xy)=0$ fuori di $[R]$. Per questa funzione si avrà che $\dfrac{\partial v(s)}{\partial n}$ è nulla su γ, onde sarà:

$$\mathcal{X} = \iint_{[R]} v(xy)\,\Delta_2\pi(xy)\,dx\,dy > 0$$

contro l'ipotesi. Segue che in ogni punto di C deve essere $\Delta_2\pi(xy)=0$

Analogamente osservando che la $\dfrac{\partial v(s)}{\partial n}$ è ancora totalmente arbitraria segue che perchè la $\mathcal{X}$ sia nulla deve pure essere $\pi(s)=0$

il teorema di unicità ciò non può essere se non è $\mathcal{K}(xy)=0$.

È quindi sempre possibile scegliere le $v(xy)$ in modo che (14) risulti risolubile.

7.- Giova a chiarire il metodo confrontarlo col metodo di *Neumann-Fredholm*.

Il problema proposto è evidentemente equivalente al problema di determinare l'ordinaria funzione di Green $\mathcal{G}(xy;x_1y_1)$. Ove volessimo fare tale determinazione col metodo di Neumann-Fredholm, noi la porremmo sotto la forma:

$$\mathcal{G}(xy;x_1y_1)=-\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(xy;\sigma)}{\partial n_\sigma}\rho(\sigma;xy)\,d\sigma \tag{17}$$

e la funzione $\rho(\sigma;x_1y_1)$ dovrebbe determinarsi mediante l'equazione:

$$\rho(s;x_1y_1)+\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma}\rho(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma+\log r(s;x_1y_1)=0 \tag{18}$$

Se poniamo $\rho(s;x_1y_1)=-\log r(s;x_1y_1)+\rho_1(s;x_1y_1)$ la funzione $\rho_1(s;x_1y_1)$ si dovrà determinare mediante l'equazione:

$$\rho_1(s;x_1y_1)-\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma}\rho_1(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma=-\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma}\rho_1(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma \tag{19}$$

e la funzione di Green diverrà:

$$\mathcal{G}(xy;x_1y_1)=e(xy;x_1y_1)-\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(xy;\sigma)}{\partial n_\sigma}\rho_1(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma. \tag{20}$$

Da (19) segue che $\rho_1(s;x_1y_1)$, se esiste, è regolare al contorno poichè tale è il suo secondo membro: onde la (20) ci dice che la funzione $e(xy;x_1y_1)$ che abbiamo usato nella costruzione della nostra funzione compensatrice non rappresenta altro che la parte della funzione di Green che è singolare al contorno.

Individuata così la parte singolare della funzione di Green, a completare la dimostrazione nel metodo di Neumann-Fredholm occorre dimostrare che l'equazione (18) ammette sempre soluzione, nel nostro metodo occorre dimostrare l'analogo per l'equazione (10) o la (14). E qui compare, se non erro, la maggiore semplicità del nostro metodo: chè, mentre nel metodo di N.-F. per dimostrare tale risolubilità occorre appoggiarsi ripetutamente sui varii teoremi di unicità per le soluzioni dell'equazione $\Delta_2 u = 0$ relativi sia al campo esterno che al campo interno, sia per il caso che al contorno sono assegnati i valori della funzione, sia pel caso in cui siano dati i valori della derivata normale, nel nostro tutti i ragionamenti si appoggiano al solo teorema di unicità corrispondente al teorema di esistenza che stiamo studiando.

8.- Nel numero 5 abbiamo ammesso che le funzioni $x(s)$, $y(s)$ che determinano il contorno σ avessero le derivate dei primi 5 ordini. Questo numero è troppo elevato. Possiamo facilmente ridurci ad ammettere che esistano solo le derivate dei primi 4 ordini: e certamente ulteriori studi ci permetterebbero di ridurre anche maggiormente queste condizioni.

In tal caso le $\xi_2(s;\sigma)$ $y_2(s;\sigma)$ di (4) hanno le derivate dei primi due ordini finite e continue anche in $s=\sigma$, mentre esistono pure le derivate di ordine >2 le quali contengono non più di 2 derivazioni rapporto a σ, non più di 4 rapporto ad s, ma non sono più finite e continue per $s=\sigma$. E quindi il medesimo avviene per la $\frac{\partial \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma}$, e quindi ancora la funzione $e_1(s; x_1 y_1)$ non ammetterebbe che le derivate del primo e secondo ordine rapporte ad s, e $x_1\,y_1$ finite e continue.

Per ovviare a questo inconveniente noi particolarizzeremo la costruzione della funzione $e_1(xy;x_1y_1)$; staccando per così dire ulteriori termini dalla funzione di Green. Poniamo:

$$(21)\qquad \begin{aligned} e^{(1)}(xy;x_1y_1) &= \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(xy;\sigma)}{\partial n_\sigma}\, e_1(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(xy;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,d\sigma \int_\gamma \frac{\partial \log r(\sigma;\sigma_1)}{\partial n_{\sigma_1}}\, e_1(\sigma_1;x_1y_1)\,d\sigma_1. \end{aligned}$$

Avremo:

$$(22)\qquad \begin{aligned} e^{(1)}(s;x_1y_1) &= e_1(s;x_1y_1) + \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(s;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,d\sigma \int_\gamma \frac{\partial \log r(\sigma;\sigma_1)}{\partial n_{\sigma_1}} \log r(\sigma_1;x_1y_1)\,d\sigma_1 = \\ &= e_1(s;x_1y_1) - e_1^{(1)}(s;x_1y_1). \end{aligned}$$

Ponendo quindi:

$$(23)\qquad \bar{e}(xy;x_1y_1) = e(xy;x_1y_1) + e^{(1)}(xy;x_1y_1),$$

la $\bar{e}(xy;x_1y_1)$ soddisferà ancora alla:

$$\Delta_2\,\bar{e}(xy;x_1y_1) = 0$$

e sarà tale che:

$$(24)\qquad \bar{e}(s;x_1y_1) = -\log r(s;x_1y_1) - e_1^{(1)}(s;x_1y_1).$$

Ma se poniamo:

$$(25)\qquad t(s;\sigma) = \int_\gamma \frac{\partial \log r(s;\sigma_1)}{\partial n_{\sigma_1}}\;\frac{\partial \log r(\sigma_1;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,d\sigma$$

si ha da (22)

$$(26)\qquad e_1^{(1)}(s;x_1y_1) = -\frac{1}{\pi}\int_\gamma t(s;\sigma)\log r(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma$$

D'altro canto la $t(s;\sigma)$ data da (25) avrà evidentemente le derivate dei primi quattro ordini e quelle non contenenti più di 2 derivazioni rispetto ad s nè più di 2 rispetto a σ finite e continue, poichè tali derivate ha l'integrando. Onde anche la funzione $e_1^{(1)}(s;x_1y_1)$ avrà le derivate che non contengono più di due derivazioni rispetto a (s) e rispetto ad (x_1y_1) finite e continue in c e su γ.

Onde noi potremo ora costruire una funzione $e_1^{(1)}(xy;x_1y_1)$ che prenda i valori di $e_1^{(1)}(s;x_1y_1)$ ed abbia le derivate che non contengano più di due derivazioni rapporto al punto (xy) o rapporto ad (x_1y_1) finite e continue in c e su γ.

E la funzione:

$$(27) \qquad g(xy;x_1y_1)=\bar{e}(xy;x_1y_1)+e_1^{(1)}(xy;x_1y_1)$$

potrà assumersi come funzione compensatrice e su essa ragionare come si fece nel n. precedente, poichè la:

$$(28) \qquad \Delta_2\, g(xy;x_1y_1)=\Delta_2\, e_1^{(1)}(xy;x_1y_1)=h^{(1)}(xy;x_1y_1)$$

ammette le derivate dei primi due ordini rapporto ad x_1y_1 finite e continue.

§ III. - Il problema derivato di Dirichlet.

9. — Prima di procedere allo studio dell'equazione generale è opportuno mostrare qui come si possa collo stesso metodo risolvere il problema derivato di Dirichlet. Esso consiste, come è ben noto, nel cercare una funzione armonica in c, la cui derivata normale si riduca su γ ad una funzione assegnata $l(s)$. Ed è noto che occorre perciò che si abbia:

$$(1) \qquad \int_\gamma l(s)\, ds=0$$

Mantenute le ipotesi fatte nel §. II per la curva γ, noi vedremo che il problema si traduce nell'altro di costruire in c una funzione $u(xy)$ la quale abbia la derivata normale nulla su γ e soddisfaccia all'equazione:

$$(2) \qquad \Delta_2 u=f(xy)$$

dove $f(xy)$ è una funzione che soddisfa all'equazione:

$$(3) \qquad \iint_c f(xy)\, dx\, dy=0 \ [1]$$

---

[1] Infatti è $f(xy)=\Delta_2 u_1$, dove u_1 è una funzione che su γ soddisfa alla $\frac{\partial u_1(s)}{\partial n_1}=-l(s)$; onde per l'identità $\iint_c \Delta_2 u_1\, dx\, dy=-\int_\gamma \frac{\partial u_1(s)}{\partial n_1} ds$, da (1) segue (3)

e che nell'intorno di c ammette derivate prime finite e continue.

È noto che una tale funzione, se esiste, è definita a meno di una costante.

Per costruire la funzione compensatrice porremo qui:

$$(4) \qquad e(xy; x_1 y_1) = \frac{1}{\pi}\int_{\gamma} \log r(xy;\sigma)\, \frac{\partial \log r(\sigma; x_1 y_1)}{\partial n_\sigma} d\sigma$$

È noto che una tale funzione soddisfa all'equazione:

$$(5) \qquad \Delta_2\, e = 0$$

ed è noto che:

$$\frac{\partial e(s; x_1 y_1)}{\partial n_s} = - \frac{\partial \log r(s; x_1 y_1)}{\partial n_s} + \frac{1}{\pi}\int_{\gamma} \frac{\partial \log r(s;\sigma)}{\partial n_s}\, \frac{\partial \log r(\sigma; x_1 y_1)}{\partial n_\sigma} d\sigma =$$
$$= - \frac{\partial \log r(s; x_1 y_1)}{\partial n_s} - e_1(s; x_1 y_1)$$

In modo affatto analogo a quanto si vide nel §. precedente, si vede subito che se $x(s)$ ed $y(s)$ ammettono le derivate dei primi 4 ordini, $e_1(s; x_1 y_1)$ ammette le derivate di primo o secondo ordine che contengano non più di una derivata rapporto ad (s) e non più di una rapporto ad $(x_1 y_1)$ finite e continue anche se $(x_1 y_1)$ è su γ: ed ammette le derivate di ordine superiore rapporto ad $x_1 y_1$ all'interno di c. Onde si può costruire una funzione $e_2(xy; x_1 y_1)$ tale che: 1º in c e su γ esistono le derivate le quali contengono al più due derivazioni rapporto ad x, y, una derivazione rapporto ad x_1, y_1: 2º entro c si può ancora derivare una volta sia rapporto ad xy, sia rapporto ad $x_1 y_1$; 3º su γ si ha:

$$\frac{\partial e_2(s; x_1 y_1)}{\partial n_s} = e_1(s; x_1 y_1)$$

(Cfr. Appendice § I.)

Posto quindi:

$$(7) \qquad \Delta_2\, e_2(xy; x_1 y_1) = h(xy; x_1 y_1)$$

la funzione h ammetterà in C e su J le derivate prime rapporto ad $(x_1 y_1)$, ed all'interno di C le derivate seconde rapporto ad $(x_1 y_1)$ e le derivate prime rapporto ad (xy). Onde posto:

(8) $$g(xy; x_1 y_1) = e(xy; x_1 y_1) + e_2(xy; x_1 y_1)$$

la g potrà assumersi quale funzione compensatrice: e la funzione:

(9) $$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\iint_C \left[\log r(xy; x_1 y_1) + g(xy; x_1 y_1)\right]\varphi(x_1 y_1)\, dx_1\, dy_1.$$

avrà su J la derivata normale nulla; e nei punti in cui $\varphi(xy)$ ammette le derivate prime finite e continue si avrà per esser:

(10) $$\Delta_2 u(xy) \equiv \varphi(xy) + \frac{1}{2\pi}\iint_C h(xy; x_1 y_1)\varphi(x_1 y_1)\, dx_1\, dy_1.$$

Onde affinchè (9) soddisfaccia a (3) occorrerà che si abbia:

(11) $$\varphi(xy) + \frac{1}{2\pi}\iint_C h(xy; x_1 y_1)\varphi(x_1 y_1)\, dx_1\, dy_1 = f(xy).$$

Questa equazione potrà essere risolubile oppure no: certo essa avrà determinante nullo, e precisamente fra le funzioni eccezionali in $(x_1 y_1)$ di essa deve essersi la $\pi(x_1 y_1) = 1$. Invero noi sappiamo che condizione necessaria e sufficiente perchè (11) abbia soluzione è che si abbia:

(12) $$\iint_C \pi(x_1 y_1) f(x_1 y_1)\, dx_1\, dy_1 = 0.$$

qualunque sia la funzione eccezionale $\pi(x_1 y_1)$. Ora poichè il problema proposto e quindi la (11) non può avere soluzione che quando sia soddisfatta la (3), la (3) deve essere una delle (12) e cioè 1 deve essere una funzione eccezionale in $(x_1 y_1)$ rispetto all'equazione (11). Si tratta di dimostrare che opportunamente alterando la $g(xy; x_1 y_1)$ si può giungere ad un'equazione integrale che abbia solo l'unità quale funzione eccezionale. Supponiamo perciò che $\pi_1(x_1 y_1), \pi_2(x_1 y_1), \ldots, \pi_{m-1}(x_1 y_1), \pi_m(x_1 y_1) = 1$ siano le m funzioni eccezionali in $(x_1 y_1)$ linearmente indipendenti, e che $\rho_1(xy), \rho_2(xy) \ldots \rho_{m-1}(xy), \rho_m(xy)$

siano le m funzioni eccezionali in (xy) linearmente indipendenti. Infine siano $v_1(xy), v_2(xy), \dots v_{m-1}(xy)$ $m-1$ funzioni aventi su γ la derivata normale nulla, ed in C e su γ le derivate dei primi tre ordini. La funzione:

$$(13)\quad u(xy) = \frac{1}{2\pi}\iint_C \Big[\log r(xy;x_1y_1) + g(xy;x_1y_1) + \sum_1^{m-1} v_i(xy)\rho_i(x_1y_1)\Big]\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1$$

è ancora come la (9) una funzione con derivata normale nulla sul contorno γ; e perchè essa soddisfaccia all'equazione (2) occorre che la funzione $\varphi(xy)$ abbia le derivate prime entro C e sia soluzione dell'equazione integrale:

$$(14)\quad \varphi(xy) + \frac{1}{2\pi}\iint_C \Big[h(xy;x_1y_1) + \sum_1^{m-1} \Delta_2 v_i(xy).\rho_i(x_1y_1)\Big]\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = f(xy).$$

Ora affinchè la nuova equazione (14) non ammetta che una sola funzione eccezionale in (x_1y_1), la quale nel nostro caso sarà data necessariamente da una costante, basterà provare che i determinanti formati colle quantità:

$$(15)\quad \begin{aligned} k_{ij} &= \iint_C \rho_i(xy)\,\rho_j(xy)\,dx\,dy \\ \mathcal{K}_{ij} &= \iint_C \Delta_2 v_i(xy)\,\pi_j(xy)\,dx\,dy \end{aligned} \qquad (i,j = 1,2,\dots m-1)$$

sono diversi da zero[1]. Dimostro: è chiaro che $|k_{ij}| \neq 0$: e per mostrare che lo stesso vale per $|\mathcal{K}_{ij}|$ purchè si scelgano convenientemente le $v_i(xy)$, basterà provare che non esiste alcuna combinazione lineare $\pi(xy)$ di $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{m-1}$ tale che qualunque sia la funzione $v(xy)$, la cui derivata normale è nulla su γ, si abbia sempre:

$$\mathcal{K} = \iint_C \Delta_2 v(xy).\pi(xy)\,dx\,dy = 0.$$

Infatti ragionando come nel § II si ha:

---

(1) Il teorema che qui applichiamo è una semplice generalizzazione di quello dello Schmidt citato a pag. 15. Per dati n-

(16) $$\iint_c \Delta_2 v(xy)\pi(xy) = \iint_c \Delta_2 \pi(xy) . v(xy)\, dx\, dy + \int_\gamma v(s) \frac{\partial \pi(s)}{\partial n_s} ds.$$

Ed il secondo membro di (16) non può essere sempre zero che quando sia $\Delta_2 \pi(xy)=0$ in tutto c, $\frac{\partial \pi}{\partial n}=0$ su γ. Ed allora $\pi(xy)$ dovrebbe essere una costante b e cioè sarebbe $\pi(xy) = b\pi_m(xy)$ il che contraddice all'ipotesi che $\pi_1, \pi_2, .. \pi_{n-1}, \pi_m = 1$ siano linearmente indipendenti.[1]

---

un'equazione integrale (che per semplicità scriviamo in una sola variabile:

(1) $$\varphi(s) + \int k(st)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

con determinante nullo: siano $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots \varphi_m(s)$ le sue funzioni eccezionali in s linearmente indipendenti, $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots \psi_m(t)$ le sue funzioni eccezionali in t linearmente indipendenti. Si consideri l'equazione integrale.

(2) $$\varphi(s) + \int\Big[K(st) + \sum_1^\mu p_i(s)\, q_i(t)\Big]\varphi(t)\,dt = f(s) \qquad (\mu \leq m)$$

Se le matrici formate colle quantità:

(3) $$k_{ij} = \int p_i(s)\,\psi_j(s)\,ds$$

(4) $$\mathcal{K}_{ij} = \int q_i(t)\,\varphi_j(t)\,dt \qquad (i=1,2,\dots\mu,\ j=1,2\dots m)$$

hanno caratteristica μ l'equazione (2) ha $n-\mu$ ed $n-\mu$ sole funzioni eccezionali linearmente indipendenti. Infatti una funzione eccezionale di (2) sarà soluzione dell'equazione:

(5) $$\varphi(s) + \int K(st)\varphi(t)\,dt = -\sum_1^\mu p_i(s)\int q_i(t)\,dt$$

Affinchè (5) che è un'equazione del tipo (1) abbia soluzione, occorre e basta che sia.

(6) $$0 = \int \psi_j(s) \sum_1^\mu p_i(s)\,ds . \int q_i(t)\varphi(t)\,dt = \sum_1^\mu k_{ij} \int q_i(t)\varphi(t)\,dt \qquad (j=1..m)$$

Ma poichè la matrice $\|k_{ij}\|$ ha caratteristica μ avremo necessariamente:

(7) $$\int q_i(t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \qquad (i=1..\mu)$$

e quindi per (5) $\varphi(s)$ sarà una combinazione lineare delle $\varphi_1(s)\varphi_2(s)\dots\varphi_m(s)$; precisamente saranno tutte e sole le combinazioni lineari soddisfacenti a (7). E per l'ipotesi che la matrice $\|\mathcal{K}_{ij}\|$ abbia caratteristica μ di tali combinazioni ne esistono μ e μ sole indipendenti.

Si può anzi evidentemente dire che se delle matrici $\|k_{ij}\|$, $\|\mathcal{K}_{ij}\|$ l'una almeno ha caratteristica μ e l'altra ha caratteristica $\mu_1 < \mu$, esistono $n-\mu_1$ funzioni eccezionali di (2) linearmente indipendenti.

[1] In modo analogo a quanto si fece al n. 8 si potrebbe fare in modo di richiedere solo l'esistenza delle derivate terze di $x(s)$ e $y(s)$.

Capitolo II.

Le equazioni totalmente ellittiche in due variabili indipendenti.

§. IV. - Ipotesi.

10. - Sia:

$$\mathcal{E}u \equiv \mathcal{M}u + \mathcal{N}u = f(xy)$$

$$(1) \qquad \mathcal{M}u \equiv \sum_{0}^{2n}{}_i\, a_{i,2n-i}(xy)\, \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^i \partial y^{2n-i}}$$

$$\mathcal{N}u \equiv \sum_{0 \leq i+k \leq 2n-1} b_{ik}(xy) \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} \qquad \left(\frac{\partial^0 u}{\partial x^0 \partial y^0} \equiv u\right)$$

l'equazione che ci proponiamo di studiare. Supporrò per fissare le idee $n > 1$.

Supponiamo che nel campo c, il contorno γ incluso i coefficienti $a_{i,2n-i}(xy)$ siano funzioni finite e continue di xy insieme colle loro derivate dei primi $2n+1$ ordini: mentre per i coefficienti $b_{ik}(xy)$ e per la funzione $f(xy)$ richiediamo soltanto che esse siano finite e continue in c e su γ e che all'interno di c ammettano le derivate del primo ordine finite e continue. Essendo per ipotesi la (1) totalmente ellittica, l'equazione

$$(2) \qquad \sum_{0}^{m}{}_i\, a_{i,2n-i}(xy)\alpha^i = 0$$

ammette in c solo radici complesse: supporremo che in tutto c queste radici siano di multiplicità costante; e, per fissare le idee tratteremo dapprima il caso delle radici semplici. Le indicheremo allora con $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}$, e converremo di ordinarle per modo che le due radici α_{2i-1} ed α_{2i} siano complesse coniugate, e la prima sia quella in cui il coefficiente dell'immaginario è > 0: porremo cioè

$$(3) \qquad \alpha_{2i-1}(xy) = p_i(xy) + i q_i(xy) \qquad \alpha_{2i}(xy) = p_i(xy) - i q_i(xy) \qquad q_i(xy) > 0$$

Le α, e parimenti le p, le q hanno, come le a_{i2ni}, le derivate dei primi $2n+1$ ordini finite e continue: per le ipotesi fatte esisteranno due numeri μ e M tali che:

$$(4) \qquad q_i(xy) > \mu \qquad\qquad |\alpha_j(xy)| < M.$$

Infine sarà $a_{2n,0} \neq 0$: potremo quindi supporre, e così faremo d'ora in poi, $a_{2n,0} = 1$.

11. – Per fissare le idee supporrò C semplicemente connesso e tutto al finito: sono ovvie le modificazioni che a qualche passo dei ragionamenti che seguono occorrerebbe portare nel caso contrario.

Quanto al contorno γ di C supporremo che le funzioni $x(s)$, $y(s)$, che lo determinano esprimendo le coordinate del punto x, y in funzione dell'arco contato a partire da un punto determinato O, ammettano le derivate dei primi $2n+1$ ordini tutte inferiori ad un certo numero M_1. Chiameremo anche γ la lunghezza di γ: un punto di γ si indicherà quindi indifferentemente colla sua coordinata (s) oppure con una qualunque $(s+\varrho\gamma)$ (ϱ = intero positivo o negativo): però quando non sia esplicitamente detto il contrario quale la differenza $s-\sigma$ delle coordinate di due punti di γ dovrà sempre prendersi la minima in modulo. Manterremo per il resto le notazioni del §. II.

Il problema che ci proponiamo consiste nel determinare ~~una~~ una soluzione $u(xy)$ di (1) tale che sul contorno ~~sia~~ :

$$u(s) = l_0(s), \quad \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} = l_1(s), \; \ldots\ldots \; \frac{\partial^{n-1} u(s)}{\partial n_s^{n-1}} = l_{n-1}(s),$$

dove le funzioni $l_i(s)$ sono assegnate a priori. Da quanto precede segue, tenendo conto dei risultati dell'Appendice (§ I) che, se si suppone che $l_i(s)$ ammetta le derivate dei primi

$2n$-i ordini finite e continue è legittima la trasformazione del problema indicata nel §. I: che cioè ci possiamo limitare a studiare il caso in cui si assegni che la $u(xy)$ abbia le derivate dei primi $n-1$ ordini nulle su σ.

12. – Quantunque la maggior parte delle considerazioni che seguono valgano qualunque sia l'equazione (1), pure occorrerà sovente nel seguito distinguere il caso particolare che la (1) sia a coefficienti costanti ed omogenea[1]. Chiameremo questo caso: il caso elementare.

---

§. V. – La funzione $\psi(xy; x_1y_1)$

13. – Prenderemo quale funzione $\psi(xy; x_1y_1)$ la medesima funzione che, come già ho accennato nell'Introduzione, ho usato nella memoria: Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche, etc. Riproduco qui la definizione e le principali proprietà di questa funzione, rimandando a quel lavoro (n 6-13) per la loro precisa dimostrazione.

Si indichi con d il discriminante dell'equazione (2) del §. IV:

$$(1) \qquad d(xy) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{2n-1} & \alpha_1^{2n-2} & \cdots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{2n-1} & \alpha_2^{2n-2} & \cdots & \alpha_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{2n}^{2n-1} & \alpha_{2n}^{2n-2} & \cdots & \alpha_{2n} & 1 \end{vmatrix} \quad {}^{(2)}$$

esso sarà sempre $\neq 0$. Con $d_j(xy)$ si indichi il complemento algebrico di α_j^{2n-1} in d, diviso per d medesimo. Si ponga

---

[1] È cioè contenente nel primo membro solo derivate di ordine $2n$.

[2] Formola (10) della memoria citata

infine:

(2) $$\varsigma_j(xy;\xi\eta)=\alpha_j(xy)(x-\xi)+y-\eta$$ [1]

Sarà per le (4) del §. IV:

(3) $$\frac{M}{M+1}\,r(xy;\xi\eta)\leq|\varsigma_j(xy;\xi\eta)|\leq(M+1)\,r(xy;\xi\eta)$$ [2]

Infine per un giro di (xy) [di $(\xi\eta)$] nel senso positivo [negativo] attorno al punto $(\xi\eta)$ [(xy)] la funzione $\log\varsigma_j(xy;\xi\eta)$ aumenta di $(-1)^{j+1}2\pi i$

Assumeremo quale funzione $\psi(xy;\xi\eta)$ l'espressione:

(4) $$\psi(xy;\xi\eta)=\frac{i}{2(2n-2)!\,\pi}\sum_1^{2n}(-1)^j d_j(xy)\,\varsigma_j^{2n-2}(xy;\xi\eta)\log\varsigma_j(xy;\xi\eta)$$ [3]

È questa una funzione reale monodroma quando x ed y sono reali e che ammette le derivate dei primi 2n+1 ordini rapporto ad xy e di ordine comunque elevato rapporto a $\xi\eta$ finite e continue in tutti i punti, fatta eccezione per i punti $(xy)\equiv(\xi\eta)$ in cui le derivate di ordine 2n-2, 2n-1, 2n, 2n+1 rispettivamente divengono infinite logaritmicamente, di 1°, 2°, 3° ordine. E precisamente si ha[4]

(5) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^{2n-2}\psi}{\partial x^i\partial y^k}=\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\alpha_j^i d_j\log\varsigma_j+\sum_1^{2n}{}_j\log\varsigma_j\,p_{j,ik}+P_{ik} & (i+k=2n-2)\\[2ex] \dfrac{\partial^{2n-1}\psi}{\partial x^i\partial y^k}=\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\frac{\alpha_j^i d_j}{\varsigma_j}+\sum_1^{2n}{}_j\frac{p_{j,ik}}{\varsigma_j}+\sum\log\varsigma_j\,p'_{j,ik}+P'_{ik} & (i+k=2n-1)\\[2ex] \dfrac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^i\partial y^k}=\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\frac{\alpha_j^i d_j}{\varsigma_j^2}+\sum_1^{2n}{}_j\frac{p_{j,ik}}{\varsigma_j}+\sum\log\varsigma_j\,p_{j,ik}+P_{ik} & (i+k=2n)\end{cases}$$

---

(1) Form. (11). In quel luogo tale funzione è indicata con σ_j: ho cambiato qui notazione perchè la lettera σ è già usata per indicare l'arco di s.

(2) Form. (12).

(3) Form. (13). Per comodità s'è qui aggiunto il divisore $2(2n-2)!\,\pi$

(4) Form. (14). Nella (14) 2n-2 per errore di stampa è scritto $\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\log\varsigma_j\,p_{j,ik}$ invece di $\sum_1^{2n}{}_j\log\varsigma_j\,p_{j,ik}$.

dove le $p_{j,ik}$, $p'_{j,ik}$, P_{ik} sono funzioni di xy, $\xi\eta$ le quali ammettono tutte le derivate dei primi $2n+1-(i+k)$ ordini almeno finite e continue (ed inoltre le $p_{j,i2n-i-2}$, $p_{j,i2n-i-1}$ hanno per $(xy)=(\xi\eta)$ uno zero di 1° ordine almeno).

Però se si forma la $\mathcal{M}\psi$ si ha, grazie al fatto che le α_j sono radici della (2) del § IV,

$$(6) \qquad \begin{aligned} \mathcal{M}\psi &= \sum_{0}^{2n}{}_i \; a_{i\,2n-i}(xy)\left[\sum_j \frac{p_{j,i2n-i}}{\varsigma_j} + \log\varsigma_j \, p'_{j,i2n-i} + P_{i2n-i}\right] \\ &= k(xy;\xi\eta)^{(1)} \end{aligned}$$

dove la $k(xy;\xi\eta)$ ha una singolarità di primo ordine soltanto.

Nel caso elementare le (5) si riducono ai loro primi termini soltanto: si ha quindi allora:

$$(7) \qquad \mathcal{M}\psi(xy;\xi\eta) = 0$$

14. – La funzione [2]:

$$(8) \qquad W(xy) = \iint_c \psi(xy;\xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

ammette le derivate dei primi $2n-1$ ordini, le quali si ottengono derivando sotto il segno [3]: se la funzione $\varphi(\xi\eta)$ ammette anche le derivate prime finite e continue in c la $W(xy)$, ammette pure le derivate di ordine $2n$ [4]. Si ha inoltre:

$$(9) \qquad \mathcal{M}W(xy) = \varphi(xy) + \iint_c k(xy;\xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta^{(5)}$$

La funzione $\mathcal{M}W(xy)$ ammette poi a sua volta le derivate di 1° ordine come del resto le ammette in generale ogni funzione del tipo $\iint_c k(xy;\xi\eta)\,\varphi_1(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta$ tosto che le ammette la funzione $\varphi_1(xy)$ [6]

Nel caso elementare conforme al fatto che per (7) è $k(xy;x_1y_1)$ si ha.

$$(10) \qquad \mathcal{M}W = \varphi(xy).$$

---

(1) Form. (15) (2) Form. (16) (3) Form. (17) (4) Form. (18) e (19)

(5) Form. (20). Si noti che abbiamo nella $\psi(xy, x_1y_1)$ introdotto il fattore $\frac{1}{2(2n-2)!\pi}$, e che nel n. 8 si fece porre $a_{2n,0}=1$

(6) Cfr. n. 12 - Osservazione I.

§. 11. – Studio di alcuni integrali.

[Una generalizzazione dei teoremi sui potenziali di semplice e doppio strato]

15. – Prima di procedere alla costruzione della funzione compensatrice, ci occorre studiare gli integrali del tipo.

$$\omega_j(xy) = \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

(1) $$= \int_\gamma \frac{1}{\alpha_j(xy)[x-\xi(\sigma)]+[y-\eta(\sigma)]}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

$\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$ indicando al solito un punto di γ. Se (xy) è interno a c un tale integrale è una funzione finita e continua di (xy) ed ammette le derivate dei primi $2n+1$ ordini finite e continue; ma quando (xy) tende ad un punto (s) di γ l'integrando diviene infinito di 1° ordine. Proponendoci ora di studiare il limite di $\omega_j(xy)$ quando (xy) tende ad (s), supporremo anzitutto che (xy) tenda ad (s) restando sulla normale a γ in (s). Dimostrato poi che tale limite esiste, che la convergenza è uniforme e che il limite è funzione continua di (s), risulterà senz'altro che la convergenza è superficiale.

Premettiamo alcune conseguenze delle ipotesi fatte sulla curva γ, che dovremo poi richiamare sovente. Anzitutto osserviamo che il rapporto $\frac{|s-\sigma|}{r(s;\sigma)}$ è sempre finito poichè non potrebbe diventare infinito che quando $r(s;\sigma)=0$ e quindi anche $s=\sigma$: ora è chiaro che per $s=\sigma$ questo rapporto tende all'unità. Chiameremo $\frac{1}{D}$ il massimo valore di esso, potremo supporre $D<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{D}>2$. sarà

(2) $$|\sigma-s| \geq r(s;\sigma) \geq D|\sigma-s|$$

Ricordiamo ancora che si ha in generale:

$$\xi(\sigma) = x(s)+x'(s)(\sigma-s)+\frac{1}{2}x_2(s;\sigma)(\sigma-s)^2$$

$$\eta(\sigma) = y(s)+y'(s)(\sigma-s)+\frac{1}{2}y_2(s;\sigma)(\sigma-s)^2,$$

e se $x_2(s;\sigma)$ $y_2(s;\sigma)$ sono i valori delle derivate seconde in due convenienti punti intermedi tra s e σ. Sia (xy) un punto della normale a γ in (s): sarà:

$$x = x(s) - y'(s)\, r(xy;s),$$
$$y = y(s) + x'(s)\, r(xy;s);$$

e supponiamo che sia $r(xy;s) < \frac{1}{16 M_1}$, M_1 essendo, come si disse al n. 11, il massimo delle derivate di $x(s)$, $y(s)$. Si avrà:

$$r^2(xy;\sigma) = (x-\xi(\sigma))^2 + (y-\eta(\sigma))^2 =$$

$$= r^2(xy;s) + (\sigma-s)^2 \Big\{ 1 + r(xy;s)\left[x_2(s;\sigma)\, y'(s) - y_2(s;\sigma)\, x'(s)\right] +$$

$$+ (\sigma-s)\left[x'(s)\, x_2(s;\sigma) + y'(s)\, y_2(s;\sigma)\right] + \frac{1}{4}\left[x_2^2(s;\sigma) + y_2^2(s;\sigma)\right] \Big\}.$$

Ma si supponga che σ sia tanto vicino ad s che $|s-\sigma| < \frac{1}{4M_1}$: avremo allora ricordando che $|x'(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|y'(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|x_2(s;\sigma)| < M_1$, $|y_2(s;\sigma)| < M_1$

(3) $$r^2(xy;\sigma) > r^2(xy;s) + (\sigma-s)^2\left[1 - \frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{32}\right] > r^2(xy;s) + \frac{1}{2}(s-\sigma)^2$$

E tale formula vale ricordiamolo, per ogni punto della normale a γ in (s) che disti da s meno di $\frac{1}{16M_1}$ e per $|\sigma - s| < \frac{1}{4M_1}$.

16. — Ciò posto cominciamo dal caso particolare in cui $\gamma(\sigma)$ sia l'unità. Chiameremo $\omega_j^{(1)}(xy)$ la funzione corrispondente. Noi abbiamo:

(4) $$\frac{1}{\tau_j(xy;\sigma)} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\log \tau_j(xy;\sigma)\right) \cdot \frac{1}{\tau_j(xy;\sigma)},$$

ove si è posto:

(5) $$\tau_j(xy;\sigma) = \alpha_j(xy)\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Sarà quindi evidentemente $\tau_j(xy;\sigma)$ una funzione sempre finita e continua colle sue derivate che non contengono più di 1 derivazione rispetto ad (xy), e di 2 in rapporto a σ: inoltre poiché è $\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2$, si avrà in modo analogo alla

(3) del §.V.

$$\frac{M}{M+1} < |\tau_j(xy;\sigma)| < M+1; \tag{6}$$

onde anche $\frac{1}{\tau_j(xy;\sigma)}$ sarà sempre finita ed ammetterà le stesse derivate che $\tau_j(xy;\sigma)$.

Dalla (4) segue:

$$\omega_j^{(1)}(xy) = \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\,d\sigma = \tag{7}$$

$$= \int_\gamma \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\log\varsigma_j(xy;\sigma)\right)\frac{1}{\tau_j(xy;\sigma)}\,d\sigma.$$

Supponiamo (xy) interno a c ed integriamo p. es. per parti su tutta la curva γ da $\sigma = s$ a $\sigma = s+\gamma$; poichè per un giro positivo di $(\xi(\sigma)\,\eta(\sigma))$ attorno ad (xy) la funzione $\log\varsigma_j(xy;\sigma)$ aumenta di $(-1)^j 2\pi i$, avremo:

$$\omega_j^{(1)}(xy) = (-1)^j 2\pi i\frac{1}{\tau_j(xy;s)} - \int_s^{s+\gamma}\log\varsigma_j(xy;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(xy;\sigma)}\right)d\sigma \tag{8}$$

Nel precedente integrale abbiamo scritto $\int_s^{s+\gamma}$ in luogo di $\int_\gamma$ per indicare che per il logaritmo devesi scegliere una determinazione arbitraria in (s), ma che si deve poi fissarla per continuità negli altri punti del contorno fino a tornare dopo un giro al punto di partenza $(s+\gamma)$ col valore primitivo aumentato di $(-1)^j 2\pi i$ (1)

---

(1) Si noti che non muta il valore dell'integrale che comparisce in (7) se si muta la determinazione del logaritmo: poichè ciò equivale ad aumentare $\log\varsigma_j$ di una costante d, e anche l'integrale di

$$d\int_s^{s+\gamma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(xy;\sigma)}\right)d\sigma = 0.$$

Nello stesso modo si può verificare che si otterrebbe un valore non differente da quello trovato sopra spostando il punto (s).

Se il punto (xy) fosse esterno a c la funzione $\log\varsigma_j$ non muterebbe determinazione quando σ fa un giro su γ onde si avrebbe:

$$\omega_j^{(1)}(xy) = -\int_s^{s+\gamma}\log\varsigma_j(xy;\sigma)\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(xy;\sigma)}\right)d\sigma, \tag{8$_e$}$$

Se ora il punto (xy) tende al punto (s) l'integrale che ancora compare in (7) ha un limite determinato e finito, poichè ha una singolarità non più che logaritmica. Onde sarà:

$$(9)\qquad \lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j^{(1)}(xy) = (-1)^j 2\pi i \frac{1}{\tau_j(s;s)} - \int_s^{\gamma+s} \log \varsigma_j(s;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s;\sigma)}\right) d\sigma.$$

E di più si avrà una limitazione del tipo:

$$(10)\qquad \left|\omega_j^{(1)}(xy) - (-1)^j 2\pi i \frac{1}{\tau_j(s;s)} + \int_s^{\gamma+s} \log\varsigma_j(s;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s;\sigma)}\right)d\sigma\right| < c_0\, r(xy;s).$$

c_0 essendo una costante dipendente solo da γ, μ, M e dal massimo modulo delle derivate prime di $\alpha(xy)$.

Al secondo membro di (9) si può dare un'altra forma. Se noi supponiamo che (xy) sia il punto (s) non esisterà l'integrale (7): ma la medesima trasformazione fatta dianzi ci può servire a mostrare che esiste tuttavia il valore principale di Cauchy dell'integrale medesimo. Infatti si ha, ricordando che il punto $(s+\gamma-\varepsilon)$ coincide con $(s-\varepsilon)$:

$$(11)\qquad \begin{aligned}\int_{s+\varepsilon}^{s+\gamma-\varepsilon}\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\,d\sigma &= \int_{s+\varepsilon}^{s+\gamma-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\log\varsigma_j(s;\sigma)\right)\frac{1}{\tau_j(s,\sigma)}\,d\sigma = \\ &= \left[\log\varsigma_j(s;s-\varepsilon)\frac{1}{\tau_j(s;s-\varepsilon)} - \log\varsigma_j(s;s+\varepsilon)\frac{1}{\tau_j(s;s+\varepsilon)}\right] - \int_{s+\varepsilon}^{s+\gamma-\varepsilon}\log\varsigma_j(s;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s,\sigma)}\right)d\sigma\end{aligned}$$

e al tendere di ε tende a zero:

$$(12)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{s+\varepsilon}^{s+\gamma-\varepsilon}\log\varsigma_j(s;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s;\sigma)}\right)d\sigma = \int_s^{s+\gamma}\log\varsigma_j(s;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s;\sigma)}\right)d\sigma$$

Inoltre si ha:

$$\log\varsigma_j(s;s-\varepsilon)\frac{1}{\tau_j(s;s-\varepsilon)} - \log\varsigma_j(s;s+\varepsilon)\frac{1}{\tau_j(s,s+\varepsilon)} =$$

$$= \log\frac{\varsigma_j(s;s-\varepsilon)}{\varsigma_j(s,s+\varepsilon)}\,\frac{1}{\tau_j(s,s-\varepsilon)} - \log\varsigma_j(s;s+\varepsilon)\left[\frac{1}{\tau_j(s;s+\varepsilon)} - \frac{1}{\tau_j(s;s-\varepsilon)}\right]$$

e ciò tende a zero perchè è $\dfrac{\varsigma_j(s;s-\varepsilon)}{\varsigma_j(s;s+\varepsilon)} = \dfrac{1+k\varepsilon}{1+k_1\varepsilon}$, k, k_1 essendo quantità finite, onde ecc.

---

e perciò ulteriormente nella (9) dovrebbe sostituirsi:

$$(9)_\varepsilon\qquad \lim_{(xy)=(s)}\omega_j^{(1)}(xy) = \int_s^{\gamma+s}\log\varsigma_j(s;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\right)d\sigma$$

$$(13)\quad \lim_{\varepsilon=0}\left[\log \varsigma_j(s;s-\varepsilon)\frac{1}{\tau_j(s;s-\varepsilon)}-\log\varsigma_j(s;s+\varepsilon)\frac{1}{\tau_j(s;s+\varepsilon)}\right]=(-1)^j i\pi\frac{1}{\tau_j(s;s)}$$

Da (11) (12) (13) segue:

$$(14)\quad \int_{s}^{\gamma+s}\log\varsigma_j(s;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j'(s;\sigma)}\right)d\sigma=-\int_\gamma\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}d\sigma+(-1)^j i\pi\frac{1}{\tau_j(s;s)}$$

dove $\int_\gamma$ indica il valore principale di Cauchy dell'integrale.

Sostituendo (14) in (9) e (10) otteniamo:

$$(15)\quad \lim_{(xy)\equiv(s)}\omega_j^{(1)}(xy)=(-1)^j\pi i\frac{1}{\tau_j(s;s)}+\int_\gamma\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}d\sigma$$

$$(16)\quad \left|\omega_j^{(1)}(xy)-(-1)^j\pi i\frac{1}{\tau_j(s;s)}-\int_\gamma\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}d\sigma\right|<c_0 r(xy;s)\ ^{(1)}$$

17.- Torniamo al caso generale dell'integrale (1). E supponiamo che la funzione $\varphi(\sigma)$ sia sempre finita su γ:

$$(17)\quad |\varphi(\sigma)|<\bar\varphi.$$

Ed inoltre che per un certo esponente $\beta>0$ esista un minimo $\bar\varphi_1$ tale che sempre si abbia:

$$(18)\quad |\varphi(\sigma)-\varphi(s)|<\bar\varphi_1|\sigma-s|^\beta.$$

Supporremo per comodità $\beta<1$: è chiaro che se una disuguaglianza del tipo (18) vale per un $\beta\geq 1$, una disuguaglianza analoga vale anche per ogni altro valore di $\beta<1$.

Sarà allora:

$$(19)\quad \omega_j(xy)=\varphi(s)\omega_j^{(1)}(xy)+\int_\gamma\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\left[\varphi(\sigma)-\varphi(s)\right]d\sigma$$

Dico che quando (xy) tende a (s) restando sulla normale a γ in (s) è:

$$(20)\quad \lim_{(xy)\equiv(s)}\int_\gamma\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\left[\varphi(\sigma)-\varphi(s)\right]d\sigma=\int_\gamma\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\left[\varphi(\sigma)-\varphi(s)\right]d\sigma.$$

Intanto si vede subito che il secondo membro di (20) ha senso: perchè per la (3) del §. V, per (2) e (18) si ha:

$$(21)\quad \left|\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\left[\varphi(\sigma)-\varphi(s)\right]\right|<\bar\varphi_1\frac{M+1}{\mu}\frac{|\sigma-s|^\beta}{r(s;\sigma)}<\bar\varphi_1\frac{M+1}{\mu\Pi}\frac{1}{|\sigma-s|^{1-\beta}}.$$

e quindi per $s=\sigma$ diviene infinito di ordine $1-\beta<1$.

(1) Analogamente se (xy) è esterno a C si avrebbe:

Per dimostrare (20) incominciamo con osservare che si ha in generale in virtù della (3) del §.V la diseguaglianza:

$$\left|\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}-\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\right| = \left|\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)\varsigma_j(s;\sigma)}\left\{(\alpha_j(xy)-\alpha_j(s))(\xi(\sigma)-x(s))+\varsigma_j(xy;s)\right\}\right| \leq$$

(22)
$$\leq\left(\frac{M+1}{\mu}\right)^2\frac{\bar{\alpha}\,|\xi(\sigma)-x(s)|+M+1}{r(xy;\sigma)\,r(s;\sigma)}\,r(xy;s)$$

dove $\bar{\alpha}$ indica il massimo valore assoluto delle derivate prime delle α_j.

Ciò posto, dividiamo γ in due parti γ_1 e γ_2 a seconda che è $|\sigma-s|<\frac{1}{4M_1}$ o $>\frac{1}{4M_1}$: per (2), γ_1 sarà interno al cerchio di centro s e raggio $\frac{D}{4M_1}$, γ_2 esterno al cerchio di centro (s) e raggio $\frac{D}{4M_1}$.

Supponiamo infine (xy) sulla normale a γ in (s) e tale che $r(xy;s)<\frac{D}{8M_1}<\frac{1}{16M_1}$.

Quando (σ) è in γ_2 si avrà allora $r(xy;\sigma)>\frac{D}{8M_1}$, $r(s;\sigma)>\frac{D}{4M_1}$, $|\xi(\sigma)-x(s)|<|\sigma-s|<\gamma$ onde da (22) si dedurrà:

(23) $$\left|\int_{\gamma_2}\left[\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}-\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\right][\varphi(\sigma)-\varphi(s)]\,d\sigma\right| \leq \left(\frac{(M+1)D}{4M_1\mu}\right)^2(\bar{\alpha}\gamma+M+1)\,r(xy;s)\,\bar{\varphi}$$

Quando (σ) invece è su γ_1, poichè $r(xy;s)<\frac{1}{16M_1}$, $|s-\sigma|<\frac{1}{4M_1}$ varrà la (3), onde otterremo, ponendo $\tau=|s-\sigma|$, e per (2), (18) e (22):

$$\left|\int_{\gamma_1}\left[\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}-\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\right][\varphi(\sigma)-\varphi(s)]\,d\sigma\right| \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{M+1}{\mu}\right)^2\bar{\varphi}_1\left\{(M+1)\,r(xy;s)\int_0^{\frac{1}{4M_1}}\frac{\tau^{\beta-1}}{\sqrt{r^2(xy;s)+\frac{1}{2}\tau^2}}\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\bar{\alpha}\,r(xy;s)\int_0^{\frac{1}{4M_1}}\frac{\tau^{\beta}}{\sqrt{r^2(xy;s)+\frac{1}{2}\tau^2}}\,d\tau\right\}.$$

E siccome $\beta<1$ si ha:

$$\int_0^{\frac{1}{4M_1}}\frac{\tau^{\beta-1}}{\sqrt{r^2(xy;s)+\frac{1}{2}\tau^2}}\,d\tau = 2^{\frac{\beta}{2}}r^{\beta-1}(xy;s)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\,4M_1 r(xy;s)}}\frac{\tau^{\beta-1}}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau \leq$$

$$= 2^{\frac{\beta}{2}}r^{\beta-1}(xy;s)\int_0^{\infty}\frac{\tau^{\beta-1}}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau = c\,r^{\beta-1}(xy;s)$$

dove c indica una costante finita. Analogamente:

---

(15)$_c$ $$\lim_{(xy)\equiv(s)}\omega_j^{(1)}(xy) = (-1)^{\mu+1}\pi i\frac{1}{\tau_j(s;s)}+\int_\gamma\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\,d\sigma$$

(15)$_d$ $$\left|\omega^{(1)}(xy)+(-1)^{\mu}\pi i\frac{1}{\tau_j(s;s)}-\int_\gamma\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\,d\sigma\right|<C_0'\,r(xy;s)$$

$$\int_0^{\frac{1}{4M_1}} \frac{\tau^\beta}{\sqrt{r^2(xy;s)+\frac{1}{2}\tau^2}}\,d\tau = 2^{\frac{\beta+1}{2}} r^\beta(xy;s)\int_0^{\frac{1}{4r\sqrt{2}M_1 r(xy;s)}} \frac{\tau^\beta}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau \leq c_1$$

poichè l'integrale col tendere di $r(xy;s)$ a zero diviene infinito come $\frac{1}{r^\beta(xy;s)}$.

Onde concluderemo:

(24) $$\left|\iint_{\gamma_1}\left[\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}-\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\right][\varphi(\sigma)-\varphi(s)]\,d\sigma\right| \leq 2\left(\frac{M+1}{\mu}\right)^2\left[c(M+1)+\bar{\alpha}c_1\left(\frac{\beta}{8M_1}\right)^{1-\beta}\right] r^\beta(xy;s)\bar{\varphi}_1$$

Dalle (23) (24) segue evidentemente la (20). Onde per (10), (15), (19), (20) si avrà che, quando (xy) tende ad (s) restando sulla normale a γ:

$$\lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j(xy) = (-1)^{j} 2\pi i \frac{\varphi(s)}{\tau_j(s;s)} - \varphi(s)\int_s^{\ell+s}\log\varsigma_j(s;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s;\sigma)}\right)d\sigma + \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}[\varphi(\sigma)-\varphi(s)]\,d\sigma =$$

(25) $$= (-1)^j \pi i \frac{\varphi(s)}{\tau_j(s;s)} + \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\varphi(\sigma)\,d\sigma \text{ [1]}$$

Chiamerò questo limite $\omega_j(s)$. Per (18), (23), (20) sarà

(26) $$|\omega_j(xy)-\omega_j(s)| \leq B_1\bar{\varphi}\, r(xy;s) + B_2\bar{\varphi}_1\, r^\beta(xy;s)$$

dove B_1 e B_2 indicano due costanti dipendenti solo dalla curva γ, $M, \mu, \bar{\alpha}, \beta$ e non affatto dalla funzione $\varphi(\sigma)$ e dal punto (s). Onde la convergenza del limite (25) è uniforme.

E poichè dalla prima forma di (25) risulta evidente che $\omega_j(s)$ è continua, la convergenza al limite di $\omega_j(xy)$ sarà, come già si disse al n. 15, superficiale.

18.– Conviene aggiungere alcune osservazioni.

Osservazione I. Dalla prima forma di $\omega_j(s)$ data da (25) e da (21) segue che $\omega_j(s)$ soddisfa ad una limitazione del tipo:

(27) $$|\omega_j(s)| \leq B_3\bar{\varphi} + B_4\bar{\varphi}_1$$

---

[1] Analogamente se (xy) è esterno a C

(25') $$\lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j(xy) = (-1)^{j-1}\pi i \frac{\varphi(s)}{\tau_j(s;s)} + \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

B_3 e B_4 sono le costanti indipendenti dalla $\varphi(\sigma)$.

E dalle (25) (27) segue infine che in tutto σ si ha:

(28) $$|\omega_j(xy)| < B_5\,\bar{\varphi} + B_6\,\bar{\varphi}_1 .$$

B_5 e B_6 essendo costanti analoghe a B_1, B_2, B_3 e B_4.

Osservazione II. – Possiamo supporre che $\varphi(\sigma)$ dipenda anche da altri parametri $\mu_1, \mu_2 \ldots$ per es: dal punto (xy) medesimo. Se qualunque siano i valori di questi parametri la φ soddisfa alle (17) (18) – senza fare alcuna ipotesi sulla continuità di φ rapporto ai parametri medesimi – è chiaro che sarà ancora la (28). Poichè supponiamo ad es: che si abbia una funzione $\varphi(xy;\sigma)$: fissato un punto $(x'y')$ si indichi con $\varphi'(\sigma)$ la funzione $\varphi(x'y';\sigma)$ e consideriamo la:

$$\omega_j'(xy) = \int_\gamma \frac{\varphi'(\sigma)}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\,d\sigma$$

sarà per (28)

$$|\omega_j'(xy)| < B_5\,\bar{\varphi} + B_6\,\bar{\varphi}_1$$

Ma $\omega_j'(x'y') = \omega_j(x'y')$, quindi anche per ω_j vale la (28).

Invece maggiori condizioni debbonsi introdurre per poter concludere che la funzione limite è continua rapporto ai parametri μ. Oppure ad es. quando φ dipende da (xy): per dimostrare che:

$$\lim_{(xy)\equiv s} \omega_j(xy) = \lim_{(xy)\equiv(s)} \int_\gamma \frac{\varphi(xy;\sigma)}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\,d\sigma =$$

$$= (-1)^j \pi i\,\frac{\varphi(s;s)}{\varsigma_j'(s;s)} + \int_\gamma \frac{\varphi(s;\sigma)}{\varsigma_j(s,\sigma)}\,d\sigma = \omega_j(s)$$

occorrerà fare qualche ulteriore ipotesi sul modo in cui la $\varphi(xy;\sigma)$ dipende da (xy). Ma basterà supporre che sia funzione continua di xy. Fissato un numero ε piccolo a piacere si potrà trovare un numero δ tale che quando (xy) ed (x_1y_1) distano meno di δ si abbia:

$$|\varphi(xy;\sigma) - \varphi(x_1y_1;\sigma)| < \varepsilon$$

$$\left|\left[\varphi(xy;\sigma)-\varphi(x_1y_1;\sigma)\right]-\left[\varphi(xy;\sigma_1)-\varphi(x_1y_1;\sigma_1)\right]\right|<\varepsilon\,|\sigma-\sigma_1|^{\frac{\beta}{2}} \ (1)$$

Poichè allora dalla:

$$\omega_j(xy)-\int_\gamma \frac{\varphi(s;\sigma)}{\varsigma_j(xy;\sigma)}d\sigma=\int_\gamma \frac{\varphi(xy;\sigma)-\varphi(s;\sigma)}{\varsigma_j(xy;\sigma)}d\sigma$$

segue per (28) che se (xy) dista da (s) meno di δ_ε:

$$\left|\omega_j(xy)-\int_\gamma \frac{\varphi(s;\sigma)}{\varsigma_j(xy;\sigma)}d\sigma\right|<\left[B_5+B_6'\right]\varepsilon \ (2)$$

e quindi $\omega_j(xy)$ avrà per $(xy)\equiv(s)$ lo stesso limite di $\int_\gamma \frac{\varphi(s;\sigma)}{\varsigma_j(xy;\sigma)}d\sigma$

Osservazione III. - Conviene sovente dare a (25) o (25)' forma leggermente diversa.

Osserviamo perciò che la differenza:

$$(29)\qquad \zeta_j(s;\sigma)=\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}-\frac{\pi}{\gamma}\frac{1}{\tau_j(s;\sigma)}\cot g\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)$$

è una funzione finita e continua anche per $s=\sigma$: e come $\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}$, $\frac{1}{\tau_j(s;s)}$, $\cot g\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)$ ammette tutte le derivate che non contengono più di $2n-1$ derivazioni rapporto a s e non più di $2n+1$ rapporto a σ, e quelle di queste derivate che sono di ordine $\leq 2n-1$ sono finite e continue anche per $s=\sigma$ (3), quelle di

---

(1) La prima disuguaglianza è evidente data la continuità di φ rapporto ad x,y,σ. Per provare la seconda si osservi che dal fatto che, qualunque sia xy, soddisfatta la (18), segue che $\frac{\varphi(xy;\sigma)-\varphi(xy;\sigma_1)}{|\sigma-\sigma_1|^{\frac{\beta}{2}}}$ è funzione finita e continua delle quattro variabili x,y,σ,σ_1.

(2) Indico con B_6' un numero analogo a B_6 corrispondente al valore $\frac{\beta}{2}$ di β.

(3) Infatti si osservi che $\cot g\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)-\frac{\gamma}{\pi(s-\sigma)}$ è nell'intorno di $s=\sigma$ funzione regolare analitica di $s-\sigma$: onde $\zeta_j'(s;\sigma)=\frac{1}{\tau_j(s;s)}\cdot\left[\frac{\pi}{\gamma}\cot g\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)-\frac{1}{s-\sigma}\right]$ è funzione regolare analitica di σ che ammette le derivate dei primi $2n$ ordini rapporto ad s. Basta quindi studiare in un intorno di $s=\sigma$: $\zeta_j(s;\sigma)+\zeta_j'(s;s)=$

$$=\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}-\frac{1}{(s-\sigma)}\frac{1}{\tau_j(s;s)}=\frac{\alpha_j(s)\left[x'(s-\sigma)-x+\xi\right]+\left[y'(s-\sigma)-y+\eta\right]}{\varsigma_j(s;\sigma)(s-\sigma)\tau_j(s;s)}=$$

$$=\frac{\alpha_j(s)x_2(s;\sigma)+y_2(s;\sigma)}{\left[\alpha_j(s)x'+y'\right]^2+|s-\sigma|\left[\alpha_j(s)x'+y'\right]\left[\alpha_j(s)x_2(s,\sigma)+y_2(s;\sigma)\right]},$$

ordine $k > 2n-1$ divergono per $s = \sigma$ infinite di ordine $\leq k-2n+1$.
Sostituiamo in (25) il valore di $\frac{1}{\zeta_j(s;\sigma)}$ dato da (29) avremo:

$$
(30)\qquad \omega_j(s) = \lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j(xy) = (-1)^j 2\pi i \frac{\varphi(s)}{\zeta_j'(s;s)} + \frac{\pi}{\gamma}\frac{1}{\zeta_j'(s;s)}\int_{\mathcal{Y}} \cot g \frac{\pi}{\gamma}(s;\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma + \int_{\mathcal{Y}} l(s,\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma .
$$

Questa formula presenta sulla (25) il vantaggio che l'integrale singolare risulta indipendente da j.

19.- In modo perfettamente analogo si possono studiare gli integrali del tipo.

$$
(31)\qquad \bar{\omega}_j(xy) = \int_{\mathcal{Y}} \frac{1}{\bar{\zeta}_j(\sigma;xy)}\varphi(\sigma)\,d\sigma = \int_{\mathcal{Y}} \frac{1}{\alpha_j(\sigma)\left[\xi(\sigma)-x\right]+\eta(\sigma)-y}\varphi(\sigma)\,d\sigma
$$

Infatti si ha analogamente a (4).

$$
(32)\qquad \frac{1}{\bar{\zeta}_j(\sigma;xy)} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\log\bar{\zeta}(\sigma;xy)\frac{1}{\bar{\tau}_j(\sigma)} - \frac{d\alpha_j(\sigma)}{d\sigma}\frac{\xi(\sigma)-x}{\bar{\zeta}_j(\sigma;xy)}
$$

dove:

$$
(33)\qquad \bar{\tau}_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma)\frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} + \frac{d\eta(\sigma)}{d\sigma}.
$$

Partendo da questa formula si potrebbe arrivare co.

[illegible] $\bar{x}(s;\sigma)$, $\bar{y}(s;\sigma)$ ammettano le derivate che non contengono [illegible] di $2n-1$ [illegible] rapporto ad s, e di $2n+1$ rapporto [illegible] di esse [illegible] ordine $\leq 2n-1$ sono finite e [illegible] di ordine $k > 2n-1$ divergono infinite [illegible] $\leq k-2n+1$ (Appendice §II.). Onde segue l'e[illegible] [illegible] animalia di $\zeta_j(s;\sigma)$ e $\zeta_j'(s;\sigma)$ e sempre [illegible] $\geq [\alpha_j(\sigma), x'+y'] > \frac{\mu^2}{(M+1)^2}$).

come nei precedenti n. 16, 17, 18.

Ma possiamo anche limitarci ad osservare che:

$$\frac{1}{\overline{\sigma}_j(\sigma;xy)} + \frac{1}{\sigma_j(xy;\sigma)} - \frac{[\alpha_j(xy)-\alpha_j(\sigma)][x-\xi(\sigma)]}{\overline{\sigma}_j(\sigma;xy)\,\sigma_j(xy;\sigma)} = \delta(xy;\sigma)$$

è una funzione finita e continua di (xy) e di σ, sempre inferiore in modulo a $\alpha\left(\frac{M+1}{M}\right)^2$; indi segue:

$$\lim_{(xy)\equiv(s)} \left[\overline{\omega}_j(xy)+\omega_j(xy)\right] = \int_j \delta(s;\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

ossia per (30)

(34)
$$\lim_{(xy)\equiv(s)} \overline{\omega}_j(xy) = (-1)^{jn}\, i\pi \frac{\varphi(s)}{\overline{\sigma}_j(s;s)} - \frac{\pi}{l}\,\frac{1}{\overline{\sigma}_j(s;s)}\int_0^l ctg\left[\frac{\pi}{l}(s-\sigma)\right]\varphi(\sigma)\,d\sigma + \int_j \overline{l}_j(s;\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

dove:

$$\overline{l}_j(s;\sigma) = -l_j(s;\sigma) + \delta(s;\sigma)$$

è una funzione finita e continua di s e σ che gode delle stesse proprietà di $l_j(s;\sigma)$.

E parimenti si avrebbero delle limitazioni analoghe a (21), (26), (28):

(35)
$$\begin{cases} |\overline{\omega}_j(s)| < \overline{B}_3\,\overline{\varphi} + \overline{B}_4\,\overline{\varphi}_1 \\ |\overline{\omega}_j(xy) - \overline{\omega}_j(s)| < \overline{B}_1\,\overline{\varphi}\; r(xy;s) + \overline{B}_2\,\overline{\varphi}_1\; r^{\lambda}(xy;s) \\ |\overline{\omega}_j(xy)| < \overline{B}_5\,\overline{\varphi} + \overline{B}_6\,\overline{\varphi}_1 \end{cases}$$

Valgono ancora considerazioni analoghe all'osservazione III del n. 18.

20. - I valori sopra trovati per i limiti di $\omega_j(xy)$ e $\overline{\omega}_j(xy)$ dipendono evidentemente solo dal comportamento di $\frac{1}{r(xy;\sigma)}$ per $(xy)\equiv(x_1y_1)$; quindi è chiaro che i punti dipendenti dal punto (s) cui tende (xy) non hanno alcuna influenza nel risultato ottenuto: in particolare agli stessi limiti si tende

(25), (28), (34) si sarebbe condotti se si estendesse l'integrale invece che ad una curva chiusa ad una curva aperta, ed (s) fosse un punto di essa curva differente da un estremo. Qualche modificazione invece si deve portare alle limitazioni (26), (27), (28), (35): ed invero è ben naturale che a mano a mano che il punto (s) si avvicina ad un estremo della curva di integrazione la convergenza al limite risulterà sempre meno rapida; e parimenti anche gli integrali singolari che compaiono in (25), (30), (34) seguiranno ad influire maggiormente nel valore limite ottenuto.

In questo n. 20 mi propongo di trovare quali limitazioni si debbano sostituire a quelle ora ricordate; il risultato ci verrà molto utile negli studii del n. seguente.

Tratterò un caso assai generale. Sia γ la solita curva chiusa; indichi Γ un insieme finito o no di segmenti di γ, $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(i)} \ldots$; siano $s^{(i,1)}$ $s^{(i,2)}$ gli estremi di $\gamma^{(i)}$; $\varphi(\sigma)$ una funzione definita in Γ e che si soddisfi in ogni segmento $\gamma^{(i)}$ alle (17) e (18) ed inoltre sia tale che presi due estremi qualunque, ad es: $s^{(h,1)}$ $s^{(i,2)}$ di Γ si abbia:

$$(36)\qquad |\varphi(s^{(h,1)}) - \varphi(s^{(i,2)})| < \overline{\varphi}_1\, r^{\beta}(s^{(h,1)}; s^{(i,2)}) < \overline{\varphi}_1\, |\sigma - \sigma_1|^{\beta}$$

E consideriamo l'integrale:

$$(37)\qquad \omega_j^{(\Gamma)}(xy) = \int_\Gamma \frac{1}{S_j(xy;\sigma)}\varphi(\sigma)\, d\sigma$$

Sia (s) un punto interno ad un segmento di Γ, ad es. di $\gamma^{(1)}$, e chiamiamo ρ il minimo dei due numeri $|s^{(1,1)}-s|$, $|s^{(1,2)}-s|$. Avremo allora che, posto:

$$\omega_j^{(\Gamma)}(s) = \lim_{(xy)=(s)} \omega_j^{(\Gamma)}(xy) = (-1)^j \pi \frac{\varphi(s)}{T_j(s;s)} + \int_\Gamma \frac{1}{S_j(s;\sigma)}\varphi(\sigma)\, d\sigma$$

e inoltre $\omega_j^{(\Gamma)}$ soddisfa alla limitazione:

$$(38)\qquad |\omega_j^{(\Gamma)}(s)| < B_3\, \overline{\varphi} + B_4\, \overline{\varphi}_1 + B_7\, \overline{\varphi} \log \rho$$

e che inoltre si ha, quando (xy) rappresenta un punto della normale a γ in (s) che dista da (s) meno di $\frac{D}{8M_1}$,

(39) $\left|\omega_j^{(\Gamma)}(xy)-\omega_j^{(\Gamma)}(s)\right| < B_1\bar{\varphi}\, r(xy;s)+B_2\bar{\varphi}_1 r^{\beta}(xy;s)+B_8\bar{\varphi}\,\frac{r^{1-\beta}(xy;s)}{\rho^{\beta}}$

dove B_7 e B_8 dipendono solo da γ e da $\bar{\alpha}$ (e non da Γ e φ) e quindi infine che per un punto xy sulla normale a γ in (s) si ha:

(40) $$\left|\omega_j^{(\Gamma)}(xy)\right| < B_5\bar{\varphi}+B_6\bar{\varphi}_1+B_9\bar{\varphi}\,\frac{1}{\rho^{\beta}},$$

dove ancora B_9 gode delle solite proprietà delle costanti B.

Infatti in questa ipotesi si definisca una funzione $\psi(\sigma)$ uguale a $\varphi(\sigma)$ in Γ e che in $\Gamma_1=\gamma-\Gamma$ sia ottenuta interpolando linearmente tra i due estremi più prossimi di Γ. Per (36) sarà evidentemente:

(41) $$|\psi(\sigma)|<\bar{\varphi}\quad,\quad |\psi(\sigma)-\psi(s)|<\bar{\varphi}_1|s-\sigma|^{\beta}$$

Ma allora si ha:

(42)
$$\omega_j^{(\Gamma)}(xy)=\int_\gamma\frac{1}{\zeta_j(xy;\sigma)}\psi(\sigma)\,d\sigma-\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\zeta_j(xy;\sigma)}\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$
$$\omega_j^{(\Gamma)}(s)=\lim_{(xy)\to(s)}\omega_j^{(\Gamma)}(xy)=(-1)^i\pi i\,\frac{\varphi(s)}{\tau_j(s;s)}+\int_\gamma\frac{1}{\zeta_j(s;\sigma)}\psi(\sigma)\,d\sigma-\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\zeta_j(s;\sigma)}\psi(\sigma)\,d\sigma;$$

Ora per (27), (26) e (41) sarà:

(43)
$$\left|(-1)^i\pi i\,\frac{\varphi(s)}{\tau_j(s;s)}+\int_\gamma\frac{1}{\zeta_j(s,\sigma)}\psi(\sigma)\,d\sigma\right|<B_3\bar{\varphi}+B_4\bar{\varphi}_1.$$
$$\left|\int_\gamma\frac{1}{\zeta_j(xy;\sigma)}\psi(\sigma)\,d\sigma-(-1)^i\pi i\,\frac{\varphi(s)}{\tau_j(s;s)}+\int_\gamma\frac{1}{\zeta_j(s;\sigma)}\psi(\sigma)\,d\sigma\right|<B_1\bar{\varphi}\,r(xy;s)+B_2\bar{\varphi}_1 r^{\beta}(xy;s);$$

d'altra parte sarà:

(44)
$$\left|\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\zeta_j(s;\sigma)}\psi(\sigma)\,d\sigma\right|\leq\bar{\varphi}\int_{\gamma-\gamma^{(1)}}\left|\frac{1}{\zeta_j(s;\sigma)}\right|d\sigma\leq$$
$$\leq\bar{\varphi}\,\frac{M+1}{\mu}\int_{\gamma-\gamma^{(1)}}\frac{1}{r(s;\sigma)}\,d\sigma\leq$$
$$\leq 2\bar{\varphi}\,\frac{(M+1)}{\mu D}\int_{\rho}^{\frac{\ell}{2}}\frac{1}{|s-\sigma|}\,d\sigma\leq$$
$$\leq B_7\bar{\varphi}\,\log\rho.$$

Dalle (44) e dalle prime delle (42) (43) segue (39).

[illegible] avremo.

$$\left|\int_{\gamma_1}\left[\frac{1}{\mathfrak{S}(xy;\sigma)}-\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathfrak{z};\sigma)}\right]\varphi(\sigma)\,d\sigma\right| \leq \bar{\varphi}\int_{\gamma-\gamma^{(1)}}\left|\frac{1}{\mathfrak{S}(xy;\sigma)}-\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathfrak{z};\sigma)}\right|d\sigma$$

Dividiamo ora [illegible] $\gamma-\gamma^{(1)}$ in due parti γ_1', γ_2' secondo che $\tau \leq \frac{1}{4M_1}$ o $\tau > \frac{1}{4M_1}$; γ_1' può eventualmente mancare. Come si ha (40) così pure sarà:

$$(46)\quad \int_{\gamma_2'}\left|\frac{1}{\mathfrak{S}(xy;\sigma)}-\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathfrak{z};\sigma)}\right| < c_2\, r(xy;\mathfrak{z}) \qquad c_2=\left(\frac{(M+1)D}{4M_1\mu}\right)^2(\bar{\alpha}\gamma+M+1)$$

Per quanto riguarda γ_1' si avrà per (22) e (3)

$$\int_{\gamma_1'}\left|\frac{1}{\mathfrak{S}(xy;\sigma)}-\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathfrak{z};\sigma)}\right|d\sigma \leq 2\left(\frac{M+1}{\mu}\right)r(xy;\mathfrak{z})\left\{(M+1)\int_\rho^{\frac{1}{4M_1}}\frac{1}{\tau\sqrt{\frac{1}{2}\tau^2+r^2(xy;\mathfrak{z})}}\,d\tau+\bar{\alpha}\int_\rho^{\frac{1}{4M_1}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\tau^2+r^2(xy;\mathfrak{z})}}\,d\tau\right\}$$

Ora si ha:

$$\int_\rho^{\frac{1}{4M_1}}\frac{1}{\tau\sqrt{\frac{1}{2}\tau^2+r^2(xy;\mathfrak{z})}}\,d\tau = \frac{1}{r(xy;\mathfrak{z})}\left\{\log\frac{r(xy;\mathfrak{z})+\sqrt{r^2(xy;\mathfrak{z})+\frac{1}{2}\rho^2}}{\rho}-\log\frac{r(xy;\mathfrak{z})+\sqrt{r^2(xy;\mathfrak{z})+\frac{1}{32M_1^2}}}{\frac{1}{4M_1}}\right\} \leq$$

$$\leq c_3\,\frac{r(xy;\mathfrak{z})^{\beta-1}\,(^1)}{\rho^\beta},$$

$$\int_\rho^{\frac{1}{4M_1}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\tau^2+r^2(xy;\mathfrak{z})}}\,d\tau \leq c_4\,\log\rho \leq$$

$$\leq c_5\,\frac{1}{\rho^\beta}$$

onde segue:

$$(47)\qquad \int_{\gamma_1'}\left|\frac{1}{\mathfrak{S}(xy;\sigma)}-\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathfrak{z};\sigma)}\right|d\sigma < c_6\,\frac{r^\beta(xy;\sigma)}{\rho^\beta}$$

Da (45), (46), (47) segue (40). Analoghe considerazioni si avrebbero [illegible] gli integrali del [illegible] $\bar{\omega}_i^{(\rho)}(xy)=\int_\gamma\frac{\varphi(\sigma)}{\mathfrak{S}(\sigma;xy)}\,d\sigma$.

21 - [illegible] considerazioni [illegible] applicare subito [illegible] [illegible] integrali [illegible].

---

(1) [illegible] $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ [illegible] $\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\alpha_2}$ e quindi [illegible] [illegible] qualunque determinato [illegible] positivo. Infatti si ha: $\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\alpha_2}-1=\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2+1}-\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=$

(48) $$\omega_{ik}(xy;x_1y_1)=\int_\gamma \frac{\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{r_1(xy,\sigma)\,r_1(\sigma;x_1y_1)}\,d\sigma$$

dove φ è una funzione finita e continua la quale soddisfa dunque siano i valori di xy, x_1y_1 alle condizioni (11) e (12),

Questa funzione è considerata quale funzione di xy del tipo di $\omega_j(xy)$, considerata come funzione di (x_1y_1), del tipo di $\bar{\omega}_j(x_1y_1)$, almeno finché rispettivamente (x_1y_1) ed (xy) siano interni a C. Ma quando questi due punti si vanno entrambi a portare su γ, l'integrando acquista tale singolarità che non appartiene più ai tipi studiati sopra. E realmente la funzione può benissimo divenire infinita; ne determineremo la natura mostrando che essa diviene infinita nei punti di γ, ma di ordine non superiore a $1+\beta$ dove β indica un numero positivo determinato, anche arbitrariamente piccolo; con maggior precisione mostreremo che:

$$r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)\,\omega_j(xy;x_1y_1)$$

è limitata anche quando (xy), (x_1y_1) vanno su γ.

Osserviamo infatti che ci basterà dimostrare ciò nell'ipotesi che (xy) ed (x_1y_1) siano entrambi convenientemente vicini a γ; ad es. quando (xy) ed (x_1y_1) distino da γ meno di $\frac{\Pi}{8M_1}$, talché per ognuno di essi passi una sola normale a γ che supporremo incontrare γ rispettivamente in (s) ed (s_1), e che si possa applicare la formula (40)

$$= \frac{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2+1-\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2+1}+\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} < 2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$ onde segue infine $\log\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\alpha_2} < 2^{\frac{\beta}{2}} c \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|^\beta$.

Applichiamo questa formula facendo $\alpha_1=r(xy;s)$ e una volta $\alpha_2=\frac{\rho}{\sqrt{2}}$, l'altra $\alpha_2=\frac{1}{4\sqrt{2}M_1}$, avremo che la quantità fra parentesi della formula del testo è inferiore a

$$2^{\frac{\beta}{2}} c\, r^\beta(xy,s)\left\{\frac{1}{\rho^\beta}+\frac{1}{(4M_1)^\beta}\right\} < c'\frac{r^\beta(xy,s)}{\rho^\beta}$$

onde segue la disuguaglianza del testo.

e siano (s) ed (s_1) saranno rispettivamente i punti di γ più prossimi a (xy) ed (x_1y_1). Distinguiamo due casi secondochè uno almeno dei due punti (xy) ed (x_1y_1) dista da γ più di $\frac{1}{4}r(xy;x_1y_1)$, oppure no.

Si abbia il primo caso e sia per fissare le idee (x_1y_1) quello di questi punti per cui è $r(x_1y_1;\sigma) > \frac{1}{4}r(xy;x_1y_1)$. Avremo allora per (3) del §.V.

$$\left|\frac{1}{\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)}\right| < \frac{M+1}{\mu}\,\frac{1}{r(xy;x_1y_1)}.$$

E in modo analogo a (22), ed osservando che:
$r(\sigma;\sigma_1) \leq r(\sigma;x_1y_1)+r(\sigma_1;x_1y_1)$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)}-\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1;x_1y_1)}\right| &= \frac{(\alpha_k(\sigma)-\alpha_k(\sigma_1))(\xi(\sigma)-x_1)+\varsigma_k(\sigma_1;\sigma)}{\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)\,\varsigma_k(\sigma_1;x_1y_1)} \leq \\
&\leq \left(\frac{M+1}{\mu}\right)^2\left[\bar{\alpha}_\gamma+M+1\right]\frac{r(\sigma;\sigma_1)}{r(\sigma;x_1y_1)\,r(\sigma_1;x_1y_1)} \leq \\
(49)\qquad &\leq c_7\,\frac{\left(r(\sigma;x_1y_1)+r(\sigma_1;x_1y_1)\right)^{1-\beta}}{r(\sigma;x_1y_1)\,r(\sigma_1;x_1y_1)}\,r^\beta(\sigma,\sigma_1) \leq \\
&\leq c_7\left[\frac{1}{r^\beta(\sigma;x_1y_1)\cdot r(\sigma_1;x_1y_1)}+\frac{1}{r(\sigma;x_1y_1)\,r^\beta(\sigma_1;x_1y_1)}\right]r^\beta(\sigma;\sigma_1) \leq \\
&\leq c_8\,\frac{1}{r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)}\,|\sigma-\sigma_1|^\beta.
\end{aligned}$$

Cosicchè si avrà:

$$(50)\quad \begin{cases}
\left|\dfrac{\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)}\right| < c_9\,\bar{\varphi}\,\dfrac{1}{r(xy;x_1y_1)} \\[2ex]
\left|\dfrac{\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)}-\dfrac{\varphi(xy;\sigma_1;x_1y_1)}{\varsigma_k(\sigma_1;x_1y_1)}\right| < \left[c_{10}\,\bar{\varphi}_1\,\dfrac{1}{r(xy;x_1y_1)}+c_{11}\,\bar{\varphi}\,\dfrac{1}{r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)}\right]|\sigma-\sigma_1|^\beta
\end{cases}$$

onde applicando ad ω_{jk} la formula (30) si concluderà:

$$|\omega_{jk}(xy;x_1y_1)| < \frac{B_{10}\,\bar{\varphi}+B_{11}\,\bar{\varphi}_1}{r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)}$$

la quale intanto prova che in quest'ipotesi comunque si assumano a γ vicini (xy) ed (x_1y_1) sempre:

$$r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)\,|\omega_{jk}(xy;x_1y_1)| < B_{10}\,\bar{\varphi}+B_{11}\,\bar{\varphi}_1.$$

Passiamo al secondo caso. Dividiamo allora Γ in due parti Γ' e $\bar{\Gamma}$ ponendo in Γ' i punti in cui $r(xy;\sigma) < r(x_1y_1;\sigma)$ e in $\bar{\Gamma}$ quelli in cui $r(xy;\sigma) > r(x_1y_1;\sigma)$; i punti in cui $r(xy;\sigma) = r(x_1y_1;\sigma)$ si possono considerare come appartenenti tanto a Γ' che a $\bar{\Gamma}$.

Siccome si ha:

$$r(xy;\sigma) + r(x_1y_1;\sigma) \geq r(xy;x_1y_1)$$

in Γ' sarà $r(x_1y_1;\sigma) > \frac{1}{2} r(xy;x_1y_1)$, in $\bar{\Gamma}$ $r(xy;\sigma) > \frac{1}{2} r(xy;x_1y_1)$. Potremo scrivere:

$$(51)\quad \omega_{jk}(xy;x_1y_1) = \int_{\Gamma'} \frac{1}{S_j(xy;\sigma)} \frac{\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{S_k(\sigma;x_1y_1)} d\sigma + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{S_j(xy;\sigma)} \frac{1}{S_k(\sigma;x_1y_1)} d\sigma$$

Consideriamo ad es. il primo di questi integrali; esso è del tipo di quelli studiati al n. 20, quando vi si ponga $\varphi = \dfrac{\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{S_k(\sigma;x_1y_1)}$.

Infatti ricordando che nei punti di Γ' si ha sempre: $r(x_1y_1;\sigma) > \frac{1}{2} r(xy;x_1y_1) > \frac{1}{4} r(xy;x_1y_1)$, essa soddisfa in Γ' (gli estremi compresi) alle disuguaglianze (50) le quali comprendono le (17), (18), (36) cui deve soddisfare la φ affinchè le conclusioni di quel numero siano applicabili. Di più osserviamo che, essendo $r(xy;s) < \frac{1}{4} r(xy;x_1y_1)$ segue che (s) appartiene a Γ' e che i primi estremi di segmenti di Γ' che si incontrano a partire da (s), essendo punti per cui $r(xy;\sigma) = r(x_1y_1;\sigma) \geq \frac{1}{2} r(xy;x_1y_1)$ distano da (s) più di $\frac{1}{4} r(xy;x_1y_1)$. Cosicchè al primo di questi integrali si potrà applicare la formula (40) ponendovi $\rho \geq \frac{1}{4} r(xy;x_1y_1)$ e per φ e $\bar{\varphi}_1$ i valori dati dalle (50). Onde si deduce che si avrà ancora:

$$(52)\qquad \left| \int_{\Gamma'} \frac{1}{S_j(xy;\sigma)} \frac{\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{S_k(\sigma;x_1y_1)} d\sigma \right| < \frac{B_{12}\bar{\varphi} - B_{13}\bar{\varphi}_1}{r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)}$$

Analogamente si ragiona per il secondo degli integrali che compaiono in (51). Onde infine otterremo che realmente la funzione (48) soddisfa alle limitazioni:

$$(53) \qquad |r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)\,\omega_{jk}(xy;x_1y_1)| < B_{13}\bar{\varphi}+B_{14}\bar{\varphi}_1$$

come avevamo enunciato.

22.- In particolare ad una limitazione di questa natura soddisfa la funzione:

$$(54) \qquad \int_{\gamma}\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)\log\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma$$

poichè posto:

$$(55) \qquad \varphi(xy;\sigma;x_1y_1)\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)\log\varsigma_k(\sigma;x_1y_1) = \psi(xy;\sigma;x_1y_1)$$

la $\psi(xy;\sigma;x_1y_1)$ soddisfa alle proprietà richieste sopra per la φ, e l'integrale (54) si può scrivere:

$$(56) \qquad \int_{\gamma}\frac{\psi(xy;\sigma;x_1y_1)}{\varsigma_j(xy;\sigma)\,\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)}\,d\sigma$$

e così ridurlo alla forma del numero precedente.[1]

23.- Un'ulteriore estensione degli integrali considerati fin qui si ottiene considerando integrali della forma:

$$(57) \qquad \omega_{j,g}(xy) = \int_{\gamma}\frac{1}{\varsigma_j^{\,g}(xy;\sigma)}\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

Ammettiamo che la funzione $\varphi(\sigma)$ abbia le derivate dei primi g ordini finite e continue o più semplicemente che la funzione $\varphi(\sigma)$ abbia le derivate dei primi $g-1$ ordini finite e continue inferiori in modulo a $\bar{\varphi}_1$ e tali che le derivate $(g-1)$esime soddisfacciano ad una limitazione della forma (18)

$$(58) \qquad |\varphi^{(g-1)}(\sigma)-\varphi^{(g-1)}(\sigma_1)| < \bar{\varphi}_1\,|\sigma-\sigma_1|^{\beta}$$

È facile vedere che almeno se si suppone $g<2n+1$ l'integrale (57) rappresenta una funzione finita e continua di (xy)

---

[1] Del resto si potrebbe in questo caso dimostrare che l'integrale (54) di ordine <1: ma non ci occorre.

in c e su γ.

Infatti si osservi che si ha analogamente a (4).

$$
(59)\begin{cases}
\dfrac{1}{\varsigma_j^2(xy;\sigma)} = -\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\dfrac{1}{\tau_j(xy;\sigma)} = \vartheta_{21}(xy;\sigma)\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)} \\
\dfrac{1}{\varsigma_j^3(xy;\sigma)} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{1}{\varsigma_j^2(xy;\sigma)}\dfrac{1}{\tau_j(xy;\sigma)} = \\
\qquad = \vartheta_{32}(xy;\sigma)\dfrac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\dfrac{1}{\varsigma^2(xy;\sigma)} + \vartheta_{31}(xy;\sigma)\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)} \\
\text{-------------------------------} \\
\dfrac{1}{\varsigma_j^g(xy;\sigma)} = \vartheta_{gg-1}(xy;\sigma)\dfrac{\partial^{g-1}}{\partial\sigma^{g-1}}\dfrac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)} + \vartheta_{gg-2}(xy;\sigma)\dfrac{\partial^{g-2}}{\partial\sigma^{g-2}}\dfrac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)} + \dots + \\
\qquad + \vartheta_{g1}(xy;\sigma)\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}.
\end{cases}
$$

dove le ϑ_{hh_1} sono polinomii in $\dfrac{1}{\tau_j(xy;\sigma)}$ e nelle sue derivate rapporto a σ dei primi $h-h_1-1$ ordini, onde ammettono le derivate rapporto a σ finite e continue dei primi $2n+h_1+1-h$ ordini e rapporto ad xy dei primi $2n+1$ ordini;

Applicando le (59) a (57) integrando per parti si avrà:

$$
(60)\quad \begin{aligned}
\omega_{j,g}(xy) &= \int_\gamma \frac{\partial^{g-1}}{\partial\sigma^{g-1}}\left(\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\right)\varphi(\sigma)\,\vartheta_{g,g-1}(xy;\sigma)\,d\sigma + \dots + \int_\gamma \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\right)\varphi(\sigma)\,\vartheta_{g1}(xy;\sigma)\,d\sigma = \\
&= \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)}\chi(xy;\sigma)\,d\sigma,
\end{aligned}
$$

dove $\chi(xy;\sigma)$ è un polinomio nella $\varphi(\sigma)$ e nelle sue derivate dei primi $g-1$ ordini, nelle $\vartheta_{gk}(xy;\sigma)$ e nelle derivate di esse rapporto a σ dei primi k ordini, od in altri termini nella $\varphi(\sigma)$ nella $\dfrac{1}{\tau_j(xy;\sigma)}$ e nelle loro derivate di ordine $\leq g-1$. Quindi grazie all'ipotesi fatte sulla $\varphi(\sigma)$ questa funzione $\chi(xy;\sigma)$ soddisfa a limitazioni del tipo delle (17) e (18). Onde risulta l'enunciato.

Analoghe considerazioni valgono quando si tratti di integrali del tipo:

$$(61)\qquad \overline{\omega}_{jg}(xy) = \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j^g(\sigma;xy)}\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Basterà costruire delle formule analoghe alle (59), che stiano a queste come la (32) sta alla (4): e l'unica differenza nessuna ne ciò che in tali formule compariranno anche termini per quali nelle corrispondenti formule (60) non occorre fare alcuna integrazione per parti.

24. — Il precedente teorema ammette esso pure come quelli relativi ad $\omega_i^\cdot(xy)$ delle estensioni.

Così si supponga $\varphi(\sigma)$ dipendente anche da xy, ed x_1y_1, e si supponga che la funzione $\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)$ sia tale che le sue derivate di ordine $g-1$ siano della forma:

$$(62)\quad \frac{\partial^{g-1}\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{\partial\sigma^{g-1}}=\sum_1^{2n}\frac{\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{s_k(\sigma;x_1y_1)}+\sum_1^{2n}{}_k\,\varphi_k'(xy;\sigma;x_1y_1)\log s_k(\sigma;x_1y)+$$
$$+\phi(xy;\sigma;x_1y_1)$$

dove le φ_k, φ_k', ϕ soddisfano qualunque siano (xy) e (x_1y_1) alle solite condizioni del tipo delle (17) e (18), e che analoghe formule valgano per le derivate di ordine inferiore. Allora mediante la trasformazione (60) ed applicando i risultati dei n. 21 e 22 otterremo che la funzione:

$$(63)\qquad \omega_{i,g}(xy;x_1y_1)=\int_\gamma\frac{\varphi(xy;\sigma;x_1y_1)}{s_i^{g}(xy;\sigma)}\,d\sigma$$

la quale è finita e continua per (xy) ed (x_1y_1) interni a C, diviene infinita di ordine $\leq 1+\beta$ quando xy ed x_1y_1 vanno sul contorno. Ed in altri termini che la funzione

$$(64)\qquad r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)\,\omega_{i,g}(xy;x_1y_1)$$

è finita e continua anche sul contorno.

---

§ VII. La funzione compensatrice.

25. — Siamo ora in grado di costruire la funzione compensatrice. Ciò faremo nei primi tre numeri di questo §, mentre dimostreremo nei seguenti che la funzione ha le sue proprietà volute.

Consideriamo n sistemi di $2n$ funzioni $\lambda_i^{(1)}(s), \lambda_i^{(2)}(s), \ldots \lambda_i^{(n)}(s)$, $(i = 1, 2, \ldots 2n)$ del punto (s) variabile su γ determinate dagli n sistemi di equazioni lineari:

$$
(\alpha^{(1)}) \left\{ \begin{array}{ll}
\sum_{1}^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(1)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\frac{1}{\tau_m(s,s)} = \frac{1}{i\pi} & \sum_{1}^{2n}{}_m \lambda_m^{(1)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0 \\
\sum_{1}^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(1)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0 & \sum_{1}^{2n}{}_m \lambda_m^{(1)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0 \\
\text{-------------} & \text{-------------} \\
\sum_{1}^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(1)}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0 & \sum_{1}^{2n}{}_m \lambda_m^{(1)}(s)\frac{1}{\tau_m(s,s)} = 0
\end{array} \right.
$$

$$
(\alpha^{(2)}) \left\{ \begin{array}{ll}
\sum_{1}^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(2)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0 & \sum_{1}^{2n}{}_m \lambda_m^{(2)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0 \\
\sum_{1}^{2m}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(2)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = \frac{1}{i\pi} & \sum_{1}^{2n}{}_m \lambda_m^{(2)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0 \\
\text{-------------} & \text{-------------} \\
\sum_{1}^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(2)}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0 & \sum_{1}^{2n}{}_m \lambda_m^{(2)}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0
\end{array} \right.
$$

- -

$$
(\alpha^{(n)}) \left\{ \begin{array}{ll}
\sum_{1}^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(n)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\frac{1}{\tau_m(s,s)} = 0 & \sum_{1}^{2n}{}_m \lambda_m^{(n)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\frac{1}{\tau_m(s,s)} = 0 \\
\sum_{1}^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(n)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\frac{1}{\tau_m(s,s)} = 0 & \sum_{1}^{2n}{}_m \lambda_m^{(n)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\frac{1}{\tau_m(s,s)} = 0 \\
\text{-------------} & \text{-------------} \\
\sum_{1}^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(n)}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = \frac{1}{\pi i} & \sum_{1}^{2n}{}_m \lambda_m^{(n)}(s)\frac{1}{\tau_m(s;s)} = 0
\end{array} \right.
$$

Tali sistemi ammettono sempre una soluzione ed una sola. Infatti il determinante dei coefficienti di uno qualunque di questi sistemi è:

$$\frac{1}{\prod_1^{n} {}_i\, \tau_i(s;s)} \begin{vmatrix} -\alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \alpha_4^{n-1} & \cdots & -\alpha_{2n-1}^{n-1} & \alpha_{2n}^{n-1} \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \alpha_4^{n-1} & \cdots & \alpha_{2n-1}^{n-1} & \alpha_{2n}^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

(1)

$$= \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{\prod_1^{n} {}_i\, \tau_i(s;s)} \begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \cdots & \alpha_{2n-1}^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \cdots & \alpha_{2n-1}^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2^{n-1} & \alpha_4^{n-1} & \cdots & \alpha_{2n}^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2^{n-2} & \alpha_4^{n-2} & \cdots & \alpha_{2n}^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{\prod_1^{n} \tau_i(s;s)} \prod_{h<k} \big(\alpha_{2k-1}(s) - \alpha_{2h-1}(s)\big)\big(\alpha_{2k}(s) - \alpha_{2h}(s)\big)$$

e quindi è certo diverso da zero poichè tutte le α sono distinte.

Di più le funzioni $\lambda_{2h-1}^{(j)}(s)$ e $\lambda_{2h}^{(j)}(s)$ sono a due a due complesse coniugate (1), ed ammettono le derivate rapporto ad s dei primi $2n$ ordini finite e continue.

26. – Consideriamo allora le n funzioni:

(2) $$\Omega^{(j)}(xy;\sigma) = \sum_1^{2n}{}_m\, \lambda_m^{(j)}(\sigma)\, \zeta_m^{n-2}(xy;\sigma) \log \zeta_m(xy;\sigma).$$

Fissato σ, $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ è monodroma in (xy) almeno finchè il punto (xy) rimane in c, poichè non potrà mai avvenire

---

(1) Infatti le quantità $\lambda_{m0}^{(1)}$ complesse coniugate delle $\lambda_m^{(1)}$ soddisfanno al sistema che si ottiene da (a(1)) cambiando i coefficienti ed i termini noti nei complessi coniugati.

che (xy) faccia un giro attorno a (σ): cosicchè per determinare completamente $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ basterà fissare per ogni valore di (σ) una determinazione per i logaritmi che compaiono in (2). Tale determinazione noi prenderemo in modo affatto arbitrario colle sole condizioni che: 1° le determinazioni di $\log\varsigma_{2h-1}$ e $\log\varsigma_{2h}$ siano complesse coniugate; 2° che le determinazioni relative ai varii valori di σ variino con continuità al variare di σ, fatta naturalmente eccezione per un punto di γ, per es: per il punto $(o)\equiv(\gamma)$ in cui esse hanno un salto di $\pm 2\pi i$.

Da tutto ciò risulta che la $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ è una funzione reale dei due punti (xy) e $(\xi(\sigma)\,y(\sigma))$ finita e continua per tutti i valori di xy, σ tranne che per $\sigma=0$ ove ha un salto. Di più $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ ammette tutte le derivate che non contengano più di $2n+1$ derivazioni rapporto ad xy, e più di $2n$ derivazioni rapporto a σ finite e continue fuori che per $\sigma=0$ dove hanno un salto. Precisamente calcolando le varie derivate di $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ rapporto a xy otterremo:

$$(3)\qquad \frac{\partial^{i+k}\Omega^{(j)}(xy;\sigma)}{\partial x^i\partial y^k}=\frac{(n-2)!}{(n-i-k-2)!}\sum_{1}^{2n}{}_m\,\lambda_{m}^{(j)}(\sigma)\,\alpha_{m}^{i}(\lambda y)\,\varsigma_m^{\,n-i-k-2}\log\varsigma_m+\sum p_{m,ik}^{(j)}\log\varsigma_m+$$
$$+P_{ik}^{(j)}\qquad\qquad (i+k\leq n-2)$$

$$\sum_{1}^{2n}{}_m(-1)^m\lambda_{mo}^{(1)}\alpha_{mo}^{n-1}\frac{1}{\tau_{mo}(s;s)}=-\frac{1}{i\pi}\qquad \sum_{1}^{2n}{}_m\lambda_{mo}^{(1)}\alpha_{mo}^{n-1}\frac{1}{\tau_{mo}(s;s)}=0$$

$$\sum_{1}^{2n}{}_m(-1)^m\lambda_{mo}^{(1)}\alpha_{mo}^{n-2}\frac{1}{\tau_{mo}(s;s)}=0\qquad \sum_{1}^{2n}{}_m\lambda_{mo}^{(1)}\alpha_{mo}^{n-2}\frac{1}{\tau_{mo}(s;s)}=0$$

- -

$$\sum_{1}^{2n}{}_m(-1)^m\lambda_{mo}^{(1)}\frac{1}{\tau_{mo}(s;s)}=0\qquad \sum_{1}^{2n}{}_m\lambda_{mo}^{(1)}\frac{1}{\tau_{mo}(s;s)}=0$$

Ma ricordando che $\alpha_{2h-1o}=\alpha_{2h}$ $\alpha_{2ho}=\alpha_{2h-1}$, $\tau_{2h-1o}=\tau_{2h}$, $\tau_{2ho}=\tau_{2h-1}$ segue che questo sistema coincide col sistema $(a^{(1)})$ quando si prenda: $\lambda_{2h-1o}^{(1)}=\lambda_{2h}^{(1)}$ e $\lambda_{2ho}^{(1)}=\lambda_{2h-1}^{(1)}$.

ove come nel § V le $p^{(j)}_{m,ik}$, $P^{(j)}_{ik}$ rappresentano funzioni intere di $(x-\xi(\sigma))$, $(y-\eta(\sigma))$ con coefficienti funzioni di σ e di xy di cui le prime si annullano per $(xy)\equiv(\sigma)$;

$$(4)\qquad \frac{\partial^{i+k}\Omega^{j}(xy;\sigma)}{\partial x^{i}\partial y^{k}} = (n-2)!\sum_{1}^{2n}{}_{n}\lambda^{(j)}_{m}(\sigma)\alpha^{i}_{m}(xy)\frac{1}{S_m^{i+k-n+2}}+\sum p^{(j)}_{m,ik}\frac{1}{S_m^{i+k-n+1}}+\sum p'^{(j)}_{m,ik}\log S_m + P^{j}_{m,ik}\,{}^{(1)} \qquad (2n+1\geq i+k\geq n-1)$$

dove ancora le $p^{(j)}_{m,ik}$, $p'^{(j)}_{m,ik}$, $P^{(j)}_{ik}$ sono al solito funzioni finite e continue le quali hanno le derivate che non contengono più di $2n+1-i-k$ derivazioni rapporto ad xy nè più di $2n$ rapporto a σ.

Dalle (3) e (4) segue che le derivate di ordine $n-2, n-1, \ldots 2n, 2n+1$ di $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ divengono per $(xy)\equiv(\sigma)$ rispettivamente infinite logaritmicamente, di 1°, 2° ... $(n+2)°$, $(n+3)°$ ordine.

La $\Omega^{(j)}$ così costruita gode però di due proprietà per noi fondamentali.

1° Quando si costruisce la $\mathcal{M}\,\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$, questa per $(xy)\equiv(\sigma)$ non avrà che una singolarità di ordine $n+1$ e precisamente si potrà porre:

$$(5)\qquad \mathcal{M}\,\Omega^{(j)}(xy;\sigma) \equiv \sum p^{(j)}_{m}(xy;\sigma)\frac{1}{S_m^{n+1}(xy;\sigma)}+\sum p'^{(j)}_{m}\log S_m(xy;\sigma)+P^{(j)}(xy;\sigma).$$

Questo si verifica immediatamente mediante le formule (4).

2° Se indichiamo con $\varphi_j(\sigma)$ una funzione che soddisfaccia alle condizioni (17) e (18) del § VI, e consideriamo l'integrale:

$$(6)\qquad \Phi_j(xy) = \frac{1}{(n-2)!}\int_{\gamma}\Omega^{(j)}(xy;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma$$

questo rappresenta una funzione finita e continua insieme colle derivate dei suoi primi $n-1$ ordini anche sul contorno γ e tale che:

$$(7)\qquad \frac{\partial^{n-1}\Phi_j(s)}{\partial x^{n-i}\partial y^{i-1}} = \varepsilon_{ij}\,\varphi_j(s) + \int_{\gamma}\Delta_{j,i}(s;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma \qquad (\varepsilon_{ii}=1;\ \varepsilon_{ij}=0\ (i\neq j))$$

---

(1) Per $i+k=n-1$ manca il secondo termine nelle (4)

dove $A_{j,i}(s;\sigma)$ rappresenta una funzione avente per $(xy)\equiv(\sigma)$ una singolarità al più logaritmica. Tale enunciato si dimostra subito osservando che per (4) si ha.

$$\frac{\partial^{n-1}\phi_i(xy)}{\partial x^{n-1}\partial y^{i-1}} = \int_{\gamma}\sum_m^{2n} \frac{\lambda_m^{(j)}(\sigma)\alpha_m^{n-i}(xy)}{S_m(xy;\sigma)}\varphi_j(\sigma)\,d\sigma +$$

(8)
$$+\frac{1}{(n-2)!}\int_{\gamma}\Big[\Sigma P_{m,n-i,i}^{(j)}(xy;\sigma)\operatorname{Log} S_m(xy;\sigma) + P_{m,n-i,i-1}^{(j)}(xy;\sigma)\Big]\varphi_j(\sigma)\,d\sigma.$$

Ma per gli studii dei n. 15 - 18 (e specialmente la formula (30)) si ha:

$$\lim_{(xy)\equiv(s)}\alpha_m^{n-i}(xy)\int_{\gamma}\frac{\lambda_m(\sigma)}{S_m(xy;\sigma)}\varphi_j(\sigma) =$$

$$= \frac{(-1)^m\pi i\,\lambda_m^{(j)}(s)\,\alpha_m^{n-i}(s)}{T_m(s;s)}\varphi_j(s) + \frac{\pi}{\gamma}\frac{\alpha_m^{n-1}(s)}{T_m(s;s)}\int_{\gamma}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)\lambda_m^{(j)}(\sigma)\varphi_j(\sigma)\,d\sigma +$$

(9)
$$+\alpha_m^{n-1}(s)\int_{\gamma} l_m(s;\sigma)\lambda_m^{(j)}(\sigma)\varphi_j(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= (-1)^m\pi i\,\frac{\lambda_m^{(j)}(s)\alpha_m^{n-1}(s)}{T_m(s;s)}\varphi_j(s) + \frac{\pi}{\gamma}\,\frac{\alpha_m^{n-i}(s)\lambda_m^{(j)}(s)}{T_m(s,s)}\int_{\gamma}\operatorname{cotg}(s-\sigma)\varphi_j(\sigma)\,d\sigma +$$

$$+\alpha_m^{n-i}(s)\int_{\gamma} L_{mj}(s;\sigma)\varphi_j(\sigma)\,d\sigma$$

dove la funzione:

(10)
$$L_{mj}(s;\sigma) = \frac{\lambda_m^{(j)}(\sigma)}{S_m(s;\sigma)} - \frac{\pi}{\gamma}\,\frac{\lambda_m^{(j)}(s)}{T_m(s,s)}\operatorname{cotg}.\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)$$

è, come la $l_m(s;\sigma)$ data dalla (29) del n. 18, una funzione finita e continua insieme colle sue derivate che non contengono più di $2n-1$ derivazioni rapporto ad s nè più di $2n$ rapporto a σ, mentre quelle di queste derivate le quali sono di ordine $<2n-1$ sono finite e continue anche per $s=\sigma$, mentre quelle di ordine $k>2n-1$ divengono infinite di ordine $k-2n+1$ al più.

Portando le (9) nella (8), tenendo conto che le $\lambda^{(j)}$ soddisfano al sistema di equazioni $(a^{(j)})$, si deduce la (7) dove si ponga:

$$\Delta_{j,i}(s;\sigma)=\sum_{1}^{2n}{}_m\,\alpha_m^{n-i}(s)\,L_{mj}(s;\sigma)+\frac{1}{(n-2)!}\left\{\Sigma_m p^{(j)}_{m,n-i,i-1}(s;\sigma)\log r_m(s,\sigma)+P^{(j)}_{m,n-i,i-1}(s;\sigma)\right\}=$$

$$(11)\qquad =\sum_{1}^{2n}{}_m\,\alpha_m^{n-i}(s)\,L_{mj}(s;\sigma)+\bar\Delta_{j,i}(s;\sigma)$$

il che dimostra l'enunciato

È da notarsi che nel caso elementare si ha:

1º Le $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ ammettono le derivate che non contengono più di $2n$ derivazioni rapporto a σ, ma quante si vogliono rapporto xy.

2º Le formule (4) si arrestano al loro primo termine.

3º Si ha identicamente

$$(5)'\qquad \mathcal{M}\,\Omega^{(j)}(xy;\sigma)=0$$

4º Nelle (8) scompare (per 2º) il secondo integrale e si ha quindi in luogo della (7) la formula:

$$(7)'\qquad \frac{\partial^{n-1}\phi_j(s)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}=\varepsilon_{ij}\,\varphi_j(s)+\sum_{1}^{2n}{}_m\,\alpha_m^{n-i}\int_\gamma L_{mj}(s;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma.$$

In altri termini in (11) è $\bar\Delta_{j,i}=0$

27. Poniamo per brevità:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \psi_1(xy;\xi\eta)&=\frac{\partial^{n-1}\psi(xy;\xi\eta)}{\partial x^{n-1}}\\ \psi_2(xy;\xi\eta)&=\frac{\partial^{n-1}\psi(xy;\xi\eta)}{\partial x^{n-2}\,\partial y}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \psi_n(xy;\xi\eta)&=\frac{\partial^{n-1}\psi(xy;\xi\eta)}{\partial y^{n-1}}\end{aligned}\right.$$

Consideriamo la funzione:

$$(13)\qquad v(xy;x_1y_1)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{1}^{n}{}_j\int_\gamma \Omega^{(j)}(xy;\sigma)\,\psi_j(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma$$

Questa funzione è finita e continua insieme colle sue derivate rapporto ad xy ed x_1y_1 che non contengono più di $2n$ [illegible] derivazioni rapporto ad xy; quando i due punti [illegible] (x_1y_1) [illegible] all'interno di C, vogliamo ora studiare [illegible] quando (xy)

ed $(x_1 y_1)$ vengono su γ. E precisamente vogliamo provare che a tale funzione si può assegnare l'ufficio medesimo che nei §. II . III abbiamo assegnato altra funzione che abbiamo chiamato pure $e(xy; x_1 y_1)$. E cioè che essa è tale che

1° Le sue derivate di ordine $\leq 2n-1$ rapporto ad x ed y e l'espressione $\mathfrak{M}e(xy; x_1 y_1)$ divengono nei punti di γ singolari di ordine $\leq 1+\beta$, dove β è un numero piccolo a piacere e vogliamo dire che moltiplicate per $r(xy; x_1 y_1)^{1+\beta}$ danno un prodotto finito anche nei punti di γ.

2° La differenza $\psi(xy; x_1 y_1) - e(xy; x_1 y_1)$ e qualunque sua derivata di ordine $k \leq n-1$ rapporto ad x, y è una funzione finita e continua su γ che ammette le derivate dei primi $2n-k$ ordini rapporto all'arco di γ finite e continue od aventi al più una singolarità di ordine $1+\beta$.

È chiaro che provate queste due affermazioni potremo come nei § II e III completare la costruzione della funzione compensatrice costruendo col metodo indicato nell'Appendice § I una funzione $e(xy; x_1 y_1)$ tale che essa e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini rapporto ad xy abbiano i valori di $e(xy, x_1 y_1) - \psi(xy; x_1 y_1)$ e delle derivate analoghe, e che le derivate di ordine $\leq 2n$ abbiano al più su γ singolarità di ordine $(1+\beta)$.

Ritorneremo del resto su quest'ultimo punto nel n. 30.

28. - Le due proprietà enunciate per la $e(xy; x_1 y_1)$ sono conseguenza delle tre proprietà di $\Omega^{(i)}(xy; \sigma)$ notate nel n. 27. Così l'affermazione relativa a $\mathfrak{M}e(xy; x_1 y_1)$ risulta evidente nel caso elementare poichè avendosi allora per (5)' $\mathfrak{M}\,\Omega^{(i)}(xy; \sigma) = 0$ risulterà pure:

$$\mathfrak{M}\,e(xy; x_1 y_1) = 0 \tag{14}$$

qualunque sia (xy).

Nel caso generale mi limiterò a dimostrare l'asserto per $\mathfrak{M}e(xy;x_1y_1)$ poichè la dimostrazione è uguale o più semplice per quanto riguarda le derivate di ordine $\leq 2n-1$.

Per (5) si ha:

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{M}e(xy;x_1y_1) &= \frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\int_\gamma \mathfrak{M}G^{(j)}(xy;\sigma)\,\psi_j(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma = \\
&= \frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\sum_1^{2n}{}_m\int_\gamma p_m^{(j)}(xy;\sigma)\frac{1}{S_m^{n+1}(xy;\sigma)}\psi_j(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma + \\
&\quad + \frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\int_\gamma\left\{\sum_1^{2n}{}_m p_m'^{(j)}(xy;\sigma)\log S_m(xy;\sigma)+P^{(j)}(xy;\sigma)\right\}\psi_j(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma = \\
&= \frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\sum_1^{2n}{}_m\,\delta_{jm}(xy;x_1y_1)+\frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\,\Delta_j(xy;x_1y_1).
\end{aligned}
$$

La funzione $\Delta_j(xy;x_1y_1)$ è evidentemente sempre finita e continua perchè l'integrando ha al più una singolarità logaritmica quando (xy) viene in (σ).

Per le $\delta_{jm}(xy;x_1y_1)$ si osservi che le $p_m^{(j)}(xy;\sigma)$ ammettono le derivate finite rapporto a σ di ordine $\leq 2n$ e che le derivate rapporto a σ delle $\psi_j(\sigma;x_1y_1)$ di ordine n non sono che combinazioni lineari delle derivate di ordine $2n-1$ della $\psi(\sigma;x_1y_1)$. Quindi la $\frac{\partial^n[p_m^{(j)}(xy;\sigma)\,\psi_j(\sigma;x_1y_1)]}{\partial\sigma^n}$ è della forma:

$$\Sigma_k\lambda_k(xy;\sigma;x_1y_1)\frac{1}{S_k(\sigma;x_1y_1)}+\Sigma\lambda_k'(xy;\sigma;x_1y_1)\log S_k(\sigma;x_1y_1)+\chi(xy;\sigma;x_1y_1)$$

dove le λ χ soddisfanno a limitazioni del tipo delle (17) (18) del §.II per β comunque piccolo.

Di analoga forma saranno le derivate di ordine inferiore. Quindi $\delta_{jm}(xy;x_1y_1)$ sarà del tipo della $\omega_{jn}(xy;x_1y_1)$ data dalla (63) del §VI (n.24) onde si avrà che comunque piccolo sia β,

$$r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)\,\delta_{jm}(xy;x_1y_1)$$

resta finita anche per (xy) ed (x_1y_1) su γ. E quindi anche sarà:

$$r^{1+\beta}(xy;x_1y_1)\,\mathfrak{M}e(xy;x_1y_1)$$

sempre limitato in C e su γ.

Per le derivate di ordine $\leq 2n-1$ vale lo stesso ragionamento invece si può dire che le derivate di ordine $\leq 2n-3$ restano finite anche al contorno.

29.- Per dimostrare la seconda delle proprietà enunciate per la $e(xy;x_1y_1)$ basterà evidentemente limitarsi a dimostrare che le n derivate di ordine $n-1$ di $\psi(xy,x_1y_1)-e(xy;x_1y_1)$ sono sugl. funzioni finite e continue insieme colle loro derivate dei primi $n-1$ ordini rapporto all'arco od hanno al più una singolarità di ordine $1+\delta$, perchè allora l'analoga proprietà risulterà evidente anche per le derivate di ordine $< n-1$.

Ora si ha per le formule (7) e (12)

$$(16)\quad \left[\frac{\partial^{n-1}[e(xy;x_1y_1)-\psi(xy;x_1y_1)]}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)=p}=\int_{y}\sum_{i}^{n}{}_{j}\,\Delta_{j,i}(s;\sigma)\,\psi_j(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma$$

dove le $\Delta_{j,i}(s;\sigma)$ sono date da (11). Ma poichè $a_{in}(s)$, e $L_{ij}(s;\sigma)$ hanno le derivate dei primi $2n-1$ ordini rapporto ad s finite e continue, a maggior ragione poichè supponiamo $n\geq 2$ avranno le derivate di ordine $\leq n+1$ finite e continue onde non resta che da considerare le derivate di ordine $\leq n-1$ di $\int_{y}\sum_{i}^{n}{}_{j}\bar{\Delta}_{j,i}(s,\sigma)\,\psi_j(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma$. Ma consideriamo addirittura le derivate rapporto ad xy delle funzioni:

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{y}\left\{\Sigma_m\, p^{(i)}_{m,n-i-i-1}(xy;\sigma)\log S_m(xy;\sigma)+P^{(i)}_{m,n-i-i-1}(xy,\sigma)\right\}\psi_j(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma.$$

Noi vediamo immediatamente che una derivata $k$esima di tale funzione è della forma:

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{y}\left\{\Sigma_m\,\bar{p}_m(xy;\sigma)\frac{1}{S_m^{k}(xy;\sigma)}+\Sigma_m\,\bar{p}'_m(xy;\sigma)\log S_m(xy;\sigma)+\bar{P}_m(xy;\sigma)\right\}\psi_j(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma$$

dove le $\bar{p}_m$, $\bar{p}'_m$, $\bar{P}_m$ sono funzioni dipendenti anche dagli indici i ed j, le quali ammettono tutte le $2n$ime derivate rapporto a σ. E quindi ragionando su queste allo stesso modo che poi avere su $\mathfrak{M}e(xy;x_1y_1)$ e sulle altre derivate di $e(xy;x_1y_1)$ si vede che una tale funzione non può avere quando (xy) viene in (s) una singolarità di ordine maggiore di quella di $\frac{1}{r^{1+\beta}(s;x_1y_1)}$, β essendo un numero piccolo a piacere. Anzi per $h \leq n-1$ tali derivate sono senz'altro finite anche su γ.

30. - In forza dei teoremi del § I dell'Appendice possiamo ora, come si disse al n. 27 costruire una funzione $e_1(xy;x_1y_1)$ tale che:

1º ammetta in C le derivate dei primi $2n+1$ ordini finite e continue rapporto ad xy entro C, e le derivate di ordine $\leq 2n-3$ siano finite e continue anche su γ e quelle di ordine $2n-2, 2n-1, 2n$ divengono su γ infinite di ordine $1+\beta$, β essendo un numero piccolo a piacere.

2º quando xy è su γ essa e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini prendano i valori di $e(s;x_1y_1)-\psi(s;x_1y_1)$ e delle derivate corrispondenti.

Quale funzione compensatrice prenderemo:

$$g(xy;x_1y_1) = -e(xy;x_1y_1) + e_1(xy;x_1y_1) \tag{17}$$

Essa invero prende insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini i valori di $-\psi(xy;x_1y_1)$ e delle derivate corrispondenti: ammette all'interno di C le derivate dei primi $2n+1$ ordini finite e continue, ha le derivate dei primi $2n-1$ ordini anche su γ, con singolarità di ordine inferiore ad $1+\beta$ e parimenti la funzione:

$$\mathfrak{M}g(xy;x_1y_1) = -\mathfrak{M}e(xy;x_1y_1) + \mathfrak{M}e_1(xy;x_1y_1) = h(xy;x_1y_1) \tag{18}$$

ha al contorno essa pure una singolarità di ordine $\leq 1+\beta$.

Onde ricordando i teoremi del n. 14 se consideriamo l'integrale:

$$u(xy) = \iint_C \left[\psi(xy;x_1y_1) + g(xy;x_1y_1)\right] \varphi(x_1y_1)\, dx_1 dy_1, \tag{19}$$

dove $\varphi(xy)$ ha le derivate prime finite e continue entro C, esso rappresenta una funzione tale che:

1º è nulla insieme colle sue derivate dei primi n-1 ordine sup.

2° le sue derivate di ordine $\leq 2n-1$ esistono in C e su ρ e sono date da:

$$(20)\qquad \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = \iint_C \left[\frac{\partial^{i+k}\psi(xy;x_1y_1)}{\partial x^i\partial y^k} + \frac{\partial^{i+k} g(xy;x_1y_1)}{\partial x^i \partial y^k}\right]\varphi(x_1y_1)\,dx_1dy_1$$

3° ammette le derivate $2n$ esime entro C e la funzione $\mathfrak{M}u$ è data da:

$$(21)\qquad \mathfrak{M}u = \varphi(xy) + \iint_C \left[k(xy;x_1y_1)+h(xy;x_1y_1)\right]\varphi(x_1y_1)\,dx_1 y_1$$

ed ammette a sua volta entro C le derivate prime finite e continue.

---

§ VIII. – Il caso elementare.

31. – Le considerazioni degli ultimi n.i si semplificano nel caso elementare (1).

Intanto grazie alle osservazioni finali del n. 26 e in special modo alla formula $(\gamma)'$, la (18) diviene

$$(21)\qquad \left[\frac{\partial^{n-1}\{e(xy;x_1y_1)-\psi(xy;x_1y_1)\}}{\partial x^{n-i}\partial y^{i-1}}\right]_{(xy\equiv(s))} = \int_\rho \sum_1^{c}{}_j \sum_1^{2n}{}_m \alpha_m^{n-i}(s)L_{mj}(s;\sigma)\psi_j(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma = e_{1,i}(s;x_1y_1)$$

Ricordando che $L_{mj}(s;\sigma)$ ammette tutte le derivate che non contengono più di $2n-1$ derivazioni rispetto ad s e rispetto a σ, e che quelle di esse che sono di ordine $\leq 2n-1$ sono finite e continue, potremmo già dedurre parecchie conseguenze per la funzione $e_1(xy;x_1y_1)$ costruita in (30), in particolare che la $e_1(xy;x_1y_1)$ ammette le prime $2n+1$ derivate rispetto ad xy finite e continue anche su ρ. (Poichè i valori delle derivate $(n-1)^e$ assegnati al contorno hanno le derivate dei primi $2n-1$ ordini e si suppone $n \geq 2$). Ma a noi per i nostri scopi converrà modificare ulteriormente la costruzione della funzione compen-

(1) Per caso elementare è stato definito quello che ... chiamano ... [illegible]

sarme in modo analogo a quanto si fece al n 8.

Consideriamo perciò la funzione

$$(2)\qquad e^{(1)}(xy;x_1y_1)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_i\int_\gamma \Omega^{(i)}(xy;\sigma)\,e_{1,i}(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma$$

si avrà come per la (13) del paragrafo VII che questa funzione soddisfa, nel caso elementare, all'equazione:

$$(3)\qquad \mathfrak{M}\,e^{(1)}(xy;x_1y_1)=0$$

ed inoltre come al n. 29 si vede che:

$$(4)\qquad \left[\frac{\partial^{n-1} e^{(1)}(xy,x_1y_1)}{\partial x^{n-i}\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)} = e_{1,i}(s;x_1y_1)+\sum_1^n{}_l\int_\gamma\left[\sum_1^{2n}\alpha_m^{n-i}L_{ml}(s;\sigma)\right]e_{1,l}(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma=$$

$$= e_{1,i}(s;x_1y_1)+e_{1i}^{(1)}(s;x_1y_1).$$

Se quindi si pone

$$(5)\qquad \bar{e}(xy;x_1y_1)=e(xy;x_1y_1)-e^{(1)}(xy;x_1y_1)$$

si avrà come per la (13) del § VII:

$$(6)\qquad \mathfrak{M}\,\bar{e}(xy;x_1y_1)=0$$

ed inoltre per (1) e (4) si avrà:

$$(7)\qquad \left[\frac{\partial^{n-1}\left[\bar{e}(xy;x_1y_1)-\psi(xy;x_1y_1)\right]}{\partial x^{n-i}\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)}=-e_{1i}^{(1)}(s;x_1y_1)$$

e per compiere la costruzione della funzione compensatrice basterà trovare una funzione $e_1^{(1)}(xy;x_1y_1)$ che su γ prenda insieme colle sue derivate di ordine $n-1$ i valori di $\bar{e}(xy;x_1y_1)-\psi(xy;x_1y_1)$, ed in altri termini tale che le sue derivate di ordine $n-1$ siano uguali alle $e_{1,i}^{(1)}(s;x_1y_1)$. E porre poi:

$$(8)\qquad g(xy;x_1y_1)=-\bar{e}(xy;x_1y_1)-e_1^{(1)}(xy;x_1y_1)$$

Studiamo meglio la funzione $e_{1,i}^{(1)}(s;x_1y_1)$. Se poniamo:

$$(9)\qquad \mathcal{L}_{e_i}(s;\sigma)=\int_\gamma\sum_1^n{}_{l_1}\sum_1^{2n}{}_{m,m_1}\alpha_{m_1}^{n-i}\alpha_m^{n-i_1}L_{m_1l_1}(s;\sigma_1)\,L_{m,l}(\sigma_1;\sigma)\,d\sigma_1$$

avremo evidentemente da (4) e (1):

$$(10)\qquad e_{1,i}^{(1)}(s;x_1y_1)=\int_\gamma\sum_1^n{}_l\,\mathcal{L}_{l,i}(s;\sigma)\,\psi_l(\sigma;x_1y_1)\,d\sigma$$

… dimostrazioni … precedenti … che ad esso sono già state fatte ai n. 13 (… 7)), 14 (… 9), 26 (form. (5'), (7')), 28 (form. 14)).

Siccome la funzione $L_{n,i}(s;\sigma)$ ammette le derivate dei primi $2n-1$ ordini finite e continue rapporto ad s, e la $L_{n,i}(\sigma;\rho)$ ammette le derivate dei primi $2n-1$ ordini finite e continue rapporto a σ, la funzione $\mathcal{L}_{1,i}(s;\sigma)$ sarà una funzione finita e continua insieme con tutte le sue derivate di ordine $\leq 4n-2$ le quali non contengono più di $2n-1$ derivazioni rapporto ad s, nè più di $2n-1$ rapporto a σ. Onde intanto anche $e_{1,i}^{(1)}(s;x_1y_1)$ avrà le derivate dei primi $2n-1$ ordini rapporto ad s.

Ma possiamo ancora studiare le derivate rapporto ad x_1y_1. Ricordando le (12) del n. 27 e le formule del §. V concludiamo che le derivate rapporto ad x_1y_1 di $\psi_2(\sigma;x_1y_1)$ di ordine quanto si vuole elevato, esistono, e quelle di ordine $\leq n-1$ sono sempre finite ed hanno al più una singolarità logaritmica, mentre quelle di ordine $k > n-1$ sono della forma:

$$(11) \qquad \frac{\partial^k \psi_1(\sigma;x_1y_1)}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}} = \frac{i}{2\pi}\sum_{1}^{2n}{}_{m}\,\frac{a_m^{k_1+n-j}\, d_m}{S_m^{k-n+1}(\sigma;x_1y_1)} \qquad (k_1+k_2=k).$$

Onde intanto segue che le (10) e le loro derivate rapporto ad s ammettono all'interno di C tutte le derivate rapporto ad x_1y_1. Ed applicando i teoremi dei n. 19, 24, 25 per le proprietà notate delle derivate di $\mathcal{L}_{1,i}(s;\sigma)$ si avrà di più per (11) che esistono anche e sono finite e continue anche su J le derivate dei primi $3n-2$ ordini rapporto ad x_1y_1 delle (10) e delle loro derivate rapporto ad s dei primi $2n-1$ ordini.

Queste proprietà delle $e_{1,i}^{(1)}(s;x_1y_1)$ si riflettono in altrettante proprietà che possiamo ammettere soddisfaccia la $e_1^{(1)}(xy;x_1y_1)$. Precisamente noi potremo ammettere che la $e_1^{(1)}(xy;x_1y_1)$ abbia le derivate dei primi $2n$ ordini finite e continue.[1]

---

(1) Dico $2n$ e non $3n-2$ ($\geq 2n$ se come supponiamo, n maggiore di 1) poichè

anche su γ rapporto a xy; e che sia essa che le sue derivate dei primi $2n$ ordini rapporto a x_1y_1 abbiano le derivate dei primi $3n-2 > 2n$ ordini rapporto a x_1y_1. Onde per (8) e (6) si avrà che:

$$\mathcal{M}g(xy;x_1y_1) = \mathcal{M}e_1^{(1)}(xy;x_1y_1) = h(xy;x_1y_1) \tag{12}$$

sarà una funzione che in C e su γ ha le derivate rapporto a x_1y_1 dei primi $2n$ ordini finite e continue, e all'interno di C ha le derivate prime finite e continue, rapporto ad x_1y_1.

32. — Nel caso elementare è facile dimostrare il teorema di unicità.

Lemma. Sia $\mathcal{D}u = 0$ un'equazione lineare alle derivate parziali di ordine ν a coefficienti costanti[1]. Se una funzione $u(xy)$ è soluzione della $\mathcal{D}u = 0$ ed è nulla sopra un contorno chiuso γ insieme colle sue derivate dei primi $\nu-1$ ordini, essa è nulla nel campo C interno a γ.[2]

---

nell'Appendice (§ I) dimostro solo che per una funzione costruita con simili dati esistono le derivate in numero che non supera mai il numero delle derivate che hanno le funzioni che determinano il contorno diminuito di un'unità.

(1). Il ragionamento che segue si estenderebbe anche facilmente al caso dei coefficienti analitici.

(2). In altri termini il problema di Cauchy ammette una sola soluzione. Simile teorema dimostrò l'Holmgren (Öfversigt of Kongl. Vetenskaps Akad. Förh. 1901 pag. 91-103 riprodotto in Hadamard Leçons sur la Propagation des ondes etc. - Nota 1 pag. 348 e ss.) supponendo il contorno γ aperto e dimostrando che in un intorno sufficientemente piccolo della curva γ la soluzione è necessariamente nulla. Qui aggiungendo l'ipotesi, ai nostri scopi

Infatti la $\mathcal{P}u$ è aggiunta di se stessa: onde si avrà, dette z e z_1 due qualunque funzioni finite e continue assieme colle loro derivate di ordine $\nu-1$ in C e su γ, ed aventi le derivate di ordine ν integrabili in C:

(13) $$\iint_C \left[z\,\mathcal{P}z_1 - z_1\,\mathcal{P}z \right] dx\,dy = \int_\gamma \mathcal{H}(z;z_1)\,ds$$

dove $\mathcal{H}(z;z_1)$ è un'espressione bilineare nelle derivate di z e z_1 di ordine $\le \nu-1$ e tale che la somma degli ordini di derivazione è sempre $= \nu-1$.

Se nella (13) poniamo $z_1 = u$, sarà $\mathcal{P}u = 0$, inoltre $\mathcal{H}(z;u)$ sarà nulla qualunque sia z, poichè su γ u è nulla colle sue derivate di ordine $\le \nu-1$. Quindi (13) ci dice allora che qualunque sia z deve essere

(14) $$\iint_C u\,\mathcal{P}z\,dx\,dy = 0$$

Il che non può essere se non è $u=0$.(1)

Teorema di unicità. – Ciò posto, il noto ragionamento di Dirichlet-Riemann che serve a stabilire il teorema di unicità per l'equazione $\Delta_2 u = 0$, serve facilmente a stabilirlo an-

---

opportuna, che γ sia chiusa, riusciamo a dire di più che u è nulla in tutto c.

(1) L'affermazione è intuitiva. Possiamo precisarne la dimostrazione nel modo seguente. Sia $u \neq 0$ in un punto P, ad es. $u>0$, sia $[R]$ un cerchio di raggio R e centro P entro cui u sia >0 e sia $f(xy)$ una funzione continua nulla all'esterno di $[R]$, e >0 all'interno. Sarà $\iint_C u f(xy)\,dx\,dy > 0$. Possiamo allora costruire un polinomio $f_1(xy)$, che differisca da $f(xy)$ tanto poco che sia ancora $\iint_C u f_1(xy)\,dx\,dy > 0$. Basterà allora mostrare che esiste una soluzione $z(xy)$ di $\mathcal{P}z = f_1(xy)$ regolare in tutto c perchè tale conclusione venga a contraddire a (14). Ora, essendo $\mathcal{P}z$ a coefficienti costanti e $f_1(xy)$ un polinomio, si può facilmente soddisfare a $\mathcal{P}z = f_1(xy)$, prendendo per z un polinomio e quindi una funzione regolare in tutto il piano.

come in questo caso: a dimostrare cioè che nel caso elementare esiste al più una soluzione la quale insieme colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ si annulla al contorno. Basterà mostrare perciò che non esiste una soluzione $\neq 0$ dell'equazione

$$(15)\qquad \mathfrak{M}u = \Sigma a_{i\,2n-i}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^i \partial y^{2n-i}} = 0$$

che si annulli colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ su γ. Infatti osserviamo che la forma binaria quadratica definita positiva $\Sigma a_{i\,2n-i}\alpha^i\beta^{2n-i}$ si può porre sotto la forma di somma di due quadrati

$$(16)\qquad \sum_0^{2n} a_{i\,2n-i}\alpha^i\beta^{2n-i} = \left[\sum_0^n{}_i\, \delta_{i\,n-i}\alpha^i\beta^{n-i}\right]^2 + \left[\sum_0^n{}_i\, \delta'_{i\,n-i}\alpha^i\beta^{n-i}\right]^2$$

le $\delta_{i\,n-i}$, $\delta'_{i\,n-i}$ essendo costanti. Onde si avrà l'identità

$$\mathfrak{M}u \equiv \left(\sum_0^n{}_i\, \delta_{i\,n-i}\frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\right)\left(\sum_0^n{}_i\, \delta_{i\,n-i}\frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\right) +$$
$$+\left(\sum_0^n{}_i\, \delta'_{i\,n-i}\frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\right)\left(\sum_0^n{}_i\, \delta'_{i\,n-i}\frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\right)$$

Se ora si considera l'integrale

$$(17)\qquad Ju \equiv \iint_C \left[\left\{\sum_0^n{}_i\, \delta_{i\,n-i}\frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\right\}^2 + \left\{\sum_0^n{}_i\, \delta'_{i\,n-i}\frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\right\}^2\right] dx\,dy$$

si ottiene facilmente coi soliti procedimenti di integrazione per parti l'identità

$$(18)\qquad Ju = \int_\gamma \mathfrak{L}u\,ds + \iint_C u\,\mathfrak{M}u\,dx\,dy$$

dove $\mathfrak{L}u$ indica una forma bilineare nelle derivate della u tale che la somma degli ordini di derivazione in ogni termine è $2n-1$. In ogni termine di $\mathfrak{L}u$ esiste quindi una derivata almeno di ordine $\leq n-1$. Se quindi u è nulla su γ colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ è $\mathfrak{L}u = 0$: e se è soluzione di (15) per (18) dovrà essere $Ju = 0$: e quindi per (17) dovrà aversi

$$(19)\qquad \sum_0^n{}_i\, \delta_{i\,n-i}\frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^{n-i}} = 0 \qquad\qquad \sum_0^n{}_i\, \delta'_{i\,n-i}\frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^{n-i}} = 0$$

Ricordando che u è nulla insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini su γ, basta applicare il lemma precedente prendendo una di queste espressioni (19) come equazione $\mathcal{D}_H u = 0$ per concludere che è $u = 0$ in tutto C, c. q. e. d.

33. - Prima di passare al teorema di esistenza conviene aggiungere qualche osservazione relativa alla formula (19) nel caso in cui come $\mathcal{D}$ si prenda la $\mathcal{M}$. Si avrà allora:

$$(20) \qquad \iint_C \left[z \mathcal{M} z_1 - z_1 \mathcal{M} z \right] dx\,dy = \int_\gamma \mathcal{H}(z; z_1)\, d\sigma$$

ed essendo $\mathcal{M} z$ omogenea, la $\mathcal{H}(z; z_1)$ sarà essa pure omogenea; vogliamo dire che la somma degli ordini delle due derivate di z e di z_1 che compaiono in ciascuno dei termini di $\mathcal{H}(z; z_1)$ è costante ed $= 2n-1$. Porremo quindi:

$$(21) \qquad \mathcal{H}(z; z_1) = \mathcal{H}_{0\,2n-1}(z; z_1) + \mathcal{H}_{1\,2n-2}(z; z_1) + \dots + \mathcal{H}_{2n-1\,0}(z; z_1)$$

dove $\mathcal{H}_{i\,2n-i-1}(z; z_1)$ è un polinomio bilineare nelle derivate di ordine i di z e di ordine $2n-i-1$ di z_1. Ad $\mathcal{H}(z; z_1)$ possiamo assegnare le forme più varie diversamente ordinando le integrazioni per parti che servono a dedurre la (20): per es.: per fissare le idee possiamo fare in modo che indicando con t_σ ed n_σ le direzioni positive della tangente e della normale a γ in (σ), sia

$$(22) \qquad \begin{aligned} \mathcal{H}_{i\,2n-i-1}(z(\sigma); z_1(\sigma)) &= (-1)^i \frac{\partial^i z}{\partial x^i} \sum_0^{2n-i-1}{}_l\, a_{2n-l\,l} \frac{\partial^{2n-i-1} z_1}{\partial x^{2n-l-i-1} \partial y^l} \cos(n_\sigma x) + \\ &\quad + (-1)^{2n-i-1} \frac{\partial^{2n-i-1} z_1}{\partial y^{2n-i-1}} \sum_0^i{}_l\, a_{l\,2n-l} \frac{\partial^i z}{\partial x^l \partial y^{i-l}} \cos(n_\sigma y)^{(1)} \end{aligned}$$

Trasformiamo questa espressione di $\mathcal{H}_{i\,2n-i-1}(z; z_1)$ col sostituire alle derivate secondo x ed y le derivate secondo n_σ e t_σ: ciò che si fa mediante le formule:

$$(23) \qquad \frac{\partial^j}{\partial x^{j_1} \partial y^{j_2}} = \left[\frac{\partial}{\partial t_\sigma} \cos(n_\sigma y) + \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \cos(n_\sigma x) \right]^{j_1} \left[-\frac{\partial}{\partial t_\sigma} \cos(n_\sigma x) + \frac{\partial}{\partial n_\sigma} \cos(n_\sigma y) \right]^{j_2}$$

---

(1) Si ottiene questa espressione partendo da $\iint_C z \mathcal{M} z_1\, dx\,dy$ ed integrando per parti ciascun termine quante volte è possibile rapporto ad x e le residue rapporto ad y.

dove nel secondo membro le potenze ed i prodotti si debbono fare colle solite leggi simboliche: $\frac{\partial^h}{\partial t_\sigma^h}\frac{\partial^k}{\partial t_\sigma^k}=\frac{\partial^{h+k}}{\partial t_\sigma^{h+k}}$, $\frac{\partial^h}{\partial t_\sigma^h}\frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^k}=\frac{\partial^{h+k}}{\partial t_\sigma^h \partial n_\sigma^k}$, etc.

La $\mathcal{K}_{i\,2n-i-1}$ diverrà una espressione bilineare nelle $\frac{\partial^i z}{\partial t_\sigma^j \partial n_\sigma^{i-j}}$, $\frac{\partial^{2n-i-1} z_1}{\partial t_\sigma^j \partial n_\sigma^{2n-i-j-1}}$. Avremo, eseguendo i calcoli

$$\mathcal{K}_{i\,2n-i-1}(z(\sigma), z_1(\sigma)) = (-1)^i\left[\Sigma a_{2n-l\,l}\cos^{2n-l}(n_\sigma x)\cos^l(n_\sigma y)\right]\frac{\partial^i z}{\partial n_\sigma^i}\frac{\partial^{2n-i-1} z_1}{\partial n_\sigma^{2n-i-1}}+\ldots=$$

$$(24)\qquad =(-1)^i\,\zeta(\sigma)\frac{\partial^i z}{\partial n_\sigma^i}\frac{\partial^{2n-i-1} z_1}{\partial n_\sigma^{2n-i-1}}+\ldots\ldots$$

dove nei termini tralasciati una almeno delle due derivate contiene una derivazione rapporto a t_σ. Risulta da (24) ricordando che la forma (16) è definita positiva, che la $\zeta(\sigma)$ e cioè il coefficiente di $\frac{\partial^i z}{\partial n_\sigma^i}\frac{\partial^{2n-i-1} z_1}{\partial n_\sigma^{2n-i-1}}$ è sempre diverso da 0.

Conviene notare il significato delle derivate rapporto a t_σ ed n_σ qui introdotte. Esse sono legate colle derivate rapporto all'arco σ dalle formule:

$$\frac{\partial}{\partial t_\sigma}=\frac{\partial}{\partial \sigma} \qquad\qquad \frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^{k-1}\partial t_\sigma}=\frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^{k-1}\partial\sigma},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_\sigma^2}=\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}-\frac{d^2y}{d\sigma^2}\frac{1}{\frac{dx}{d\sigma}}\frac{\partial}{\partial n_\sigma} \qquad\qquad \frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^{k-2}\partial t_\sigma^2}=\frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^{k-2}\partial\sigma^2}-\frac{d^2y}{d\sigma^2}\frac{1}{\frac{dx}{d\sigma}}\frac{\partial^{k-1}}{\partial n_\sigma^{k-1}}$$

- -

E quindi le derivate rapporto a t_σ differiscono da quelle rapporto a σ per derivate di ordine inferiore. Onde si ha che appunto come avviene per le derivate rapporto all'arco σ, assegnati sopra la curva γ i valori delle derivate di ordine $\leq k-1$ di una funzione, saranno pure noti i valori delle derivate di ordine k che contengono una derivazione almeno rapporto a t_σ, mentre restano pienamente arbitrari i valori delle derivate di ordine k fatte rapporto ad n_σ soltanto.

34. - Riprendiamo ora lo studio iniziale del teorema che-

sistenza. Consideriamo la funzione

$$(25) \qquad u(xy) = \iint_C \left[\psi(xy;x_1y_1) + g(xy;x_1y_1)\right]\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1$$

Nel nostro caso per la (12) del n. 31 e la (10) del n. 14 si avrà che la u, oltre ad annullarsi sul contorno γ insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, ammette le derivate di ordine $2n$ tosto che $\varphi(xy)$ ha le derivate prime finite; ed è tale che.

$$(26) \qquad \mathcal{M}u(xy) = \varphi(xy) + \iint_C h(xy;x_1y_1)\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1,$$

onde, affinchè essa sia soluzione dell'equazione

$$(27) \qquad \mathcal{M}u = f(xy),$$

occorre che $\varphi(xy)$ sia soluzione dell'equazione integrale

$$(28) \qquad \varphi(xy) + \iint_C h(xy;x_1y_1)\varphi(x_1y_1)\,dx_1dy_1 = f(xy).$$

Ed inversamente se (28) è risolubile, e se $f(xy)$ ha le derivate prime, anche la $\varphi(xy)$ ha le derivate prime, e la $u(xy)$ data da (25) è realmente soluzione di (27). Cosicchè se l'equazione (28) ha determinante $\neq 0$, essa avrà sempre soluzione ed il teorema di esistenza sarà dimostrato.

Ma l'equazione (28) può avere determinante nullo; ma come abbiamo notato al Cap. I ciò può dipendere benissimo da una inopportuna scelta della funzione compensatrice $g(xy;x_1y_1)$. Si tratta di mostrare che si può sempre modificarla per modo di giungere ad un'equazione integrale con determinante diverso da 0.

35. - Se la (28) ha determinante nullo esisteranno m funzioni eccezionali in (x_1y_1) ed m in (xy) finite e continue in C e su γ, linearmente indipendenti: chiamiamo $\pi_1(xy), \pi_2(xy), \dots \pi_m(xy)$ le prime, $\rho_1(xy), \rho_2(xy), \dots \rho_m(xy)$ le seconde: le $\pi_i(xy)$ saranno soluzioni dell'equazione:

$$(29) \qquad \pi(x_1y_1) + \iint_C h(xy;x_1y_1)\pi(xy)\,dx\,dy = 0,$$

e altre dette,

$$p(xy)+\iint_C h(xy;x_1y_1)p(x_1y_1)dx_1dy_1=0$$

Notiamo che le $\pi(x_1y_1)$ soluzioni di (29) ammettono necessariamente tutte le derivate rapporto ad x_1y_1 dei primi $2n$ ordini finite e continue in C e su γ. Infatti basta rammentare che la $h(xy;x_1y_1)$ ammette le derivate rapporto ad x_1y_1 dei primi $2n$ ordini.

Ciò posto consideriamo m funzioni $v_1(xy), v_2(xy), \dots v_m(xy)$, funzioni finite e continue insieme colle loro derivate dei primi $2n+1$ ordini in C e su γ, nulle su γ insieme colle loro derivate dei primi $n-1$ ordini che per ora lasciamo indeterminate. La funzione:

$$g(xy;x_1y_1)+\sum_1^m{}_i\, v_i(xy)p_i(x_1y_1)$$

soddisfa ancora alle proprietà della funzione compensatrice: onde ancora la funzione:

(30) $$u(xy)=\iint_C\Big[\psi(xy;x_1y_1)+g(xy;x_1y_1)+\sum_1^m{}_i\, v_i(xy)p_i(x_1y_1)\Big]\varphi(x_1y_1)dx_1dy_1$$

sarà nulla su γ colle sue derivate d'ordine $\leq n-1$ e perchè soddisfi a (27) occorre che la $\varphi(xy)$ ammetta le derivate prime finite e continue e sia soluzione dell'equazione

(31) $$\varphi(xy)+\iint_C\Big[h(xy;x_1y_1)+\sum_1^m{}_i\, \mathfrak{M}\, v_i(xy)p_i(x_1y_1)\Big]\varphi(x_1y_1)dx_1dy_1=f(xy)$$

e basterà scegliere le $v_i(xy)$ per modo che il determinante formato colle:

$$\alpha_{ij}=\iint_C \mathfrak{M}\, v_i(xy)\cdot\pi_j(xy)\,dxdy$$

sia diverso da zero per mostrare che l'equazione (31) ha soluzione.(1)

Come al n. 6 basterà perciò provare che presa una qualunque combinazione lineare $\pi(xy)$ delle $\pi_i(xy)$ e cioè una

---

(1) Anche il determinante delle $k_{ij}=\iint_C p_i(xy)p_j(xy)\,dxdy$ è certo $\neq 0$.

qualunque funzione eccezionale in $(x_1 y_1)$ di (31), diversa da zero, è sempre possibile trovare una $v(xy)$ nulla su γ colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ tale che:

$$(32) \qquad x = \iint_c \mathfrak{M}\, v(xy) \cdot \pi(xy)\, dx\, dy \neq 0 .$$

Ma siccome le $\pi(xy)$ hanno tutte le derivate dei primi $2n$ ordini si può applicare la (20): e ricordando che la $v(xy)$ è nulla su γ insieme colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ sarà:

$$\mathcal{K}_{n\,n-1}(\pi, v) = \mathcal{K}_{n+1\,n-2}(\pi, v) = \ldots = \mathcal{K}_{2n-1\,0}(\pi, v) = 0$$

Onde si otterrà:

$$(33) \quad x = \iint_c v(xy)\,\mathfrak{M}\pi(xy)\, dx\, dy + \int_\gamma \left[\mathcal{K}_{0\,2n-1}(\pi, v) + \mathcal{K}_{1\,2n-2}(\pi, v) + \ldots + \mathcal{K}_{n-1\,n}(\pi, v)\right] d\sigma$$

Affinchè sia $x = 0$ qualunque sia $v(xy)$ occorrerà quindi che separatamente si annullino l'integrale di area e l'integrale curvilineo di (33). Ma perchè l'integrale di area sia nullo occorre che sia:

$$(34) \qquad 0 = \mathfrak{M}\pi\,(xy)$$

Passiamo ad esaminare quali condizioni si richiedono perchè sia nullo l'integrale curvilineo. Siccome la $v(xy)$ deve soddisfare alla sola condizione di essere nulla sul contorno insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, restano ancora arbitrarii i valori delle: $\frac{\partial^n v(\sigma)}{\partial n_\sigma^n}\ \frac{\partial^{n+1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n+1}} \ldots \frac{\partial^{2n-1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-1}}$. Fissiamo che debba essere

$$\frac{\partial^n v(\sigma)}{\partial n_\sigma^n} = \frac{\partial^{n+1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n+1}} = \ldots = \frac{\partial^{2n-2} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-2}} = 0 .$$

Sarà per (24):

$$\mathcal{K}_{n-1\,n}(\pi, v) = \mathcal{K}_{n-2\,n+1}(\pi, v) = \ldots = \mathcal{K}_{1\,2n-2}(\pi, v) = 0$$

$$\mathcal{K}_{0\,2n-1}(\pi, v) = \zeta(\sigma)\,\pi(\sigma)\,\frac{\partial^{2n-1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-1}}$$

Onde poichè $\zeta(\sigma) \neq 0$ e $\frac{\partial^{2n-1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-1}}$ è completamente arbitraria, affinchè si abbia $x = 0$ e cioè

$$0 = \int_\gamma \left[\mathcal{K}_{0\,2n-1}(\pi, v) + \ldots + \mathcal{K}_{n-1\,n}(\pi, v)\right] d\sigma = \int_\gamma \zeta(\sigma)\, \frac{\partial^{2n-1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-1}}\, d\sigma$$

dovrà essere:

(35) $$\pi(\sigma)=0$$

Sarà allora identicamente qualunque sia v

(36) $$\mathcal{X}_{0\,2n-1}(\pi, v)=0$$

Poniamo ora quale v una funzione per cui sia:

$$\frac{\partial^n v(\sigma)}{\partial n^n}=\frac{\partial^{n+1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n+1}}=\dots=\frac{\partial^{2n-3} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-3}}=0$$

Per queste ipotesi e per (36) e (35) sarà:

$$\mathcal{X}_{n-1\,n}(\pi, v)=\mathcal{X}_{n-2\,n+1}(\pi, v)=\dots=\mathcal{X}_{2,2n-3}(\pi, v)=0 \qquad \mathcal{X}_{0\,2n-1}(\pi, v)=0$$

$$\mathcal{X}_{1,2n-2}(\pi, v)=\zeta(\sigma)\frac{\partial\pi(\sigma)}{\partial n_\sigma}\frac{\partial^{2n-2} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-2}}$$

e perchè $\dfrac{\partial^{2n-2} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-2}}$ è arbitraria perchè sia $\mathcal{X}=0$ dovrà essere:

(37) $$\frac{\partial\pi(\sigma)}{\partial n_\sigma}=0$$

Così procedendo si dimostra che perchè sia sempre $\mathcal{X}=0$ la $\pi(xy)$ dovrà soddisfare alla (34) ed alle:

(38) $$\pi(\sigma)=\frac{\partial\pi(\sigma)}{\partial n_\sigma}=\dots\dots=\frac{\partial^{n-1}\pi(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n-1}}=0$$

ossia dovrà su σ annullarsi colle sue derivate d'ordine $\leq n-1$. Pel teorema di unicità dimostrato nel n. 32, segue che dovrà essere $\pi(xy)=0$, il che è contro l'ipotesi fatta sopra che fosse $\pi(xy)$ diversa da zero:

È quindi dimostrato completamente il teorema di unicità nel caso elementare.

---

§ IX. – Il caso generale.

36. – Nel caso generale come già è stato previsto nell'introduzione, il risultato non è, nè può essere, così netto, poichè esistono dei casi eccezionali in cui il teorema di esistenza non è vero.

Per ovviare alla difficoltà che da questo fatto proviene introduciamo nell'equazione data:

(1) $$\mathcal{E}u \equiv \mathcal{M}u+\mathcal{N}u = f(xy)$$

$$(1) \qquad \mathfrak{M}u = \sum_{0}^{2n} a_{i\,2n-i}(xy)\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^i\,\partial y^{2n-i}} \qquad (a_{2n0}(xy)=1)$$

un parametro λ, per modo di ottenere una famiglia di equazioni tutte totalmente ellittiche ed a caratteristiche semplici in C, di cui faccia parte sia la (1) che un'equazione appartenente al caso elementare. Procediamo nel modo seguente. Poichè nel campo C le quantità $\alpha_1(xy), \dots \alpha_{2n}(xy)$ sono tutte complesse, a due a due coniugate e distinte esisterà un minimo modulo m della differenza $\alpha_i - \alpha_j$ per $i \neq j$. Noi potremo quindi prendere $2n$ costanti

$$\bar\alpha_{2i-1} = \bar p_i + i\,\bar q_i \qquad \bar\alpha_{2i} = \bar p_i - i\,\bar q_i \qquad (i=1\dots n)$$

tali che sia:

$$(2) \qquad |\bar\alpha_i| < \frac{m}{4} \qquad \bar q_i > \mu' > 0;$$

e supponiamo per semplicità $\mu' \leq \mu$. Poniamo poi:

$$(3) \qquad \begin{gathered} \alpha_j(xy|\lambda) = \bar\alpha_j + \lambda(\alpha_j(xy) - \bar\alpha_j) \qquad (j=1\dots 2n) \\ p_i(xy|\lambda) = \bar p_i + \lambda(p_i(xy) - \bar p_i) \qquad q_i(xy|\lambda) = \bar q_i + \lambda(q_i(xy) - \bar q_i) \end{gathered}$$

Le $\alpha_j(xy|\lambda)$ saranno come le primitive complesse coniugate, e per λ compreso fra 0 ed 1 esse sono ancora tutte distinte poichè è:

$$\begin{aligned} |\alpha_j(xy|\lambda) - \alpha_k(xy|\lambda)| &= |(\bar\alpha_j - \bar\alpha_k)(1-\lambda) + \lambda(\alpha_j(xy) - \alpha_k(xy))| \geq \\ &\geq \big||\bar\alpha_j - \bar\alpha_k| - |\alpha_j(xy) - \alpha_k(xy)|\big| \geq \\ &\geq \left|\frac{m}{2} - m\right| = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Inoltre sarà poichè per la (4) del n. 10 è $|\alpha_j(xy)| < M$, $q_i(xy) > \mu$ e per (2)

$$(4) \qquad |\alpha_j(xy|\lambda)| < M + \frac{m}{4} = M' \qquad q_i(xy|\lambda) = \bar q_i(1-\lambda) + \lambda q_i(xy) > \mu'(1-\lambda) + \lambda\mu \geq \mu'$$

Sarà infine:

$$(5) \qquad \alpha_j(xy|0) = \bar\alpha_j \qquad \alpha_j(xy|1) = \alpha_j(xy).$$

Onde se noi definiamo le $a_{i\,2n-i}(xy|\lambda)$ col porre:

$$(6) \qquad \sum a_{i\,2n-i}(xy|\lambda)\alpha^i = [\alpha - \alpha_1(xy|\lambda)][\alpha - \alpha_2(xy|\lambda)]\dots[\alpha - \alpha_{2n}(xy|\lambda)]$$

le $a_{i\,2n-i}(xy|0)$ saranno delle costanti, e le $a_{i\,2n-i}(xy|1)$ saranno le $a_{i\,2n-1}(xy)$ della (1): e se consideriamo l'equazione:

$$(7)\qquad \begin{aligned}\Phi_\lambda u &= \mathfrak{M}_\lambda u + \lambda\, \mathfrak{J} u = f(xy)\\ \mathfrak{M}_\lambda u &= \Sigma a_{i\,2n-i}(xy|\lambda)\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^i \partial y^{2n-i}}\end{aligned}$$

essa è per tutti i valori di λ compresi fra 0 ed 1 un'equazione totalmente ellittica a radici tutte distinte, soddisfacenti alle limitazioni (4), analoghe alle (4) del §IV solo che si è sostituito M' e μ' alle M, μ. E le $a_{i\,2n-i}(xy|\lambda)$ saranno polinomii di grado $2n-i$ in λ. Di più l'equazione (7) per $\lambda = 1$ si riduce all'equazione assegnata (1), per $\lambda = 0$ si riduce ad un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti; rientra, cioè, nel caso elementare.

37.- Se noi riprendiamo la costruzione della funzione $\psi(xy; x_1 y_1)$, della $e(xy; x_1 y_1)$, della $e_1(xy; x_1 y_1)$ e della $g(xy; x_1 y_1)$ che abbiamo date nei § V e VII e consideriamo le corrispondenti funzioni $\psi(xy; x_1 y_1|\lambda)$, $e(xy; x_1 y_1|\lambda)$, $e_1(xy; x_1 y_1|\lambda)$, $g(xy; x_1 y_1|\lambda)$ relative all'equazione (7), noi vediamo subito che la funzione $\psi(xy; x_1 y_1|\lambda)$ e le sue derivate dei primi $2n+1$ ordini sono per $(xy)\not\equiv(x_1 y_1)$ funzioni analitiche regolari per tutti i valori di λ compresi fra 0 ed 1 (ed anzi funzioni razionali fratte), che del pari la funzione $e(xy; x_1 y_1|\lambda)$ e le sue derivate sono funzioni analitiche regolari per i valori di λ compresi nell'intervallo $0 \ldots\ldots 1$ tranne al più quando è $(xy) \equiv (x_1 y_1) \equiv (\sigma)$; ed infine costruendo la $e_1(xy; x_1 y_1|\lambda)$ come è indicato nel § I dell'Appendice si può fare in modo che anche la $e_1(xy; x_1 y_1|\lambda)$ e quindi pure la $g(xy; x_1 y_1|\lambda)$ sia una funzione analitica regolare di λ quando non è $(xy)\equiv(x_1 y_1)\equiv(\sigma)$. È da notare che la $e(xy; x_1 y_1|\lambda)$, e quindi la $g(xy; x_1 y_1|\lambda)$, si può alterare per una funzione nulla al contorno colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini finita e continua insieme colle sue derivate dei primi $2n$ ordini anche su γ, indipendente da λ senza che cessi di godere delle proprietà sopra notate, e che usufruendo di tale arbitrarietà noi possiamo fare in modo che $g(xy; x_1 y_1 | 0)$ sia precisamente una di quelle funzioni per cui nel §. precedente abbiamo visto che l'equazione integrale (28) – (30) ha determinante non nullo[1]

Onde infine noi potremo dire che tranne nei punti $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ la funzione $\psi(xy; x_1 y_1 | \lambda) + g(xy; x_1 y_1 | \lambda)$ è funzione analitica regolare di λ. E posto:

$$(8) \qquad u(xy|\lambda) = \iint_c \left[\psi(xy; x_1 y_1|\lambda) + g(xy; x_1 y_1|\lambda)\right] \varphi(x_1 y_1|\lambda)\, dx_1 dy_1$$

dove $\varphi(xy|\lambda)$ ammette le derivate prime finite e continue entro c, questa funzione sarà nulla colle derivate dei suoi primi $n+1$ ordini su γ: ammette le derivate dei primi $2n-1$ ordini in c e su γ date da.

$$(9) \qquad \frac{\partial^{i+k} u(xy|\lambda)}{\partial x^i \partial y^k} = \iint_c \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} \left[\psi(xy; x_1 y_1|\lambda) + g(xy; x_1 y_1|\lambda)\right] \varphi(x_1 y_1|\lambda)\, dx_1 dy_1;$$

ed ammette pure le derivate di ordine $2n$ entro c ed è tale che:

$$(10) \qquad \mathcal{M}_\lambda u = \varphi(xy|\lambda) + \iint_c \left[k(xy; x_1 y_1|\lambda) + h(xy; x_1 y_1|\lambda)\right] \varphi(x_1 y_1|\lambda)\, dx_1 dy_1$$

E perchè (8) sia soluzione di (7) occorre e basta dunque che la $\varphi(xy|\lambda)$ oltre ad avere le derivate prime finite e continue entro c sia soluzione della:

---

[1] Invero costruita come si disse (e cioè coi metodi del §. 1 dell'Appendice la $e_1(xy; x_1 y_1|\lambda)$ la $e_1(xy; x_1 y_1|0)$ sarà certamente finita e continua colle sue derivate dei primi $2n$ ordini rapporto ad xy. (Cfr. n. 51). Lo stesso è della $e_1(xy; x_1 y_1)$ usata nel § VIII $(= \bar{e}(xy; x_1 y_1) + e_1^{(1)}(xy; x_1 y_1) + \sum_1^m i\, v_i(xy)\, \rho_i(x_1 y_1))$ e quindi la differenza di queste due funzioni è certamente una funzione che si può aggiungere a $e_1(xy; x_1 y_1|\lambda)$ senza alterarne le proprietà.

$$\varphi(xy|\lambda)+\iint_C X_1(xy;x_1y_1|\lambda)\,\varphi(x_1y_1|\lambda)\,dx_1\,dy_1=f(xy)$$

$$(11)\qquad X_1(xy;x_1y_1|\lambda)=k(xy;x_1y_1|\lambda)+\lambda\sum_{0\le i+k\le 2n}b_{ik}(xy)\frac{\partial^{i+k}\gamma(xy;x_1y_1|\lambda)}{\partial x^i\,\partial y^k}+$$
$$+h(xy;x_1y_1|\lambda)+\lambda\sum_{0\le i+k<2n}b_{ik}(xy)\frac{\partial^{i+k}g(xy;x_1y_1|\lambda)}{\partial x^i\,\partial y^k}$$

La funzione $X_1(xy;x_1y_1|\lambda)$ è quindi finita e continua in tutto C tranne che nei punti $(xy)=(x_1y_1)$ in cui diviene infinita di 1° ordine se il punto è interno a C, diviene infinita di ordine $<1+\beta$ dove β è un numero piccolo a piacere se (xy) è su γ. All'equazione (11) si può quindi applicare la teoria di Fredholm; anzi noi sappiamo che, se da essa si passa col noto ragionamento a quella in cui la funzione caratteristica è la funzione iterata, si giunge ad un'equazione equivalente a (10) con funzione caratteristica ovunque finita. Scrivendo le formule per disteso, si costruiamo le funzioni:

$$X_2(xy;x_1y_1|\lambda)=\iint_C X_1(xy;\xi\eta|\lambda)\,X_1(\xi\eta;x_1y_1)\,d\xi\,d\eta$$

$$(12)\qquad X_3(xy;x_1y_1|\lambda)=\iint_C X_2(xy;\xi\eta|\lambda)\,X_1(\xi\eta;x_1y_1|\lambda)\,d\xi\,d\eta$$
$$=\iint_C X_1(xy;\xi\eta|\lambda)\,X_2(\xi\eta;x_1y_1|\lambda)\,d\xi\,d\eta.$$

La X_2 diverrà infinita di ordine certamente $<2\beta$ in $(xy)=(x_1y_1)$, X_3 non diverrà più infinita in tutto C e su γ; e sarà funzione analitica regolare di λ nell'intervallo $0\ldots1$. E la $\varphi(xy|\lambda)$ dovrà soddisfare l'equazione:

$$\varphi(xy|\lambda)+\iint_C X_3(xy;x_1y_1|\lambda)\,\varphi(x_1y_1|\lambda)\,dx_1\,dy_1=f_3(xy|\lambda)$$
$$(13)\qquad f_3(xy;\lambda)=f(xy)-\iint_C X_1(xy;x_1y_1|\lambda)\,f(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1+\iint_C X_2(xy;x_1y_1|\lambda)\,f(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1,$$

dove quindi anche $f_3(xy|\lambda)$ rappresenta una funzione analitica di λ regolare nei punti dell'intervallo $0\ldots1$.

Ma v'è di più: se noi rammentiamo che all'interno di C ... le $b_{ik}(xy)$ hanno le derivate prime, la $g(xy;x_1y_1|\lambda)$ ha le derivate $(2n+1)$esime finite e continue anche per $(xy)\equiv(x_1y_1)$ noi vediamo che all'interno di c la singolarità delle derivate di $\chi_1(xy;x_1y_1|\lambda)$ proviene solo da quella di $\kappa(xy;x_1y_1|\lambda)$ e delle derivate $(2n-1)$ e $(2n-2)$esime di $\psi(xy;x_1y_1|\lambda)$; onde segue che la $\chi_1(xy;x_1y_1|\lambda)$, la $\chi_1(xy;x_1y_1|\lambda)$ studiata nel numero 15 della mia citata memoria dei Rendiconti di Palermo e le loro derivate hanno la medesima singolarità. E quindi segue che se la $f(xy)$ ha le derivate prime all'interno di c lo stesso è di $f_3(xy|\lambda)$. E ancora che se si costruisce la terza iterata:

$$(14) \qquad \chi_4(xy;x_1y_1|\lambda)=\iint_c \chi_1(xy;\xi\eta|\lambda)\,\chi_3(\xi\eta;x_1y_1|\lambda)\,d\xi\, d\eta$$

questa è funzione finita e continua in c e su j; con derivate prime finite entro c[1]. E la $\varphi(xy|\lambda)$ dovrà essere soluzione di

$$(15) \qquad \begin{aligned} &\varphi(xy|\lambda)+\iint_c \chi_4(xy;x_1y_1|\lambda)\,\varphi(x_1y_1|\lambda)\,dx_1\,dy_1 = f_4(xy|\lambda) \\ &f_4(xy|\lambda)=f_3(xy|\lambda)-\iint_c \lambda_3(xy;x_1y_1|\lambda)\,f(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 \end{aligned}$$

Onde ormai noi possiamo concludere che se una soluzione di questa equazione e quindi di (11) esiste, essa ammette certo all'interno di c le derivate prime finite e continue: cosicchè rimane da esaminare solo quando è che si può asserire che tale soluzione esista.

38. — Può il determinante $D(\lambda)$ di (15) essere nullo oppure no: certo però esso sarà diverso da zero per valori generici di λ: infatti per $\lambda=0$ esso è certo $\neq 0$ per i risultati del § VIII, e d'al-

---

[1] Ricordo che la χ_1 di quella memoria gode di tale proprietà perchè i termini di massima singolarità in $(xy)\equiv(x_1y_1)$ sono della forma $\Sigma_m \dfrac{A_m(xy)}{S_m(xy;x_1y_1)}$ dove le A_m hanno le derivate prime finite e continue in c. È chiaro anche direttamente che la stessa proprietà possiede all'interno di c anche la χ_1 che qui compare.

tro canto esso è come la $\chi_1(xy;x,y,|\lambda)$ funzione analitica regolare di λ in tutti i punti dell'intervallo 0....1. Onde gli zeri di λ, quando λ è compreso fra 0 ed 1 non possono essere che isolati, ed isolati quindi i valori per cui l'equazione (15) non ha soluzione. Onde intanto risulta dimostrato che in generale - e cioè per tutti i valori di λ per cui $D(\lambda) \neq 0$ - esiste sempre una ed una sola soluzione di un'equazione totalmente ellittica (7) di ordine $2n$ che al contorno σ di un campo assegnato C prenda valori dati insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini.

Ma come enunciammo nel § I possiamo dire di più e dimostrare che se in un qualunque modo per un valore di λ in particolare per $\lambda = 1$ e quindi per l'equazione (1) si è provato che per la (7) vale il teorema di unicità, vale anche il teorema di esistenza.

Useremo perciò di un ragionamento dovuto al Fredholm.[1] Osserviamo che la soluzione dell'equazione (15) è della forma:

$$\varphi(xy|\lambda) = \frac{\varphi_1(xy|\lambda)}{D(\lambda)} \tag{16}$$

dove $\varphi_1(xy|\lambda)$ e $D(\lambda)$ sono regolari analitiche per tutti i valori di λ dell'intervallo 0...1. E corrispondentemente $u(xy|\lambda)$ ha la forma:

$$u(xy|\lambda) = \frac{u_1(xy|\lambda)}{D(\lambda)}$$

(17)

$$u_1(xy|\lambda) = \iint_C \left[\psi(xy;x_1y_1|\lambda) + g(xy;x_1y_1|\lambda)\right] \varphi_1(x_1y_1|\lambda)\, dx_1\, dy_1$$

dove $u_1(xy|\lambda)$ è ancora una funzione analitica di λ, regolare nei punti dell'intervallo 0...1: essa si annulla colle sue derivate

---

[1] Fredholm - Solution d'un problème fondamental etc. Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik. Bd I. n. 28. Vedi pure Lauricella Sull'integrazione dell'equazione $\Delta^4 = 0$. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei 1907 - 2° sem.

dei primi $n-1$ ordini su $\mathcal{J}$ e soddisfa all'equazione:

(18) $$\mathcal{E}^{c}_{\lambda} u_1 = D(\lambda) f(xy).$$

Per dimostrare il nostro assunto noi mostreremo ora che se λ_1 è uno zero di ordine n di $D(\lambda)$, ma vale il teorema di unicità, necessariamente $u_1(xy|\lambda)$ ha in λ_1 uno zero pure di ordine m almeno: cosicchè si potrà porre

(19) $$u_1(xy|\lambda) = u_1^*(xy|\lambda)(\lambda-\lambda_1)^m$$
$$D(\lambda) = D^*(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^m \qquad D^*(\lambda_1) \neq 0$$

e la funzione:

(20) $$u(xy|\lambda) = \frac{u_1(xy|\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{u_1^*(xy|\lambda)}{D(\lambda)}$$

è regolare anche per $\lambda = \lambda_1$, e risolve il problema primitivo.

Infatti se $u_1(xy|\lambda)$ avesse in λ_1 uno zero di ordine m_1 si potrebbe porre:

(21) $$u_1(xy|\lambda) = \bar{u}_1(xy|\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{m_1}$$

ma per (18) $\bar{u}_1(xy|\lambda)$ è una funzione nulla al contorno $\mathcal{J}$ colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, soluzione dell'equazione

$$\mathcal{E}^{c}_{\lambda} \bar{u}_1 = \frac{D(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}} f(xy) = D^*(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{m-m_1} f(xy)$$

e quindi per $\lambda = \lambda_1$ è $\bar{u}_1(xy|\lambda_1)$ soluzione dell'equazione

(22) $$\mathcal{E}_{\lambda_1} \bar{u}_1(xy|\lambda_1) = 0$$

almeno se si suppone $m_1 < m$. E quindi poichè supponiamo che per l'equazione (22) valga il teorema di unicità sarà identicamente qualunque sia xy, $\bar{u}_1(xy|\lambda_1) = 0$. In altri termini $u_1(xy|\lambda)$ non può avere in λ_1 uno zero di ordine $m_1 < m$.

Il teorema di esistenza è così pienamente dimostrato.

39. - Completiamo i teoremi del n. precedente dimostrando che se per un'equazione totalmente ellittica è vero il teorema di esistenza è pure vero il teorema di unicità.

Noi supporremo che l'equazione totalmente ellittica assegnata:

(23) $$\mathcal{E}u = f(xy)$$

sia tale che si possa parlare di equazione aggiunta e che a quest'ultima si possa applicare la teoria precedente: ciò sarà certamente se i coefficienti delle derivate di u di ordine h in $\mathcal{E}u$ ammettono le derivate dei primi $h+1$ ordini: ma tale condizione non è necessaria, e potrà eventualmente esistere la equazione aggiunta anche quando non sia soddisfatta, e goder delle particolarità ricordate.

Indichiamo con

(24) $$\mathfrak{D}u = 0$$

tale equazione. Noi sappiamo che se è vero il teorema di esistenza per la (23), è vero il teorema di unicità per la (24).[1] Ma allora il teorema del n. precedente ci dice che è vero anche il teorema di esistenza per la (24). E quindi infine poichè la relazione di aggiunzione è reciproca è vero anche il teorema di unicità per la (23).[2]

---

§. X – Estensione dei risultati precedenti alle equazioni a caratteristiche multiple.

40. – Abbiamo fin qui trattato del caso in cui le radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$ siano tutte semplici. Poche modificazioni occorre fare quando si presenti il caso in cui queste radici non siano tutte semplici. Noi supporremo, come già dicemmo nel §IV

---

(1) Cfr. la mia Memoria citata dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche, etc. n. 3.

(2) Si noti quindi in particolare che i teoremi di esistenza e di unicità sono sempre contemporaneamente veri o no per un'equazione e per la sua aggiunta.

che esse siano in tutto C di multiplicità costante. E chiameremo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu}$ le radici distinte, supponendo che α_{2i-1} ed α_{2i} siano complesse coniugate e quindi di multiplicità h_i comune. Sarà $h_1+h_2+\ldots+h_\nu = n$. Di più supporremo che la α_{2i-1} abbia il coefficiente dell'immaginario > di 0.

Come funzione $\psi(xy; x_1y_1)$ prenderemo la funzione[1]

$$(1) \quad \psi(xy;x_1y_1) = i\sum_1^\nu{}_i \sum_1^{h_i}{}_k \Big[d_{2i-1k}(xy) S_{2i-1}^{2n-k-1}(xy;x_1y_1) S_{2i}^{k-1}(xy;x_1y_1) \log S_{2i-1}(xy;x_1y_1) -$$
$$- d_{2ik}(xy) S_{2i}^{2n-k-1}(xy;x_1y_1) S_{2i-1}^{k-1}(xy;x_1y_1) \log S_{2i}(xy;x_1y_1)\Big]$$

dove i coefficienti d sono tali che si abbia identicamente.

$$(2) \quad \sum_1^\nu{}_i \sum_1^{h_i}{}_k \Big[d_{2i-1k}(xy) S_{2i-1}^{2n-k-1}(xy;x_1y_1) S_{2i}^{k-1}(xy;x_1y_1) +$$
$$+ d_{2ik}(xy) S_{2i}^{2n-k-1}(xy;x_1y_1) S_{2i-1}^{k-1}(xy;x_1y_1)\Big] = 0$$

questa funzione gode di tutte le proprietà della $\psi(xy;x_1y_1)$.

Quanto alla costruzione della funzione compensatrice si vede chiaramente, riprendendo i ragionamenti del § VII che basta costruire una nuova funzione $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ la quale goda delle due proprietà indicate al n. 27; poichè le residue deduzioni tutte, si fondano sopra di queste proprietà.

Porremo perciò

$$(3) \quad \Omega^{(j)}(xy;\sigma) = \sum_1^\nu{}_m \sum_1^{h_m}{}_k \Big[\lambda^{(j)}_{2m-1k}(\sigma) S_{2m-1}^{n-k-1}(xy;\sigma) S_{2m}^{k-1}(xy;\sigma) \log S_{2m-1}(xy;\sigma) +$$
$$+ \lambda^{(j)}_{2mk}(\sigma) S_{2m}^{n-k-1}(xy;\sigma) S_{2m-1}^{k-1}(xy;\sigma) \log S_{2m}(xy;\sigma)\Big]$$

dove i coefficienti $\lambda^{(j)}_{2m-1k}$ e $\lambda^{(j)}_{2mk}$ sono da determinarsi convenientemente.

Come per la $\psi(xy;x_1y_1)$ sopra definita si vede immediatamente che i termini di massima singolarità delle derivate di $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ rapporto ad xy si ottengono derivando $\Omega^{(j)}$ come se

---

[1] Cfr. LC n. 18 form. (13)'

le α fossero costanti. E conseguentemente osservando che le quantità ς_{2m-1}^{n-k-1}, ς_{2m}^{k-1}, $\log \varsigma_{2m-1}$ e le analoghe, che si ottengono scambiando $2m$ con $2m-1$ sono, per $k \leq h_m$ e per α_{2m-1} e α_{2m} costanti, delle soluzioni dell'equazione $\mathfrak{M}u=0$; segue che formando la espressione $\mathfrak{M}\,\Omega^{(i)}$ sempre scompaiono i termini di massima singolarità qualunque siano i coefficienti λ; onde intanto $\mathfrak{M}\,\Omega^{(i)}$ soddisfa alla prima delle proprietà del n. 26.

Per fare in modo che risulti soddisfatta la seconda, bisognerà calcolare in modo conveniente le λ. Calcoliamo perciò le derivate di ordine $n-1$, o meglio i loro termini di massima singolarità, di $\Omega^{(i)}$, cioè, ripetiamo, le derivate di ordine $n-1$ di $\Omega^{(i)}$ fatte considerando le α come costanti. In questa ipotesi si ha

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\sim \frac{\partial}{\partial \varsigma_{2m-1}}\alpha_{2m-1} + \frac{\partial}{\partial \varsigma_{2m}}\alpha_{2m} \\ \frac{\partial}{\partial y} &\sim \frac{\partial}{\partial \varsigma_{2m-1}} + \frac{\partial}{\partial \varsigma_{2m}} \end{aligned}$$

dove il segno $\sim$ indica che i due membri sono uguali quando si considerano le α come costanti.

Indichiamo con $\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l;\,l)}(\alpha\beta)$ il coefficiente di $\zeta_1^{\mu+\nu-l}\zeta_2^{l}$ nello sviluppo di:

$$(\alpha\zeta_1+\beta\zeta_2)^{\mu}(\zeta_1+\zeta_2)^{\nu}:$$

avremo evidentemente:

$$(5)\qquad \mathfrak{A}^{(\mu+\nu-l,\,l)}(\alpha\beta) = \binom{\mu}{l}\binom{\nu}{0}\alpha^{\mu-l}\beta^{l} + \binom{\mu}{l-1}\binom{\nu}{1}\alpha^{\mu-l+1}\beta^{l-1} + \dots + \binom{\mu}{0}\binom{\nu}{l}\alpha^{\mu}$$

dove per valore di $\binom{h}{k}$ deve prendersi il solito coefficiente binomiale se $k \leq h$, e lo zero se $k > h$.

Con questa notazione dalla formula (4) segue la formula generale:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-i}\partial y^{i-1}} &\sim \left(\frac{\partial}{\partial \varsigma_{2m-1}}\alpha_{2m-1} + \frac{\partial}{\partial \varsigma_{2m}}\alpha_{2m}\right)^{n-i}\left(\frac{\partial}{\partial \varsigma_{2m-1}} + \frac{\partial}{\partial \varsigma_{2m}}\right)^{i-1} = \\ &= \sum_{l=0}^{l=n-1} \mathfrak{A}_{n-i,\,i-1}^{(l,\,n-1-l)}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})\frac{\partial^{n-1}}{\partial \varsigma_{2m-1}^{l}\,\partial \varsigma_{2m}^{n-1-l}} \end{aligned}$$

Applicando questa formula alla funzione:

$$\varsigma_{2m-1}^{n-k-1}(xy;\sigma)\,\varsigma_{2m}^{k-1}(xy;\sigma)\,\log\varsigma_{2m-1}(xy;\sigma);$$

Otteniamo:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-i}\partial y^{i-1}}\left(\varsigma_{2m-1}^{n-k-1}\varsigma_{2m}^{k-1}\log\varsigma_{2m-1}\right)\sim\sum_{l=0}^{l=n-1}\mathfrak{a}_{n-i,i-1}^{(l,n-1-l)}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})\frac{\partial^{n-1}(\varsigma_{2m-1}^{n-k-1}\varsigma_{2m}^{k-1}\log\varsigma_{2m-1})}{\partial\varsigma_{2m-1}^{l}\,\partial\varsigma_{2m}^{n-1-l}}=$$

(7)
$$=(n-k-1)!(k-1)!\sum_{l=n-k}^{l=n-1}(-1)^{l-n+k}\mathfrak{a}_{n-i,i-1}^{(l,n-1-l)}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})\left(\frac{\varsigma_{2m}}{\varsigma_{2m-1}}\right)^{k-n+l}\frac{1}{\varsigma_{2m-1}}$$

Cosicchè si avrà:

$$\frac{\partial^{n-1}\Omega^{(j)}}{\partial x^{n-i}\partial y^{i-1}}\sim\sum_{1}^{\nu}{}_m\sum_{1}^{h_m}{}_k(n-k-1)!(k-1)!\Big[\lambda_{2m-1\,k}^{(j)}(\sigma)\sum_{l=n-k}^{l=n-1}(-1)^{l-n+k}\mathfrak{a}_{n-i,i-1}^{(l,n-1-l)}(\alpha_{2m-1}(xy),\alpha_{2m}(xy))\left(\frac{\varsigma_{2m}}{\varsigma_{2m-1}}\right)^{k-n+l}\frac{1}{\varsigma_{2m-1}}+$$

(8)
$$+\lambda_{2m\,k}^{(j)}(\sigma)\sum_{l=n-k}^{l=n-1}(-1)^{l-n+k}\mathfrak{a}_{n-i,i-1}^{(l,n-1-l)}(\alpha_{2m}(xy),\alpha_{2m-1}(xy))\left(\frac{\varsigma_{2m-1}}{\varsigma_{2m}}\right)^{k-n+l}\frac{1}{\varsigma_{2m}}\Big]$$

Osserviamo ora che il rapporto $\frac{\varsigma_{2m-1}}{\varsigma_{2m}}$ è una funzione di xy e σ sempre finita e continua e derivabile anche quando xy viene in σ in virtù della disuguaglianza (3) del §. V.

Cosicchè se si considera l'integrale:

$$\phi_j(xy)=\int_{\mathscr{J}}\Omega^{(j)}(xy;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma$$

dove $\varphi_j(\sigma)$ è una funzione che soddisfa alle solite limitazioni (17) e (18) del § VII; ragionando come al n. 26 otterremo per (8)

$$\left[\frac{\partial^{n-1}\phi_j(xy)}{\partial x^{n-i}\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)}=$$

$$=\pi i\sum_{1}^{\nu}{}_m\sum_{1}^{h_m}{}_k(n-k-1)!(k-1)!\Big[\lambda_{2m-1\,k}^{(j)}(s)\sum_{n-k}^{n-1}{}_l(-1)^{l-n+k}\mathfrak{a}_{n-i,i-1}^{(l,n-1-l)}(\alpha_{2m-1}(s),\alpha_{2m}(s))\frac{\tau_{2m}^{k-n+l}(s;s)}{\tau_{2m-1}^{k-n+l+1}(s;s)}-$$

(9)
$$-\lambda_{2m\,k}^{(j)}(s)\sum_{n-k}^{n-1}{}_l(-1)^{l-n+k}\mathfrak{a}_{n-i,i-1}^{(l,n-1-l)}(\alpha_{2m}(s),\alpha_{2m-1}(s))\frac{\tau_{2m-1}^{k-n+l}(s;s)}{\tau_{2m}^{k-n+l+1}(s;s)}\Big]\varphi_j(s)+$$

$$+\frac{\pi i}{\mathscr{J}}\Big\{\sum_{1}^{\nu}{}_m\sum_{1}^{h_m}{}_k(n-k-1)!(k-1)!\Big[\lambda_{2m-1\,k}^{(j)}(s)\sum_{n-k}^{n-1}{}_l(-1)^{l-n+k}\mathfrak{a}_{n-i,i-1}^{(l,n-1-l)}(\alpha_{2m-1}(s),\alpha_{2m}(s))\frac{\tau_{2m}^{k-n+l}(s;s)}{\tau_{2m-1}^{k-n+l+1}(s;s)}+$$

$$+\lambda_{2m\,k}^{(j)}(s)\sum_{n-k}^{n-1}{}_l(-1)^{l-n+k}\mathfrak{a}_{n-i,i-1}^{(l,n-1-l)}(\alpha_{2m}(s),\alpha_{2m-1}(s))\frac{\tau_{2m-1}^{k-n+l}(s;s)}{\tau_{2m}^{k-n+l+1}(s;s)}\Big]\Big\}\int_{\mathscr{J}}\cot g\frac{\pi}{\mathscr{J}}(s-\sigma)\varphi_j(\sigma)\,d\sigma+$$

$$+\int_{\mathscr{J}}A_{ji}(s;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma$$

dove $A_{ji}(s;\sigma)$ rappresenta una funzione che per $(s)\equiv(\sigma)$ ha al più una singolarità logaritmica.

Perchè la formula (9) risulti del tipo della formula (7) del numero 26 occorre quindi e basta che le funzioni λ siano determinate per modo che risultino soddisfatte le $2n$ equazioni lineari:

$$
(10)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\sum_1^{\nu}{}_m \sum_1^{h_m}{}_k (n-k-1)!(k-1)! \Big[\lambda^{(j)}_{2m-1\,k} \sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n+k} \mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m}) \frac{\tau_{2m}^{k-n+l}}{\tau_{2m-1}^{k-n+l+1}} - \\
\qquad\qquad \displaystyle -\lambda^{(j)}_{2mk} \sum_{n-k}^{n-1} l(-1)^{l-n+k} \mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m},\alpha_{2m-1}) \frac{\tau_{2m-1}^{k-n+l}}{\tau_{2m}^{k-n+l+1}}\Big] = \frac{\varepsilon_{ij}}{\pi i} \\
\displaystyle\sum_1^{n}{}_m \sum_1^{h_m}{}_k (n-k-1)!(k-1)! \Big[\lambda^{(j)}_{2m-1\,k} \sum_{n-k}^{n-1} l(-1)^{l-n+k} \mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m}) \frac{\tau_{2m}^{k-n+l}}{\tau_{2m-1}^{k-n+l+1}} + \\
\qquad\qquad \displaystyle +\lambda^{(j)}_{2mk} \sum_{n-k}^{n-1} l(-1)^{l-n+k} \mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m},\alpha_{2m-1}) \frac{\tau_{2m-1}^{k-n+l}}{\tau_{2m}^{k-n+l+1}}\Big] = 0 \\
\qquad\qquad (i = 1, 2, \dots n)
\end{cases}
$$

dove per brevità si pose λ, α, τ, invece di $\lambda(0), \alpha(0), \tau(0;0)$. Basterà quindi provare che le (10) ammettono soluzione. od anche che il loro determinante è diverso da zero.

Come al n. 26 si vede subito che il determinante delle (10) è a meno del segno e di una potenza di 2 uguale al prodotto del determinante che ha per elementi

$$
(11)\qquad \sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n+k} \mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m}) \frac{\tau_{2m}^{k-n+l}}{\tau_{2m-1}^{k-n+l+1}}
$$

$$
(m = 1, 2, \dots \nu,\ k = 1, 2, \dots h_m;\quad i = 1, 2, \dots n)
$$

per il determinante coniugato. Immagineremo che pei termini di una stessa colonna i abbia valore costante, nei termini di una medesima riga abbiano valore costante m e k. Per un dato valore di m, aggiungiamo alla riga corrispondente a $k=x$ quella corrispondente a $k=x-1$ moltiplicata $\frac{\tau_{2m}}{\tau_{2m-1}}$: il determinante formato cogli elementi (11) risulterà uguale a quello la cui $(h_1+h_2+\dots+h_{m-1}+x)$esima riga è formata cogli elementi:

$$
(12)\qquad \mathfrak{A}^{(n-x,x-1)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m}) \frac{1}{\tau_{2m-1}}; \qquad (i = 1, 2, \dots n)
$$

cioè il nostro determinante è a meno del fattore $\prod_m \frac{1}{\tau_{2m-1}^{h_m}}$ uguale al determinante la cui $(h_1+h_2+\dots+h_{m-1}+k$ esima riga è:

$$
(12)\qquad \mathfrak{A}^{(n-k,k-1)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m}) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)
$$

Per calcolare quest'ultimo determinante dobbiamo premettere una formula relativa alle $\mathcal{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l,l)}(\alpha,\beta)$. Osserviamo che si ha:

$$\frac{\mu+\nu-l+1}{l}\binom{\mu}{l-i-1}\binom{\nu}{i}=\frac{l-i}{l}\binom{\mu}{l-i}\binom{\nu}{i}+\frac{i+1}{l}\binom{\mu}{l-i-1}\binom{\nu}{i+1}.$$

Si deduce da (5):

$$\frac{\mu+\nu-l+1}{l}\mathcal{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l+1,l-1)}(\alpha,\beta)=\left[\binom{\mu}{l}\binom{\nu}{0}+\frac{1}{l}\binom{\mu}{l-1}\binom{\nu}{1}\right]\alpha^{\mu-l+1}\beta^{l-1}+\left[\frac{l-1}{l}\binom{\mu}{l-1}\binom{\nu}{1}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{l}\binom{\mu}{l-2}\binom{\nu}{2}\right]\alpha^{\mu-l+2}\beta^{l-2}+\dots+\left[\frac{1}{l}\binom{\mu}{1}\binom{\nu}{l-1}+\binom{\mu}{0}\binom{\nu}{l}\right]\alpha^{\mu}.$$

E quindi confrontando con $\mathcal{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l,l)}$ dato da (5):

$$\mathcal{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l,l)}(\alpha,\beta)-\frac{\mu+\nu-l+1}{l}\mathcal{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l+1,l-1)}(\alpha,\beta)=$$

$$=\left[\binom{\mu}{l}\binom{\nu}{0}\alpha^{\mu-l}\beta^{l-1}+\frac{l-1}{l}\binom{\mu}{l-1}\binom{\nu}{1}\alpha^{\mu-l+1}\beta^{l-2}+\dots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{l}\binom{\mu}{1}\binom{\nu}{l-1}\alpha^{\mu-1}\right](\beta-\alpha)=$$

$$=\frac{\mu}{l}\left[\binom{\mu-1}{l-1}\binom{\nu}{0}\alpha^{\mu-l}\beta^{l-1}+\binom{\mu-1}{l-2}\binom{\nu}{1}\alpha^{\mu-l+1}\beta^{l-2}+\dots+\right.$$

$$\left.+\binom{\mu-1}{0}\binom{\nu}{l-1}\alpha^{\mu-1}\right](\beta-\alpha).$$

Ma la parte fra parentesi non è che $\mathcal{A}_{\mu-1,\nu}^{(\mu+\nu-l,l-1)}(\alpha,\beta)$ onde si deduce la formula ricorrente:

$$(13)\quad \mathcal{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l,l)}(\alpha,\beta)-\frac{\mu+\nu-l+1}{l}\mathcal{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l+1,l-1)}(\alpha,\beta)=\frac{\mu}{l}(\beta-\alpha)\mathcal{A}_{\mu-1,\nu}^{(\mu+\nu-l,l-1)}(\alpha,\beta).$$

Applichiamo questa formula al calcolo del determinante formato cogli elementi (12). Togliamo per ogni dato valore di m dalla riga corrispondente a $k=x$ quella corrispondente a $k=x-1$ moltiplicata per $\frac{n-x-2}{x-2}$ per (13) otterremo così che il determinante formato cogli elementi (12) è uguale a quello le cui righe di posto $h_1+h_2+\dots+h_{m-1}+k$ esimo per $k>1$ è

$$(14)\qquad \frac{n-1}{k-1}\mathcal{A}_{n-i-1,i-1}^{(n-k,k-2)}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})\left[\alpha_{2m}-\alpha_{2m-1}\right]$$

e per $k=1$ è

$$(a_1)\qquad \mathcal{A}_{n-i,i-1}^{(n-1,0)}=\alpha_{2m-1}^{n-i}.$$

E tale determinante è uguale a meno del fattore

$\prod_m \frac{1}{(h_m-1)!}\left[\alpha_{2m}-\alpha_{2m-1}\right]^{h_m-1}$ (dove m percorre i numeri da 1 a ν per cui $h_m \geq 2$) al determinante di cui le righe di posto $h_1+h_2+\dots+h_{m-1}+k$ per $k>1$ è:

$$(15) \qquad (n-i)\,\mathfrak{A}^{(n-k,\,k-2)}_{n-i-1,\,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})$$

mentre le righe di posto $h_1+h_2+\dots+h_{m-1}+1$ sono ancora date da (a_1).

Procediamo sulla riga (15) come precedentemente usando dell'identità (13): otterremo ancora che il nuovo determinante è a meno del fattore $\prod_m \frac{1}{(h_m-2)!}\left[\alpha_{2m}-\alpha_{2m-1}\right]^{h_m-2}$ (dove m percorre i numeri da 1 a ν per cui $h_m \geq 3$) è uguale a quello le cui righe di posto $h_1+h_2+\dots+h_{m-1}+1$ sono le (a_1) quelle di posto $h_1+h_2+\dots+h_{m-1}+2$ sono le.

$$(a_2) \qquad (n-i)\,\mathfrak{A}^{(n-2,\,0)}_{n-i-1\,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})=(n-i)\,\alpha_{2m-1}^{n-i-1}$$

quelle di posto $h_1+h_2+\dots+h_{m-1}+k$ per $k>2$ sono le:

$$(16) \qquad (n-i)(n-i-1)\,\mathfrak{A}^{(n-k,\,k-3)}_{n-i-2\,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m}).$$

Così procedendo si ottiene che il determinante che studiamo è a meno di un fattore diverso da zero uguale a quello in cui la riga di posto $h_1+h_2+\dots+h_m+k$ è data da

$$(a_k) \quad (n-i)(n-i-1)\dots(n-i-k+1)\,\mathfrak{A}^{(n-k,\,0)}_{n-i-k+1\,i-1}=(n-i)(n-i-1)\dots(n-i+k+1)\,\alpha_{2m-1}^{n-i-k+1}$$

E cioè al determinante:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2}\dots\dots & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ (n-1)\,\alpha_1^{n-2} & (n-2)\,\alpha_1^{n-3}\dots\dots & 2\alpha_1 & 1 & 0 \\ (n-1)(n-2)\,\alpha_1^{n-3} & (n-2)(n-3)\,\alpha_1^{n-4}\dots\dots & 2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_3^{n-1} & \alpha_3^{n-2}\dots\dots & \alpha_3^2 & \alpha_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Ma questo determinante non è che il determinante dei coefficienti del sistema di equazioni lineari le quali esprimono [illegible] relazioni:

$$x^n + \xi_1 \cdot x^{n-1} + \ldots\ldots + \xi_{n-1} x + \xi_n = 0$$

ha come radici $\alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_{2\nu-1}$ colle rispettive multiplicità $h_1, h_2, \ldots h_\nu$, e quindi è diverso da zero.

Onde anche il sistema (10) è risolubile, e si possono determinare le $\lambda^{(j)}$ per modo che $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ soddisfaccia pure alla seconda delle proprietà del n. 26. Stabilito questo punto i residui ragionamenti non differiscono da quelli dei precedenti paragrafi.

Appendice.

31. Sulla costruzione di funzioni che su un contorno soddisfanno a certe condizioni date.

In questo § io mi propongo di dimostrare i teoremi che nel corso del lavoro furono usati relativi alla possibilità di costruire funzioni le quali soddisfacciano a date condizioni al contorno. Per quanto questi teoremi siano molto intuitivi pure essi hanno ufficio così essenziale nei ragionamenti che precedono, che non ho stimato opportuno esimermi dal dimostrarli minutamente.

Seguirò perciò i metodi di media usati da Levi Beppo nelle sue ricerche sul principio di Dirichlet.[1] Nei primi quattro numeri ho studiato alcune operazioni funzionali di media, nei n. 5 e 6 ho risolto il problema nel caso semplice in cui il contorno sia una retta o un tratto di essa; nei successivi ho mostrato come a questo caso si possa ricondurre il caso generale.

1. – Si consideri nel piano xy una striscia S' limitata

---

[1] Beppo Levi Sul principio di Dirichlet (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo Tomo XXII (1906)). Cfr. specialmente il §.5 un'operazione funzionale: l'operazione di media. In una mia nota (Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari in due variabili indipendenti a caratteristiche reali: (Rendiconti dell'Istituto Lombardo 1908 - nota II § VI) ho già usato di metodi molto analoghi alle attuali. Le considerazioni là usate si tro-

dall'asse delle y o da una sua parallela, eventualmente S può coincidere col semipiano. Sia data in S una funzione $\varphi(xy)$ la quale ammetta le derivate dei primi g ordini finite e continue. Consideriamo le funzioni

$$(1) \qquad I_l\varphi = \frac{1}{x^{l+1}}\int_{\frac{x}{2}}^{x} \varphi(xy)\, x^l\, dx.$$

Se $\varphi(xy)$ ammette la derivata prima rapporto ad x $(g>0)$, si ha per l'operazione I_l l'identità:

$$(2) \qquad -(l+1)\, I_l\varphi + \varphi(xy) - \frac{1}{2^{l+1}}\varphi\left(\frac{x}{2}y\right) = x\, I_{l+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}:$$

identità che immediatamente si ottiene per mezzo di una integrazione per parti.

Si ha facilmente da (1)

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial I_l\varphi}{\partial x} &= -\frac{l+1}{x} I_l\varphi + \frac{1}{x}\left[\varphi(xy) - \frac{1}{2^{l+1}}\varphi\left(\frac{x}{2}y\right)\right] = \\ &= I_{l+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \\ \frac{\partial I_l\varphi}{\partial y} &= I_l\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \end{aligned}$$

La prima delle (3) vale anche se $g=0$ e cioè se φ non ammette derivate prime, la seconda e terza solo se esistono le derivate di φ. Più in generale dalle due espressioni precedenti segue che $I_l\varphi$ ammette almeno le derivate dei primi g ordini come la φ: ed anzi dalla prima delle espressioni date sopra per la derivata rapporto ad x segue che esistono anche tutte le derivate di ordine $g+1$ fatta eccezione al più per $\frac{\partial^{g+1} I_l\varphi}{\partial y^{g+1}}$. E precisamente si avrà in generale:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^t I_l\varphi}{\partial x^i \partial y^j} &= I_{l+i}\frac{\partial^t\varphi}{\partial x^i\partial y^j} = \\ &= -\frac{l+i}{x} I_{l+i-1}\frac{\partial^{t-1}\varphi}{\partial x^{i-1}\partial y^j} + \frac{1}{x}\left[\frac{\partial^{t-1}\varphi(xy)}{\partial x^{i-1}\partial y^j} - \frac{1}{2^{l+1}}\frac{\partial^{t-1}\varphi\left(\frac{x}{2}y\right)}{\partial x^{i-1}\partial y^j}\right] \end{aligned}$$

---

saranno qui, convenientemente modificate e completate, riprodotte al n. 4.

Le due espressioni di queste derivate valgono entrambi $t \le g$; per $t = g+1$ e $j \neq 0$ vale solo la seconda.

2.- Sia ora $\varphi_1(xy)$ una funzione che in S ammetta le derivate dei primi g ordini finite e continue, ed anche le derivate di ordine $g+1$ fatta eccezione per la $\frac{\partial^{g+1}\varphi_1}{\partial y^{g+1}}$ al più, come appunto è la $I_l\,\varphi$ studiata nel n. precedente. E consideriamo le funzioni definite da:

$$J_l\,\varphi_1(xy) = \frac{1}{x^{l+1}}\int_y^{y+x}\varphi_1(x\eta)(\eta-y)^l\,d\eta \tag{5}$$

Se $\varphi_1(xy)$ ammette le derivate prime rapporto ad y (se cioè $g>0$) si ha per J_l l'identità

$$-(l+1)J_l\,\varphi_1(xy) + \varphi_1(xy+x) = x J_{l+1}\frac{\partial\varphi_1(xy)}{\partial y}; \tag{6}$$

identità che facilmente si ottiene mediante un'integrazione per parti. Segue allora da (5):

$$\frac{\partial J_l\,\varphi_1(xy)}{\partial x} = \frac{1}{x}\left[-(l+1)J_l\,\varphi_1(xy) + \varphi_1(xy+x)\right] + J_l\,\frac{\partial\varphi_1(xy)}{\partial x} =$$

$$= J_{l+1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + J_l\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \tag{7}$$

$$\frac{\partial J_l\,\varphi_1(xy)}{\partial y} = \frac{1}{x}\left[-l\,J_{l-1}\,\varphi_1(xy) + \varphi_1(xy+x)\right] =$$

$$= J_l\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}.$$

Anche qui le prime due espressioni valgono anche se $g=0$, le due seguenti valgono se $g>0$. Più in generale segue dalle (7):

$$\frac{\partial^t J_l\,\varphi_1}{\partial x^i\partial y^j} = J_l\frac{\partial^t\varphi_1}{\partial x^i\partial y^j} + i\,J_{l+1}\frac{\partial^t\varphi_1}{\partial x^{i-1}\partial y^{j+1}} + \binom{i}{2}J_{l+2}\frac{\partial^t\varphi_1}{\partial x^{i-2}\partial y^{j+2}} + \cdots\cdots +$$

$$+ J_{l+i}\frac{\partial^t\varphi_1}{\partial y^t} \tag{8}$$

la quale vale per $t \le g$: mentre per $t = g+1$ si ha:

$$\frac{\partial^{g+1} J_l \varphi_1}{\partial x^i \partial y^{g-i+1}} = \frac{1}{x}\left[-(l+1)J_l \frac{\partial^g \varphi_1}{\partial x^{i-1}\partial y^{g-i+1}} + \frac{\partial^g \varphi_1(xy+x)}{\partial x^{i-1}\partial y^{g-i+1}}\right] + J_l \frac{\partial^{g+1}\varphi_1}{\partial x^i \partial y^{g-i+1}} +$$

(9)

$$+\frac{(i-1)}{x}\left[-(l+2)J_{l+1}\frac{\partial^g \varphi_1}{\partial x^{i-2}\partial y^{g-i+2}} + \frac{\partial^g \varphi_1(xy+x)}{\partial x^{i-2}\partial y^{g-i+2}}\right] + iJ_{l+1}\frac{\partial^{g+1}\varphi_1}{\partial x^{i-1}\partial y^{g-i+2}} +$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$+\frac{1}{x}\left[-(l+i)J_{l+i-1}\frac{\partial^g \varphi_1}{\partial y^g} + \frac{\partial^g \varphi_1(xy+x)}{\partial y^g}\right] + J_{l+i-1}\frac{\partial^{g+1}\varphi_1}{\partial x \partial y^g} =$$

$$\frac{\partial^{g+1} J_l \varphi_1}{\partial x^i \partial y^{g-i+1}} = \frac{1}{x}\left\{\left[-lJ_{l-1}\frac{\partial^g \varphi_1}{\partial x^i \partial y^{g-i}} + \frac{\partial^g \varphi_1(xy+x)}{\partial x^i \partial y^{g-i}}\right] +\right.$$

(10)

$$+i\left[-(l+1)J_l \frac{\partial^g \varphi_1}{\partial x^{i-1}\partial y^{g-i+1}} + \frac{\partial^g \varphi_1(xy+x)}{\partial x^{i-1}\partial y^{g-i+1}}\right] +$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left. + \left[-(l+i)J_{l+i-1}\frac{\partial^g \varphi_1}{\partial y^g} + \frac{\partial^g \varphi_1(xy+x)}{\partial y^g}\right]\right\}$$

La prima di queste espressioni vale se $i>0$ la seconda se $i<g+1$.

3.- Ciò posto, sia $\varphi(xy)$ una funzione finita e continua insieme colle sue derivate dei primi g ordini all'interno di S.

Consideriamo anzitutto le funzioni:

(11)

$$\varphi^{(1)}(xy) = 2J_0 I_0 \varphi = K\varphi\,(xy)$$

$$\varphi^{(2)}(xy) = 2J_0 I_0 \varphi^{(1)} = K\varphi^{(1)}(xy) = K^2\varphi(xy)$$

$$\varphi^{(3)}(xy) = 2J_0 I_0 \varphi^{(2)} = K^3\varphi\,(xy)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$\varphi^{(1)}$ rappresenta la media dei valori di φ nel rettangolo di vertici (xy), $(xy+x)$, $(\frac{x}{2}y)$, $(\frac{x}{2}y+x)$, $\varphi^{(2)}$ la media dei valori di $\varphi^{(1)}$....

Dagli studii dei numeri precedenti segue evidentemente che la funzione $\varphi^{(1)}(xy)$ ammette all'interno di S le derivate dei primi $g+1$ ordini, finite e continue, $\varphi^{(2)}(xy)$ quelle dei primi $g+2$, $\varphi^{(3)}$ quelle dei primi $g+3$, ecc.

Studiamo le funzioni (11) nell' intorno dei punti dell'asse delle y. Osserviamo perciò che se una funzione $\psi(xy)$ è funzione finita nell'intorno del punto $(0y_1)$ anche $I_l\psi$, e $J_l\psi$ sono funzioni finite nell'intorno del punto $(0y_1)$: e che parimenti se $\psi(xy)$ diviene nel punto $(0y_1)$ infinita di ordine μ (o logaritmicamente)[1] anche le funzioni $I_l\psi$. $J_l\psi$ non possono divenire infinite di ordine $>\mu$ (o più che logaritmicamente). Ed infine che se $\psi(xy)$ e' funzione finita e continua nel punto $(0y_1)$ si ha che lo sono pure $I_l\psi(xy)$, e $J_l\psi(xy)$, e che:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&\lim_{x=0\ y=y_1} I_l\,\psi(xy)=\frac{1}{l+1}\left[1-\frac{1}{2^{l+1}}\right]\psi(0y_1)\\
&\lim_{x=0\ y=y_1} J_l\,\psi(xy)=\frac{1}{l+1}\,\psi(0y_1)
\end{aligned}
$$

Segue da queste osservazioni che se $\varphi(xy)$ è continua nel punto $(0y_1)$, lo sono pure $\varphi^{(1)}(xy)$, $\varphi^{(2)}(xy)$.... e che di più si ha:

$$(13)\qquad \varphi(0,y_1)=\varphi^{(1)}(0,y_1)=\varphi^{(2)}(0\,y_1)=\varphi^{(3)}(0y_1)=\dots\dots$$

E se si suppone di più che le derivate dei primi $g_1 \leq g$ ordini siano finite e continue nei punti $(0y_1)$ dalle formule (4) e (8) segue che lo saranno pure le derivate dei primi g_1 ordini di $\varphi^{(1)}(xy)$, $\varphi^{(2)}(xy)$,.....

E più in generale se la funzione $\varphi(xy)$ è tale che le sue derivate k^{esime} divengano in $(0y_1)$ infinite di ordine m_k (o logaritmicamente) le derivate k^{esime} di $\varphi^{(1)}(xy)$, $\varphi^{(2)}(xy)$... sono tutte in $(0.y_1)$ infinite al più di ordine m_k (o logaritmicamente).

Infine se noi supponiamo di sapere che le derivate di ordine $k \leq g$ di $\varphi(xy)$ sono finite anche nell'intorno dell'asse delle y o che si diventano infinite come $\frac{1}{x^{p_k}}$ ma non sappiamo nulla sulle derivate $(k+1)^e$, $(k+2)^e$,..., possiamo tuttavia asserire per le (4), (9), (10) che le derivate $(k+1)^e$ di $\varphi^{(1)}(xy)$ divengono infinite al più come $\frac{1}{x^{p_k+1}}$, che le $(k+2)^e$ di $\varphi^{(2)}$ divengono infinite al più come $\frac{1}{x^{p_k+2}}$.....

Effettivamente analoghe sono le proprietà delle funzioni:

(14) $\varphi^{(1,h)}(xy) = \dfrac{[illegible]}{[illegible]}\, x^{[illegible]} \int_0 [illegible]\,\varphi - \lambda^{(h)}\varphi(xy)$, $\varphi^{(2,h)}(xy)=\lambda^{(h)}\varphi^{(1,h)}(xy)-\lambda^{(h)^2}\varphi(xy)$ ...... $(h \leq g)$

---

(1) [illegible] ... [illegible] al solito l'inverso della distanza.

le quali non differiscono dalle (11) che per un fattore.

Ma dalle (4) (8) e (12) si deduce di più per quest'ultime funzioni che, se la $\varphi(xy)$ si annulla sull'asse delle y insieme colle sue derivate di ordine $\leq h-1$ (e quindi anche insieme colle sue derivate di ordine h che contengono una derivazione almeno fatta rapporto ad y) anche le $\varphi^{(1h)}, \varphi^{(2h)}, \ldots$ si annullano insieme colle loro derivate dei primi $k-1$ ordini e si ha:

$$(15)\quad \left(\frac{\partial^h \varphi}{\partial x^h}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^h \varphi^{(1h)}}{\partial x^h}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^h \varphi^{(2h)}}{\partial x^h}\right)_{x=0} = \ldots\ldots$$

4. — Analogamente consideriamo la funzione:

$$(16)\qquad \bar{\varphi}^{(1,h)}(xy) = \frac{2^{h+1}}{2^{h+1}-1}\, x \cdot J_0 I_0\, \varphi(xy) = H^{(h)}\varphi(xy) \qquad (h \neq g)$$

Potremo anche scrivere:

$$\bar{\varphi}^{(1h)}(xy) = \frac{1}{h+1}\, x\, K^{(h)}\varphi(xy).$$

Ancora quindi all'interno di S' la $\bar{\varphi}^{(1,h)}(xy)$ avrà le derivate dei primi $g+1$ ordini tosto che la $\varphi(xy)$ ha le derivate dei primi g ordini. Ma di più si ha evidentemente:

$$(17)\quad \frac{\partial^t \bar{\varphi}^{(1,h)}(xy)}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{1}{h+1}\left[i\, \frac{\partial^{t-1} K^{(h)}\varphi(xy)}{\partial x^{i-1}\partial y^j} + x\, \frac{\partial^t K^{(h)}\varphi(xy)}{\partial x^i \partial y^j}\right]$$

Onde segue immediatamente dalle proprietà trovate sopra per la $\varphi^{(1,h)}(xy)$ e dalle formule dei n.1 e 2, che:

1°. Se la funzione $\varphi(xy)$ ha le derivate dei primi $g_1 \leq g$ ordini finite e continue in un punto (oy_1), la $\bar{\varphi}^{(1,h)}(xy)$ ammette le derivate dei primi g_1+1 ordini finite e continue nel punto (oy_1). E se le derivate di ordine di $\varphi(xy)$ divengono nell'intorno del punto (oy_1) infinite di ordine m_k (o logaritmicamente), le derivate di ordine $k+1$ della $\bar{\varphi}^{(1,k)}$ divengono infinite di ordine al più uguale al maggiore dei due numeri $m_k - 1$ e m_{k-1} (o restano finite).

2°. Se la funzione $\varphi(xy)$ è nulla insieme colle sue derivate dei primi $h-1$ ordini sull'asse delle y, la funzione $\bar\varphi^{(1,h)}$ è nulla insieme colle sue derivate dei primi h ordini sull'asse delle y (e quindi anche insieme colle derivate di ordine $h+1$ che contengono una derivazione rapporto ad y): ed inoltre si ha:

$$\left(\frac{\partial^{h+1}\bar\varphi^{(1,h)}}{\partial x^{h+1}}\right)_{x=0}=\left(\frac{\partial^h\varphi}{\partial x^h}\right)_{x=0} \tag{18}$$

È chiaro come di analoghe proprietà godono le:

$$\bar\varphi^{(2,h)}(xy)=H^{(h+1)}\bar\varphi^{(1,h)}(xy)=H^{(h+1)}H^{(h)}\varphi(xy)$$

$$\bar\varphi^{(3,h)}(xy)=H^{(h+2)}\bar\varphi^{(2,h)}(xy)=H^{(h+2)}H^{(h+1)}H^{(h)}\varphi(xy) \tag{16bis}$$

- -

In particolare le (18) danno:

$$\left(\frac{\partial^h\varphi}{\partial x^h}\right)_{x=0}=\left(\frac{\partial^{h+1}\bar\varphi^{(1,h)}}{\partial x^{h+1}}\right)_{x=0}=\left(\frac{\partial^{h+2}\bar\varphi^{(2,h)}}{\partial x^{h+2}}\right)_{x=0}=\ldots\ldots \tag{18bis}$$

5.— Premesse queste considerazioni, possiamo risolvere con tutta generalità il problema seguente: siano date sull'asse delle y $t+1$ funzioni $\psi_0(y), \psi_1(y), \psi_2(y), \ldots\ldots \psi_t(y)$ e si supponga che esse siano generalmente finite e continue, e che ψ_i ammetta le derivate generalmente finite e continue fino all'ordine $g-i$. Colla parola *generalmente* intendiamo dire fatta eccezione per un numero finito di punti in cui la derivata $(k-i)$esima di ψ_i diviene infinita di ordine $\leq m_k$ (o logaritmicamente).

È da costruirsi una funzione $\psi(xy)$ tale che nei punti del semipiano (od in una striscia S) a destra dell'asse delle y — e non appartenenti ad esso — abbia le derivate finite e continue fino a quell'ordine g che più ci piace, e che sull'asse delle y soddisfaccia alle condizioni:

$$\psi(oy)=\psi_0(y),\ \frac{\partial\psi(oy)}{\partial x}=\psi_2(y),\ldots\ldots\ldots\ \frac{\partial^t\psi(oy)}{\partial x^t}=\psi_t(y)$$

ammetta anche sull'asse delle y tutte le derivate finite e continue fino all'ordine q, fatta eccezione dei punti in cui le funzioni assegnate divengono singolari dove tutte le sue derivate di ordine k possono divenire infinite, ma di ordine $\leq m_k$ (o al più logaritmicamente).

È chiaro che per risolvere questo problema basta risolvere il caso particolare in cui sia assegnato che la funzione $\psi(xy)$ deve ridursi a zero insieme colle sue derivate dei primi $t-1$ ordini mentre la derivata $\frac{\partial^t \psi(xy)}{\partial x^t}$ deve per $x=0$ prendere valori assegnati $\psi_t(y)$. Poichè la funzione corrispondente al caso generale si può comporre per somma di parecchie di tali funzioni.

Di più ove la funzione $\psi_t(y)$, o le sue derivate, avessero ν_t punti singolari si potrebbe porre $\psi_t(y) = \psi_t^{(1)}(y) + \psi_t^{(2)}(y) + \dots \psi^{(\nu_t)}(y)$ colla condizione che $\psi_t^{(i)}(y)$ e le sue derivate abbia solo singolarità nell'$i$esimo punto, per ricondurci al caso in cui la funzione $\psi_t(y)$ ha un solo punto singolare; lo chiameremo O.

Posto il problema in questo modo, noi cominceremo col costruire una funzione $\varphi(xy)$ la quale prenda sull'asse delle y i valori di $\psi_t(y)$, abbia in O lo stesso comportamento di $\psi_t(y)$, ed ammetta nel semipiano le prime $q-t$ derivate.

Basterà perciò procedere ad esempio nel modo seguente. Si descriva il fascio dei cerchi di centro O e su ognuno di essi, si interpoli linearmente tra i valori che sono assegnati nei punti in cui esso incontra l'asse delle y: si otterrà evidentemente una funzione che gode della proprietà volute.

Partendo da $\varphi(xy)$ si costruiranno poi le funzioni $\varphi^{(1)} = H^{(1)}\varphi$, $\varphi^{(2)} = H^{(2)}H^{(1)}\varphi, \dots \varphi^{(t)} = H^{(t)}H^{(t-1)}\dots H^{(1)}\varphi$; per le proprietà dimostrate nel n. 4 l'ultima di queste funzioni avrà le derivate dei primi q ordini nel semipiano S sarà nulla colle derivate dei primi $k-1$ ordini sull'asse delle y, mentre la deriva-ta τ esima rapporto ad x sarà uguale alla funzione $\psi_\tau(y)$ assegnata; ed è finita e continua insieme colle sue derivate anche sull'asse delle y tranne che nel punto O dove le sue derivate di ordine k divengano infinite di ordine non maggiore di m_k (o non più che logaritmicamente).

Ed infine per i risultati del n.3 basterà poi porre:

$$\psi(xy) = K^{(1)\,g-g}\varphi^{(1)}(xy) = K^{(1)\,g-g}H^{(\tau)}H^{(\tau-1)}\dots H^{(1)}\varphi(xy)$$

perchè la funzione $\psi(xy)$ così costruita, conservando le proprietà al contorno volute, abbia nei punti interni al semipiano le derivate dei primi g ordini finite e continue. Onde resta risoluto il problema proposto.

6.– Completiamo quanto precede con due osservazioni.

Osservazione I. – Abbiamo fin qui supposto che i dati si riferissero a tutto l'asse delle y. È chiaro che ove invece le funzioni $\psi_0(y), \psi_1(y), \psi_2(y), \dots$ fossero date solo sopra un segmento dell'asse delle y basterebbe prolungarle convenientemente per ridursi al caso precedente.

Osservazione II. – Supponiamo che le funzioni assegnate dipendano oltre che dalla y anche da un certo numero di parametri $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_p$: scriveremo dunque $\psi^{(1)}(y; \mu_1 \mu_2 \dots \mu_p)$, al posto di $\psi^{(1)}(y)$. Supponiamo che in un certo campo A di variabilità per le μ, queste funzioni e le loro derivate ammettano le derivate dei primi h ordini, oppure siano ug[ualmente] continue, oppure, ecc. È facile vedere che la $\psi(xy)$ da noi costruita considerata come funzione dei parametri μ gode delle stesse proprietà. Invero la cosa è evidente per la funzione $\varphi(xy)$ da noi costruita nel n. precedente

E siccome la ψ si ottiene poi da questa operando colle H e colle K, e queste operazioni di integrazione mantengono evidentemente le proprietà di derivabilità, di analiticità e simili rispetto ai parametri μ, che possedeva la primitiva funzione, risulta evidente l'enunciato.

7.– Però il problema che si presenta nel corso del nostro lavoro non consiste propriamente nel determinare una funzione che assuma valori assegnati insieme con un certo gruppo di sue derivate sull'asse delle y, ma bensì sopra una curva chiusa γ limitante un campo C. Ci riporteremo facilmente da questo a quel caso con alcuni semplici artifici.

Supponiamo che le equazioni:

$$x = x(s), \qquad y = y(s)$$

le quali determinano γ, ammettano le derivate dei primi $q+1$ ordini con $q \geq 1$ finite e continue. Si potrà allora, staccando su tutte le normali un segmento α inferiore al minimo raggio di curvatura, determinare una corona C_1 a C, aderente alla curva γ e tale che in essa possono assumersi quali variabili coordinate di un punto P la lunghezza n del segmento della normale (minimo) a γ passante per P ed il valore di s nel punto in cui questa normale incontra C. Le coordinate di un punto xy di C_1 saranno date in funzione di n ed s dalle:

$$(1) \qquad x(n\,s) = x(s) + n\,y'(s) \qquad\qquad y(n\,s) = y(s) - n\,x'(s).$$

Le (1) danno così delle formule che servono a rappresentare la corona C_1 nel piano xy su un tratto della striscia S compresa fra le rette $n=0$, $n=\alpha$ del piano n,s. E le formule di trasformazione (1) – e le loro inverse – ammettono derivate finite e continue anche sul contorno di ordine $\leq q$.

Possiamo sostituire ancora le variabili n, s con una coppia di variabili n_1, s_1 tali che ancora risulti il campo C_1 ed una sua parte rappresentata in una striscia limitata dalla retta $n_1 = 0$, e, restando i valori delle derivate di ordine $\leq g$ di x, y rapporto ad n_1, s_1, su $n_1 = 0$ uguali a quelli di x ed y rapporto ad n, s, all'interno del campo C_1, esistano anche le derivate dei primi $G+1 \geq g+1$ ordini. Infatti si costruiscano due funzioni $\xi(n s)$ $\eta(n s)$ che sull'asse $n = 0$ prendano insieme colle loro derivate di ordine $\leq g$ gli stessi valori di $x(ns)$, $y(ns)$ e delle loro derivate rispettivamente; e che entro S' ammettano le derivate dei primi $G+1$ ordini. E si determinino le n_1, s_1 mediante le equazioni:

(2) $\qquad x = \xi(n_1, s_1) \qquad\qquad y = \eta(n_1, s_1)$

queste ci danno le variabili xy in funzione di n_1, s_1 e viceversa n_1, s_1 in funzione di x ed y in modo che quando $x\ y$ è entro C', sia queste formule quanto le formule inverse ammettono le derivate dei primi $G+1$ ordini; ed inoltre ai punti (xy) sulla curva γ corrisponderanno evidentemente punti dell'asse $n_1 = 0$, e in questi punti le formule di trasformazione ammetteranno le derivate di ordine $\leq g$ ed avranno gli stessi valori delle derivate delle funzioni (1).

Impicciolendo C_1 si potrà prendere in esso un campo C_1' che nel piano in cui sono variabili coordinate x_1 ed y_1 sia rappresentato in un pezzo della striscia S_1 compresa fra $n_1 = 0$ ed $n_1 = \alpha_1$.

Con ciò intendo, noi possiamo sempre trovare in C una corona C_1' aderente a γ, la quale possa rappresentarsi su un piano $s_1 n_1$ in un tratto della striscia S' compresa fra $n_1 = 0$, ed $n_1 = \alpha_1$, $n_1 = 0$ rappresentando l'immagine di γ. E possiamo fare in modo che le formule di trasformazione che

danno xy come funzioni di s, n_1 (e viceversa) ammettano all'interno di C'_1 (e di S'_1) le derivate dei primi $g+1$ ordini finite e continue, e sulla curva γ (e sull'asse $n_1=0$) abbiano le derivate dei primi g ordini finite e continue, ed anzi tali che
$$\left(\frac{\partial^t x}{\partial n_1^i \partial s^j}\right)_{n_1=0}=\left(\frac{\partial^t x}{\partial n^i \partial s^j}\right)_{n=0}$$

Diremo γ_1 la curva che con γ limita C'_1 e cioè la curva corrispondente alla retta $n_1=\alpha_1$; la curva γ_1 sarà data da funzioni della forma:

$$x_1=\pi_1(s_1) \qquad\qquad y=\pi_2(s_1)$$

le quali ammettono le derivate dei primi g ordini.

8 Ciò posto siano assegnate sulla curva γ t funzioni $\psi_0(s)$, $\psi_1(s), \dots \psi_t(s)$ finite e continue, e tali che $\psi_i(s)$ ammetta derivate generalmente finite e continue dei primi $g-i$ ordini, fatta eccezione per uno o più punti singolari in cui le derivate di ordine $k-1$ divengono infinite di ordine m_k. E si voglia costruire una funzione $\psi(xy)$ finita e continua insieme colle derivate dei primi g ordini entro C, e tale che esistano le derivate dei primi g ordini anche su γ e che precisamente su γ sia $\psi(xy)=\psi_0(s)$ $\frac{\partial^i\psi(xy)}{\partial n^i}=\psi_i(s)$ e che le derivate di ψ di ordine k abbiano solo dei punti singolari nei punti di γ dove divengono infinite di ordine $\leq m_k$. Perciò cominciamo dal prendere una qualunque funzione $h(xy)$ finita e continua all'interno di C insieme colle sue derivate dei primi g ordini. E nel campo $C-C'_1$ poniamo $\psi(xy)=h(xy)$.

Mediante la trasformazione del n. precedente il problema è allora ridotto a costruire una funzione $\Psi(n_1 s_1)$ nella striscia S' limitata dalle rette $n_1=0$, $n_1=\alpha_1$, la quale ammetta entro S'_1 le derivate dei primi g ordini, prenda insieme colle sue derivate di ordine $\leq g$ e $\leq G$ valori assegnati rispettivamente sulle rette $n_1 = 0$, $n_1 = \alpha_1$, ecc.

E tale problema si potrà spezzare allo stesso modo che nel n. 5 in una serie di problemi del tipo seguente: costruire una funzione $\overline{\psi}^{(h)}(n, s)$ che ammetta all'interno di S_1 e sulla $n_1 = \alpha_1$ le derivate dei primi G ordini, si annulli insieme colle sue derivate dei primi $h-1$ ordini su $n_1 = 0$, ed $n_1 = \alpha_1$, mentre le derivate h-esime rispetto ad n_1 di ordine h abbiano valori assegnati, e sulle rette $n_1 = 0$, $n_1 = \alpha_1$ abbiano il solito comportamento già più volte descritto.

Nel caso generale si costruiscano come si mostrò al n. 5 due funzioni:

$$\overline{\psi}_0^{(h)}(n, s_1) \qquad\qquad \overline{\psi}_1^{(h)}(n, s_1)$$

le quali soddisfacciano rispettivamente alle condizioni imposte sulle rette $n_1 = 0$, $n_1 = \alpha_1$ ed esistano rispettivamente a destra di $n_1 = 0$ ed a sinistra di $n_1 = \alpha_1$. La funzione

$$\overline{\psi}^{(h)}(n, s_1) = \frac{1}{h!}\left[\frac{n_1^h}{\alpha_1}\psi_1^{(h)}(n, s_1) + \frac{(n_1 - \alpha_1)^h}{\alpha_1}\psi_0^{(h)}(n, s_1)\right]$$

soddisferà evidentemente a tutte le condizioni imposte.

Osservazione I. – Se le funzioni assegnate al contorno dipendono da certi parametri, ma sono funzioni finite e continue, o derivabili od analitiche, ecc. di tali parametri le funzioni da noi costruite vi e dipenderanno da questi parametri e saranno ancora funzioni continue, o derivabili od analitiche, ecc., di essi come evidentemente risulta dall'osservazione II del n. 6.

9. – Tutte le considerazioni precedenti valgono pure quando si tratti di campi a più di due dimensioni, e di funzioni in più di due variabili.

§ II. Sulle derivate del termine complementare della formula di Taylor.

1. Sia $x(s)$ una funzione finita e continua insieme colle sue derivate dei primi m ordini: $\xi(\sigma)$ il valore di essa nel punto σ; si ha:

$$(1)\quad \xi(\sigma) = x(s) + x'(s)(\sigma - s) + \frac{1}{2}x''(s)(\sigma - s)^2 + \dots + \frac{1}{(h-1)!}x^{(h-1)}(s)(\sigma - s)^{h-1} + \frac{1}{h!}x_h(s;\sigma)(\sigma - s)^h$$

dove $x_h(s;\sigma)$ è uguale al valore della derivata $h$esima di x in un conveniente punto intermedio tra s e σ. Mi propongo di dimostrare che la funzione $x_h(s;\sigma)$ ammette le derivate le quali non contengono più di $m-h+1$ derivazioni rapporto ad s, nè più di m rapporto a σ; e che quelle di tali derivate che sono di ordine $\leq m-h$ sono finite anche per $s=\sigma$, mentre quelle di ordine $k > m-h$ divengono infinite di ordine $k-m+h$.

Da (1) segue:

$$(2)\qquad x_h(s;\sigma) = h!\,\frac{\xi - x - x'(\sigma - s) - \frac{1}{2}x''(\sigma - s)^2 \dots - \frac{1}{(h-1)!}x^{(h-1)}(s)(\sigma - s)^{h-1}}{(\sigma - s)^h};$$

E poichè ξ ha le derivate di ordine $\leq m$, $x, x', \dots x^{(h-1)}$ hanno le derivate di ordine $\leq m-h+1$; ne segue la prima affermazione.

2. — Per provare la seconda parte incominciamo dal caso in cui $m = h$.

Se $m = h = 1$ si ha da (2):

$$x_1(s;\sigma) = \frac{\xi - x}{\sigma - s}.$$

E quindi si ha:

$$\frac{\partial x_1(s;\sigma)}{\partial s} = \frac{-x'(\sigma-s)+(\xi-x)}{(\sigma-s)^2} = \frac{x_1(s;\sigma)-x'}{\sigma-s},$$

$$\frac{\partial x_1(s;\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\xi'(\sigma-s)-(\xi-x)}{(\sigma-s)^2} = \frac{\xi'-x_1(s;\sigma)}{\sigma-s},$$

$$\frac{\partial^2 x_1(s;\sigma)}{\partial s\,\partial\sigma} = \frac{1}{(\sigma-s)^2}\left[\frac{\partial x_1(s;\sigma)}{\partial\sigma}(\sigma-s)-(x_1(s;\sigma)-x')\right] = $$

$$= \frac{\xi'+x'-2x_1(s;\sigma)}{(\sigma-s)^2};$$

e tali formule dimostrano l'asserto.

Supponiamo il teorema dimostrato per $m=h\leq i-1$ e dimostriamolo per $m=h=i$.

Si ha ancora da (2):

$$\frac{\partial x_i(s;\sigma)}{\partial s} = i!\,\frac{\frac{1}{(i-1)!}x^{(i)}(\sigma-s)^i + i\left[\xi-x-x'(\sigma-s)\dots-\frac{1}{(i-1)!}x^{(i-1)}(\sigma-s)^{i-1}\right]}{(\sigma-s)^{i+1}} =$$

(3)
$$= i\,\frac{x^{(i)}(s)-x_i(s;\sigma)}{\sigma-s}.$$

Inoltre ricordando che analogamente ad (1) è:

(4) $$\xi'(\sigma) = x'(s)+x''(s)(\sigma-s)+\frac{1}{2}x'''(s)(\sigma-s)^2+\dots+\frac{1}{(i-2)!}x^{(i-1)}(s)(\sigma-s)^{i-2}+\frac{1}{(i-1)!}x_{1,i-1}(s;\sigma)(\sigma-s)^{i-1}$$

si avrà:

$$\frac{\partial x_i(s;\sigma)}{\partial\sigma} = i!\,\frac{\left[\xi'-x'-x''(\sigma-s)-\dots-\frac{1}{(i-2)!}x^{(i-1)}(\sigma-s)^{i-2}\right](\sigma-s)-i\left[\xi-x-x'(\sigma-s)\dots-\frac{1}{(i-1)!}x^{(i-1)}(\sigma-s)^{i-1}\right]}{(\sigma-s)^{i+1}}.$$

(5)
$$= i\,\frac{x_{1,i-1}(s;\sigma)-x_i(s;\sigma)}{\sigma-s}.$$

E dalle formule (3) e (5), ricordando che per (3) $x_{1,i-1}(s;\sigma)$ è il termine complementare per una funzione per cui $m=h=i-1$, segue l'asserto del n. 1.

3. Passiamo a studiare il caso generale. Ammettiamo ancora dimostrato il teorema per $m-h\leq j-1$ e dimostriamolo per $m-h=j$.

Osserviamo allora che confrontando le formule di Taylor (1) e (4) con quelle che si ottengono prolungandole ancora di un termine segue, ponendo h al posto di i:

$$x_h(s;\sigma) = x^{(h)}(s) + \frac{1}{h+1}\, x_{h+1}(s,\sigma)(\sigma - s)$$

$$x_{1,h-1}(s;\sigma) = x^{(h)}(s) + \frac{1}{h}\, x_{1,h}(s;\sigma)(\sigma - s)$$

Con ciò le (3) e (5) dànno:

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial x_i(s;\sigma)}{\partial s} &= -\frac{h}{h+1}\, x_{h+1}(s;\sigma) \\ \frac{\partial x_i(s;\sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{h}{h+1}\left[x_{1,h}(s;\sigma) - x_{h+1}(s;\sigma)\right] \end{aligned}$$

E basta osservare che $x_{h+1}(s;\sigma)$, $x_{1,h}(s;\sigma)$ sono termini complementari in sviluppi di funzioni per cui la differenza $m-h$ vale $j-1$, e che quindi per essi già si ammette valere il teorema da dimostrarsi per dedurre dalle (6) che il teorema è vero sempre.

INDICE

I PROBLEMI DEI VALORI

AL CONTORNO PER LE EQUAZIONI LINEARI

TOTALMENTE ELLITTICHE

ALLE DERIVATE PARZIALI

MEMORIA

DEL DOTT.

EUGENIO ELIA LEVI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1909

I PROBLEMI DEI VALORI

AL CONTORNO PER LE EQUAZIONI LINEARI

TOTALMENTE ELLITTICHE

ALLE DERIVATE PARZIALI

MEMORIA

DEL DOTT.

EUGENIO ELIA LEVI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1909

Estratto delle *Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL).*
Serie 3ª, Tomo XVI.

CAPITOLO I.

Concetto generale del metodo e prime applicazioni.

§ 1.

Introduzione.

1. Sia data un'equazione lineare totalmente ellittica alle derivate parziali di ordine $2n$. Il problema fondamentale tipico per la teoria di tali equazioni consiste nel determinare una soluzione finita e continua insieme colle sue derivate dei primi $2n$ ordini all'interno di un campo C, quando si assegnino i valori che la funzione e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini debbono assumere sul contorno γ (curva, superficie, od ipersuperficie) del campo medesimo. E i classici studii sull'equazione $\Delta_2 u = 0$, e i più recenti sulle equazioni più generali:

$$\Delta_2 u + \sum_1^n{}_i\, a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + bu + c = 0,$$

$$\Delta_4 u = 0 \quad , \quad \Delta_{2n} u = 0,$$

hanno mostrato che in generale esiste una, ed una sola soluzione del problema proposto. Più precisamente risulta da essi che il teorema di esistenza è vero, tostochè è dimostrato il teorema di unicità: e, inversamente, che è vero il teorema di unicità tosto che è dimostrato il teorema di esistenza; ed inoltre che, dato un campo ed una equazione, si può sempre, ed in infiniti modi, nell'equazione medesima introdurre un parametro per modo che i teoremi di unicità e di esistenza pel campo dato siano veri per qualunque valore del parametro, fatta eccezione per certi valori isolati. Diremo brevemente che *i teoremi di esistenza e di unicità valgono generalmente, e vengono sempre a mancare insieme.*

In questo lavoro io mi propongo di stabilire questo risultato nel caso delle equazioni lineari in due variabili; ma il metodo che svolgo è assai generale, e si presta anche agevolmente a studiare problemi analoghi in cui si muti la natura dei dati al contorno, oppure si sostituisca alla considerazione di una sola equazione quella di un sistema. Ulteriori applicazioni di esso io spero di poter dare prossimamente.

Cercherò in questo primo paragrafo di esporre brevemente l'idea fondamentale.

2. Sia

$$\mathfrak{E}u = 0 \tag{1}$$

l'equazione assegnata di ordine $2n$. Conviene sovente nel seguito separare nel primo membro di questa equazione il gruppo $\mathfrak{M}u$ dei termini contenenti le derivate di ordine massimo $2n$, il gruppo $\mathfrak{N}u$ degli altri termini contenenti u od una sua derivata di ordine $< 2n$, ed il termine noto f: scriveremo allora l'equazione (1) anche nel modo seguente:

$$\mathfrak{E}u \equiv \mathfrak{M}u + \mathfrak{N}u + f = 0. \tag{2}$$

Notiamo subito che si può sempre supporre che i valori assegnati su γ per u e per le sue derivate di ordine $\leq n-1$ siano lo zero: basterà invero, ove ciò non fosse, considerare una funzione u_1 finita e continua colle sue derivate di ordine $\leq 2n$ entro C, la quale prenda insieme colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ i valori assegnati su γ; la funzione $u - u_1$ dovrà soddisfare ad una equazione affatto analoga a (2) dove sia cambiato il termine noto, e dovrà annullarsi su γ insieme colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ (¹).

Ciò posto, supponiamo, come dicemmo, per fissare le idee, che l'equazione proposta sia in due variabili. Ammettiamo che si possa trovare una funzione $\psi(xy\,;x_1y_1)$ di due punti (xy) e (x_1y_1) del campo C (il contorno γ incluso) tale che:

1) La funzione ψ sia finita e continua insieme colle sue derivate dei primi $2n$ ordini in tutti i punti $(xy) \not\equiv (x_1y_1)$.

2) Nei punti $(xy) \equiv (x_1y_1)$ le derivate di ordine $< 2n-2$ siano finite, ma le derivate di ordine $2n-2$, $2n-1$, $2n$ divengano infinite rispettivamente come $\log r(xy\,;x_1y_1)$, $\dfrac{1}{r(xy\,;x_1y_1)}$, $\dfrac{1}{r^2(xy\,;x_1y_1)}$ (²), o, come diremo più brevemente abbiano una singolarità logaritmica, di primo e di secondo ordine. Però la funzione $\mathfrak{M}\psi(xy\,;x_1y_1)$ abbia una singolarità di ordine < 2.

(¹) Maggiore precisione alle ipotesi che conviene perciò fare sul contorno γ e sulle funzioni assegnate su esso, perchè si possa costruire la funzione u_1, sarà data più oltre negli enunciati, e giustificata dagli studii esposti nell'appendice (§ 1) di questo lavoro.

(²) $r(xy\,;x_1y_1) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$.

3) Presa una funzione $\varphi(x_1 y_1)$ finita e continua insieme colle sue derivate prime, la funzione

$$u(xy) = \int\int_C \psi(xy\,;x_1 y_1)\,\varphi(x_1 y_1)\,dx_1\,dy_1 \tag{3}$$

ammetta le derivate dei primi $2n$ ordini, e sia tale che

$$\mathfrak{E}u = \varphi(xy) + \int\int_C \chi(xy\,;x_1 y_1)\,\varphi(x_1 y_1)\,dx_1\,dy_1 + f(xy), \tag{4}$$

essendo $\chi(xy\,;x_1 y_1)$ una funzione finita e continua eccetto che nei punti in cui $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ in cui essa diviene infinita di ordine < 2.

In queste proprietà che postuliamo per la $\psi(xy\,;x_1 y_1)$ si riconoscono le proprietà essenziali della soluzione fondamentale di un'equazione totalmente ellittica alquanto attenuate: io ho mostrato altrove ([1]), e del resto ci occorrerà nel seguito di ritornare di nuovo su di ciò, che una tale funzione si costruisce facilmente quando si conosca la soluzione fondamentale per l'equazione omogenea a coefficienti costanti.

Se ora nella (3) in luogo della funzione $\psi(xy\,;x_1 y_1)$ si pone una funzione

$$\Psi(xy\,;x_1 y_1) = \psi(xy\,;x_1 y_1) + g(xy\,;x_1 y_1) \tag{5}$$

dove $g(xy\,;x_1 y_1)$ rappresenta una funzione finita e continua di (xy) ed $(x_1 y_1)$ insieme colle sue derivate dei primi $2n$ ordini, e si considera la funzione:

$$u(xy) = \int\int_C \Psi(xy\,;x_1 y_1)\,\varphi(x_1 y_1)\,dx_1\,dy_1\,, \tag{6}$$

è chiaro che varrà una formula analoga alla (4):

$$\mathfrak{E}u = \varphi(xy) + \int\int_C \chi_1(xy\,;x_1 y_1)\,\varphi(x_1 y_1)\,dx_1\,dy_1 + f(xy) \tag{7}$$

$$\chi_1(xy\,;x_1 y_1) = \chi(xy\,;x_1 y_1) + \mathfrak{E}g(xy\,;x_1 y_1). \tag{8}$$

È allora naturale pensare di usufruire dell'arbitrarietà della funzione $g(xy\,;x_1 y_1)$ per modo di ridurre mediante la (7) la risoluzione del nostro problema ad una equazione integrale. Si prenda invero per $g(xy\,;x_1 y_1)$ una funzione tale che per $(x_1 y_1)$ interno a C ed (xy) su γ si riduca a $\psi(xy\,;x_1 y_1)$, e che parimenti le derivate di ordine $\leq n-1$ rapporto ad x ed y di $g(xy\,;x_1 y_1)$ si riducano per (xy) su γ alle derivate di $\psi(xy\,;x_1 y_1)$ cambiate di segno; la funzione $\Psi(xy\,;x_1 y_1)$ sarà allora nulla per (xy) su γ insieme colle sue derivate rapporto ad x, y di ordine $\leq n-1$; e lo stesso varrà per la funzione $u(xy)$ data da (6); onde per risolvere il nostro problema si dovrà chiedere ancora solo che la $u(xy)$ data da (6) soddisfi a (2), e cioè che la

([1]) E. E. Levi, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIV, anno 1907.

funzione $\varphi(x_1 y_1)$, che fin qui è pienamente indeterminata soddisfaccia all'equazione integrale di Fredholm:

$$\varphi(xy) + \iint_C \chi_1(xy\,;x_1 y_1)\,\varphi(x_1 y_1)\,dx_1\,dy_1 + f(xy) = 0\,. \tag{9}$$

Simile idea quando per $\psi(xy\,;x_1 y_1)$ si assuma $\log r$, per $g(xy\,;\xi\eta)$ si prenda la funzione di Green, fu applicata già dallo Hilbert e dal Picard (¹) nello studio dell'equazione:

$$\Delta_2 u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + d = f(xy)\,;$$

ed altri autori (²) cercarono già di avvalorarla per problemi più generali come quelli che qui mi propongo. Ma in tale indirizzo si presenta una difficoltà assai grave (³) la quale insieme con un'altra che sarà tosto richiamata, non pare sia stata notata da questi autori. E forse nel presentarsi di questa difficoltà sta la ragione per cui l'applicazione della teoria delle equazioni integrali alle equazioni ellittiche fu compiuta con successo fin qui piuttosto nell'indirizzo del metodo di Neumann-Fredholm (⁴), che nell'altro ora indicato.

(¹) D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen: zweite Mittheilung.* Göttinger Nachrichten, 1904, pag. 213 e ssq. — E. Picard, *Sur la solution du problème généralisé de Dirichlet*, etc. Annales de l'École Normale Sup. 1906, tomo XXIII (pp. 509-516) e C. R., 25 giugno 1906.

(²) L. Orlando, *Sull'integrazione della Δ_4 in un parallelepipedo rettangolo.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXI, 1906 pp. 316-318. — T. Boggio, *Risoluzione del problema dell'equilibrio di un corpo elastico per date tensioni superficiali.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1907, vol. XVI, 2° sem.

Aggiungerò qui che, avendo già pubblicato questo lavoro in pochissime copie litografate, nell'agosto 1908, mi fu comunicato dal sig. Alfred Haar, per incarico avutone dal prof. Hilbert, che a questo si erano già affacciate idee analoghe a quelle svolte in questa Memoria, e che ne aveva parlato fin dall'autunno 1906 in una lezione ed in una Comunicazione alla Società Matematica di Gottinga: ma che per una malattia sopravvenutagli non aveva poi potuto pubblicarle.

(³) Naturalmente tale difficoltà non colpisce minimamente i lavori citati alla nota (1) dello Hilbert e del Picard.

(⁴) Il lavoro fondamentale in quest'indirizzo è quello del Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet.* Ofversigt of Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhand. 1900, n. 1 Stockholm. Vedi anche Plemelj, *Randwertaufgabe der Potentialtheorie.* Monatshefte für Mathematik und Physik. XV Jahrg. — Molte altre applicazioni ed acute modificazioni si debbono al Fredholm medesimo, *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. II, n. 28; al Lauricella, *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali...* Nuovo Cimento, serie 5ª, vol. XVII, 1907; *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_4 V = 0$*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, vol. XVI, 2° sem. 1907; al Marcolongo, *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla fisica matematica*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, vol. XVI, 1° sem; al Picard, *Sur quelques applications de l'équation de M. Fredholm*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXII, 1906; *Sur une formule rélative au potentiel de simple couche*, etc. Annales de l'École Normale Sup., 1906, tomo XXIII. Sulle questioni che si presentano nell'applicare un tal metodo, vedi Lau-

Invero è facile persuadersi che la funzione $g(xy\,;x_1y_1)$, di cui sopra si è richiesta l'esistenza e che per brevità chiamerò « *funzione compensatrice* », si può costruire in modo che essa sia regolare in C e su γ fin quando (x_1y_1) è interno a C: infatti allora essa è soggetta alla sola condizione di assumere su γ insieme colle derivate rapporto a x, y dei primi $n-1$ ordini i valori di $-\psi(xy\,;x_1y_1)$ e delle derivate omonime rapporto ad x, y; e questi valori (almeno quando su γ si facciano convenienti ipotesi che saranno tosto precisate) sono dati da funzioni finite e continue insieme colle derivate dei primi $2n$ ordini. Ma quando il punto (x_1y_1) tende a portarsi in un punto di γ, i valori delle derivate di ψ di ordine $2n-2$, $2n-1$ e $2n$ crescono oltre ogni limite, e precisamente quelle di ordine $2n$ crescono di secondo ordine rapporto all'inversa della distanza di (x_1y_1) da γ: onde lo stesso avverrà delle derivate di $g(xy\,;x_1y_1)$ od almeno di alcune di esse, — ad es. certamente di quelle che sono derivate tangenziali di una derivata di ordine $n-1$. Cosicchè in generale la funzione $\mathfrak{E}g(xy\,;x_1y_1)$ che per (7) compare nella funzione caratteristica dell'equazione (8) avrà nei punti di γ una singolarità di secondo ordine; e quindi non si potrà applicare all'equazione (8) la teoria delle equazioni integrali [1].

Noi possiamo quindi porci il problema della ricerca della funzione compensatrice nel modo seguente: trovare una funzione $g(xy\,;x_1y_1)$ tale che: 1° quando (xy) viene su γ, essa e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini prendano i valori della funzione $-\psi(xy\,;x_1y_1)$ e delle derivate di questa dei primi $n-1$ ordini; 2° sia regolare all'interno del campo e tale di più che la funzione $\mathfrak{E}g(xy\,;x_1y_1)$ o più semplicemente la $\mathfrak{M}g(xy\,;x_1y_1)$ resti finita od al più diventi infinita di ordine <2 anche quando (x_1y_1) tende a portarsi su γ.

Si riconosce così come il problema di cercare una funzione compensatrice molto si approssimi al problema primitivo od a quello equivalente della ricerca della funzione di Green: nei due problemi sono le stesse le condizioni al contorno, ed in entrambi è assegnato il comportamento della funzione rispetto all'equazione (2): possiamo dire che nel problema primitivo l'equazione (2) deve essere soddisfatta, in questo invece essa deve essere soddisfatta soltanto per quanto riguarda i termini di massima singolarità. Però è chiaro per quale ragione l'introdurre la funzione compensatrice semplifichi il problema: esso lo spezza in due gradi: nel primo e cioè nella costruzione di tale funzione si soddisfa alle condizioni al contorno e solo approssimatamente all'equazione proposta; nel secondo e cioè nello studio dell'equazione (8) si opera in modo da soddisfare esattamente all'equazione.

Ricella, *Sulle equazioni integrali.* Annali di Matematica, tomo XV, serie III. A questo metodo si possono avvicinare per quanto esse siano molto originali anche le considerazioni di A. Haar, *Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung* $\Delta_4 u = 0$. Göttinger Nachrichten 1907. Io l'ho applicato ai problemi dei valori al contorno per le equazioni paraboliche; E. E. Levi, *Sull'equazione del calore.* Annali di Matematica, tomo XIV, serie III; idem, *Sul problema di Fourier.* Atti dell'Accademia di Torino, 1908.

[1] È chiara l'importanza di questa difficoltà: se non si tiene conto di essa, non si vede perchè alla $g(xy\,;x_1y_1)$ non si possa imporre di soddisfare anche alla condizione che le sue derivate di ordine $n, n+1, n+2, \ldots 2n$ al contorno prendano i valori di quelli delle derivate omonime della funzione $\psi(xy\,;x_1y_1)$.

In questo secondo punto, nello studio dell'equazione integrale cui si riduce il problema, e cioè nel determinare quando si può assicurare che essa non ha determinante nullo, sta la seconda difficoltà cui si è accennato più sopra (¹).

3. Per spiegare ulteriormente come io proceda allo studio di queste due questioni, io tratterò nei § seguenti col mio metodo i classici problemi relativi dell'equazione $\Delta_2 u = 0$ prima di affrontare il caso generale: esso risulta allora particolarmente limpido grazie all'ampia teoria già nota dei potenziali di strato e di doppio strato che dovrò ricostruire in parte per l'equazioni più generali. Tratterò di queste nel Capitolo II.

Ho rimandato all'Appendice alcuni teoremi ausiliari che mi sono necessari nel corso del lavoro.

Avvertirò ancora che non ho cercato in quanto segue di ottenere la massima economia nelle ipotesi relative e alla forma del contorno ed alle condizioni di derivabilità delle funzioni che compaiono nei dati: e cioè sia nei valori assegnati al contorno, sia nei coefficienti dell'equazione: poichè ciò mi avrebbe condotto a calcoli e discussioni minute, distraendomi dal preciso argomento del presente lavoro.

§ II.

Problema di Dirichlet.

4. Supponiamo che la curva γ contorno del campo C sia determinata col dare le coordinate xy in funzione dell'arco s:

$$x = x(s) \qquad\qquad y = y(s),$$

e supponiamo che le funzioni $x(s)$, $y(s)$ ammettano le derivate finite e continue dei primi quattro ordini. Indicherò a volte l'arco di γ anche con s_1, σ,... e parimenti con $x_1(s_1)$, $y_1(s_1)$; $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$;... le coordinate del punto corrente sulla curva. Se $f_1(xy)$, $f_2(x_1y_1)$, $f_3(\xi\eta)$,... sono funzioni dei punti (xy), (x_1y_1), $(\xi\eta)$,..., indicherò con $f_1(s)$, $f_2(s_1)$, $f_3(\sigma)$... le funzioni di s, s_1,... cui esse si riducono quando (xy), (x_1y_1), $(\xi\eta)$... divengono punti di γ.

Il problema di Dirichlet consiste nel trovare una funzione soddisfacente in C all'equazione $\Delta_2 u = 0$, la quale si riduca su γ ad una funzione assegnata $l(s)$. Se noi supponiamo che $l(s)$ ammetta le derivate dei primi due ordini finite e continue, si potrà, in virtù delle ipotesi fatte sopra γ, costruire una funzione $u_1(xy)$ la quale su γ si riduca a $l(s)$ e nel campo C (il contorno al più escluso) abbia anche le derivate

(¹) La stessa difficoltà costituisce il massimo impedimento nell'estendere il metodo di Neumann-Fredholm. Cfr. Lauricella, *Sulle equazioni integrali*. Annali di Matematica, vol. XV, serie III, pp. 39-40. Quali siano i vantaggi che relativamente ad essa presenta il metodo che qui propongo ho spiegato più oltre nel n. 7 (§ II).

terze (vedi *Appendice*, § 1). È allora legittima la trasformazione del problema enunciata nel § I (n. 2): noi possiamo limitarci a cercare una funzione $u(xy)$ nulla su γ che soddisfaccia all'interno di C all'equazione:

$$\Delta_2 u = f(xy), \tag{1}$$

$f(xy)$ essendo una funzione finita e continua, che all'interno di C ammette anche le derivate del primo ordine finite e continue.

Come funzione $\psi(xy\,; x_1y_1)$ si deve assumere qui la funzione $\log r(xy\,; x_1y_1)$.

5. Procediamo alla costruzione della funzione compensatrice. Si ponga:

$$e(xy\,; x_1y_1) = \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(xy\,;\sigma)}{\partial n_\sigma} \log r(\sigma\,; x_1y_1) d\sigma. \tag{2}$$

$e(xy\,; x_1y_1)$ è una soluzione dell'equazione $\Delta_2 e = 0$: inoltre essa è funzione finita e continua insieme colle sue derivate dei varii ordini, almeno finchè dei due punti (xy) ed (x_1y_1) l'uno almeno è interno a C. Quando il punto (xy) tende ad un punto (s) del contorno, si avrà:

$$\begin{aligned} e(s\,; x_1y_1) &= \lim_{(xy)\equiv(s)} e(xy\,; x_1y_1) = -\log r(s\,; x_1y_1) + \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(s\,;\sigma)}{\partial n_\sigma} \log r(\sigma\,; x_1y_1)\, d\sigma \\ &= -\log r(s\,; x_1y_1) - e_1(s\,; x_1y_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Ammettiamo per maggiore semplicità che $x(s)$ ed $y(s)$ abbiano le derivate dei primi 5 ordini finite e continue; ci ridurremo più tardi con un piccolo artificio alle condizioni ammesse per γ nel n. 4. È allora agevole vedere che $e_1(s\,; x_1y_1)$ ha tutte le derivate che contengono due derivazioni al più rapporto ad s, una al più rapporto ad x_1y_1, finite e continue, anche quando x_1y_1 va su γ. Infatti si osservi che, se si pone

$$\begin{aligned} x(s) - \xi(\sigma) &= \xi'(\sigma)(s-\sigma) + \tfrac{1}{2}\xi_2(s\,;\sigma)(s-\sigma)^2 \\ y(s) - \eta(\sigma) &= \eta'(\sigma)(s-\sigma) + \tfrac{1}{2}\eta_2(s\,;\sigma)(s-\sigma)^2, \end{aligned} \tag{4}$$

le funzioni $\xi_2(s\,;\sigma)$, $\eta_2(s\,;\sigma)$ ammettono le derivate dei primi 3 ordini finite e continue (*Appendice*, § II). D'altra parte si ha allora, ricordando che $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log r(s\,;\sigma)}{\partial n_\sigma} &= \frac{-[x-\xi]\eta' + [y-\eta]\xi'}{r^2(s\,;\sigma)} = \\ &= \frac{\eta_2\xi' - \xi_2\eta'}{2 + 2(s-\sigma)(\xi_2\xi' + \eta_2\eta') + \frac{1}{2}(s-\sigma)^2(\xi_2^2 + \eta_2^2)}\,; \end{aligned} \tag{5}$$

onde segue che anche questa funzione ammette le derivate dei primi 3 ordini finite e continue. Per modo che le funzioni

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} e_1(s\,;x_1y_1) &= -\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(s\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\log r(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma \\ \frac{\partial e_1(s\,;x_1y_1)}{\partial s} &= -\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial^2 \log r(s\,;\sigma)}{\partial n_\sigma \partial s}\log r(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma \\ \frac{\partial^2 e_1(s;x_1y_1)}{\partial s^2} &= -\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial^3 \log r(s\,,\sigma)}{\partial n_\sigma \partial s^2}\log r(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma \end{aligned}\right.$$

saranno, considerate come funzioni di $(x_1\, y_1)$, dei potenziali di semplice strato la cui densità è funzione continua e derivabile dell'arco, onde a loro volta ammetteranno le derivate del primo ordine rapporto ad x_1 e y_1 finite e continue in tutto C, il contorno γ incluso.

Evidentemente poi all'interno di C esistono ancora tutte le derivate di ordine superiore di queste funzioni (6) rapporto ad (x_1y_1) [1].

È allora possibile costruire in C una funzione $e_1(xy\,;x_1y_1)$ la quale su γ si riduca alla funzione $e_1(s\,;x_1y_1)$ ed abbia tutte le derivate le quali non contengono più di due derivazioni rapporto ad xy, e di una rapporto ad x_1y_1 finite e continue in C e su γ: ed all'interno di C sia ancora derivabile una volta sia rapporto ad xy, che rapporto ad x_1y_1 (Vedi *Appendice*, § 1).

In particolare posto:

$$(7)\qquad \Delta_2 e_1(xy\,;x_1y_1) = h(xy\,;x_1y_1)$$

la funzione $h(xy\,;x_1y_1)$ è finita e continua, ed ammette le derivate finite e continue del primo ordine rapporto ad x_1y_1 in C e su γ: ed all'interno di C le derivate prime rapporto ad xy e le seconde rapporto ad x_1y_1.

Si ponga allora:

$$(8)\qquad g(xy\,;x_1y_1) = e(xy\,;x_1y_1) + e_1(xy\,;x_1y_1).$$

Essa può assumersi quale funzione compensatrice: per (3) infatti essa soddisfa alle condizioni assegnate su γ: e d'altra parte sarà per (7):

$$(9)\qquad \Delta^2 g(xy\,;x_1y_1) = h(xy\,;x_1y_1).$$

Onde, detta $\varphi(x_1y_1)$ una funzione che entro C ammetta le derivate prime finite e continue, la funzione:

$$(10)\qquad u(xy) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_C \Big\{\log r(xy\,;x_1y_1) + g(xy\,;x_1y_1)\Big\}\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1$$

[1] Nel seguito quando si dirà nell'interno di C, o entro C, s'intenderà sempre come escluso il contorno γ.

sarà nulla su γ, ammetterà le derivate prime e seconde entro C e sarà tale che:

$$\Delta_2 u(xy) = \varphi(xy) + \frac{1}{2\pi}\int\int_C h(xy\,;x_1y_1)\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1dy_1\,. \tag{11}$$

6. Affinchè la $u(xy)$ data da (10) sia dunque soluzione di (1), occorrerà che la funzione $\varphi(xy)$ ammetta entro C le derivate prime, e sia soluzione dell'equazione integrale:

$$\varphi(xy) + \frac{1}{2\pi}\int\int_C h(xy\,;x_1y_1)\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = f(xy)\,. \tag{12}$$

L'equazione integrale (12) può avere determinante nullo oppure no. Se ha determinante non nullo essa ammetterà sempre soluzione: dal fatto che all'interno di C sia la $f(xy)$ che la $h(xy\,;x_1y_1)$ ammettono derivate prime, segue che lo stesso avverrà per $\varphi(xy)$; onde la funzione rappresentata da (10) risolverà il problema proposto.

Ma può benissimo accadere che il determinante di (12) sia nullo, ed allora esisteranno m funzioni eccezionali in (x_1y_1) linearmente indipendenti $\pi_1(x_1y_1)$, $\pi_2(x_1y_1) \ldots \pi_m(x_1y_1)$, ed m funzioni eccezionali in (xy) pure linearmente indipendenti $\varrho_1(xy)\,,\varrho_2(xy)\ldots\varrho_m(xy)$: le prime saranno soluzioni dell'equazione:

$$\pi(x_1y_1) + \int\int_C h(xy\,;x_1y_1)\,\pi(xy)\,dx\,dy = 0\,,$$

le altre dell'equazione:

$$\varrho(xy) + \int\int_C h(xy\,;x_1y_1)\,\varrho(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = 0\,.$$

E quindi come $h(xy\,;x_1y_1)$ ammette nell'interno di C le derivate seconde rapporto x_1y_1, e in C e su γ le derivate prime, parimenti anche le $\pi_i(x_1y_1)$ ammetteranno tali derivate.

Ciò posto, osserviamo che si può alterare la funzione $g(xy\,;x_1y_1)$ per una funzione qualunque finita e continua colle sue derivate dei primi 3 ordini e nulla quando (xy) è su γ, senza che le proprietà che avevamo richieste per la funzione compensatrice vengano a mancare.

In particolare se con $v_1(xy)\,, v_2(xy)\,,\ldots v_m(xy)$ indichiamo m funzioni nulle per (xy) su γ, finite e continue colle loro derivate dei primi tre ordini, alla $g(xy\,;x_1y_1)$ possiamo sostituire la:

$$g(xy\,;x_1y_1) + \sum_1^m{}_i\, v_i(xy)\,\varrho^i(x_1y_1)\,.$$

E la funzione:

$$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\int\int_C \Big\{\log r(xy\,;x_1y_1) + g(xy\,;x_1y_1) + \\ + \sum_1^m{}_i\, v_i(xy)\,\varrho_i(x_1y_1)\Big\}\,.\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 \tag{13}$$

sarà ancora nulla su γ; e perchè essa soddisfaccia ad (1) occorre e basta che $\varphi(xy)$ sia soluzione dell'equazione:

$$(14)\quad \varphi(xy) + \frac{1}{2\pi}\int\int_C \left\{ h(xy\,;x_1y_1) + \sum_1^m {}_i\, \varrho_i(x_1y_1)\Delta_2 v_i(xy)\right\} \varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = f(xy).$$

Ora noi sappiamo (¹) che la nuova equazione integrale (14) avrà determinante diverso da zero se, posto:

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} K_{ij} &= \int\int_C \pi_i(xy)\,\Delta_2 v_j(xy)\,dx\,dy\,, \\ k_{ij} &= \int\int_C \varrho_i(xy)\,\varrho_j(xy)\,dx\,dy\,, \end{aligned} \right. \qquad (i\,,j = 1\,,2\,,\dots m)$$

i determinanti $|K_{ij}|, |k_{ij}|$ sono diversi da zero. Ora intanto è $|k_{ij}|$ certamente diverso da zero poichè le $\varrho_i(xy)$ sono funzioni reali linearmente indipendenti. Cosicchè per mostrare che la (14) ammette soluzioni basta mostrare che si possono sempre prendere le funzioni $v_1\,,v_2\,,\dots v_m$ finora sottoposte alla sola condizione di annullarsi su γ, in modo che il determinante $|K_{ij}|$ sia diverso da zero.

Ora è facile provare fondandosi sul noto teorema di unicità per il problema che stiamo studiando che così è veramente. Basterà mostrare perciò che, presa una qualunque combinazione lineare $\pi(xy)$ delle $\pi_1(xy)\,,\pi_2(xy)\,,\dots \pi_m(xy)$, si può sempre determinare una $v(xy)$ nulla su γ tale che:

$$K = \int\int_C \Delta_2 v(xy)\,.\,\pi(xy)\,dx\,dy \neq 0\ (^2)$$

(¹) Cfr. E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen*. 2. Abh., § 6. Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1907). Del resto in una nota del § 9 (pag. 19) di questo lavoro si trova una dimostrazione di un teorema più generale di quello dello Schmidt qui richiamato.

(²) Infatti se è $|K_{ij}| = 0$ qualunque sieno le $v_i(xy)$, chiamiamo μ la massima caratteristica di $|K_{ij}|$. Supponiamo come è sempre possibile che $v_1 v_2 \dots v_\mu$ siano state fissate per modo che la matrice delle K_{ij} con $j = 1\dots\mu$ sia diversa da zero: esisteranno delle costanti $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$ tali che si ha:

$$\alpha_1 K_{1i} + \alpha_2 K_{2i} + \dots + \alpha_m K_{mi} = 0 \qquad (i = 1\dots\mu)$$

E l'ipotesi che $|K_{ij}|$ sia necessariamente di caratteristica μ si può allora esprimere dicendo che, qualunque funzione $v(xy)$ nulla su γ si prenda come $v_{\mu+1}(xy)$, sempre si ha:

$$\alpha_1 K_{1\mu+1} + \alpha_2 K_{2\mu+1} + \dots + \alpha_m K_{m\mu+1} = 0$$

E cioè che posto $\pi(xy) = \alpha_1\pi_1(xy) + \alpha_2\pi_2(xy) + \dots + \alpha_m\pi_m(xy)$ si ha, qualunque sia la funzione $v_{\mu+1}(xy)$ nulla su γ,

$$K = \int\int_C \pi(xy)\,\Delta_2 v_{\mu+1}(xy)\,dx\,dy = \alpha_1 K_{1\mu+1} + \alpha_2 K_{2\mu+1} + \dots + \alpha_m K_{m\mu+1} = 0\,.$$

Ora per una nota formula si ha, ricordando che deve essere $v(s) = 0$:

$$(16)\quad K = \iint_C \Delta_2 v(xy) \,.\, \pi(xy)\, dx\, dy = \iint_C v(xy) \,.\, \Delta_2 \pi(xy)\, dx\, dy - \int_\gamma \frac{\partial v(s)}{\partial n_s} \pi(s)\, ds\,.$$

Notiamo subito che può qui sorgere il dubbio che l'integrale doppio che compare nel secondo termine non esista: poichè abbiamo visto più sopra la $\pi(xy)$ ha le derivate prime finite e continue anche su γ, ma le derivate seconde solo all'interno di C. Ma osserviamo che, preso un qualunque campo C_1 interno a C limitato da una curva γ_1, ad esso si può applicare certamente la formola detta sopra:

$$\iint_{C_1} \Delta_2 v(xy) \,.\, \pi(xy)\, dx\, dy = \iint_{C_1} v(xy) \,.\, \Delta_2 \pi(xy)\, dx\, dy +$$
$$+ \int_{\gamma_1} \left[v(s_1) \frac{\partial \pi(s_1)}{\partial n_{s_1}} - \frac{\partial v(s_1)}{\partial n_{s_1}} \pi(s_1) \right] ds_1;$$

e che, per la continuità di π, e delle sue derivate prime in C e su γ, quando C_1 tende a C, γ_1 a γ, l'integrale del primo membro tende a K, e l'integrale curvilineo del secondo membro tende all'integrale curvilineo di (16); dedurremo che anche $\iint_{C_1} v(xy) \,.\, \Delta_2 \pi(xy)\, dx\, dy$ tende ad un limite, che esiste quindi $\iint_C v(xy)\, \Delta_2 \pi(xy) xy dy$, e che vale la (16).

Ora perchè il secondo membro di (16) sia nullo qualunque sia la funzione $v(xy)$ la quale soddisfaccia alla sola condizione di essere nulla su γ, occorrerà che si abbia $\pi(s) = 0$ su γ, e $\Delta_2 \pi(xy) = 0$ in tutto C [1]. Ma per il teorema di unicità ciò non può essere se non è $\pi(xy) = 0$.

È quindi sempre possibile scegliere le $v(xy)$ in modo che sia $|K_{ij}| \neq 0$, e che quindi (14) risulti risolubile.

7. Giova a chiarire il metodo confrontarlo col metodo di NEUMANN-FREDHOLM.

Il problema proposto è evidentemente equivalente al problema di determinare

[1] Infatti ove in un punto $(x_0 y_0)$ di C fosse $\Delta_2 \pi(xy) \neq 0$ ad es. > 0 si potrebbe descrivere un cerchio [R] di raggio R e centro $(x_0 y_0)$ interno a C e tale che in esso fosse sempre $\Delta_2 \pi > 0$. Determiniamo allora, come è sempre possibile, una funzione $v(xy)$ nulla fuori del cerchio [R] positiva all'interno, finita e continua insieme colle sue derivate dei primi tre ordini. Tale è la funzione definita dal porre $v(xy) = [R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]^4$ entro [R], $v(xy) = 0$ fuori di [R]. Per questa funzione si avrà che $\frac{\partial v(s)}{\partial n_s}$ è nulla su γ, onde sarà:

$$K = \iint_{[R]} v(xy)\, \Delta_2 \pi(xy)\, dx\, dy > 0$$

contro l'ipotesi. Segue che in ogni punto di C deve essere $\Delta_2 \pi(xy) = 0$.

Analogamente, osservando che la $\frac{\partial v(s)}{\partial n_s}$ è ancora totalmente arbitraria, segue che affinchè sia $K = 0$, deve pure essere $\pi(s) = 0$.

l'ordinaria funzione di GREEN $G(xy\,;x_1y_1)$. Ove volessimo fare tale determinazione col metodo di NEUMANN-FREDHOLM, noi la porremmo sotto la forma:

$$G(xy\,;x_1y_1)=-\frac{1}{\pi}\int_\gamma\frac{\partial\log r(xy\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,\varrho(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma \tag{17}$$

e la funzione $\varrho(\sigma\,;x_1y_1)$ dovrebbe determinarsi mediante l'equazione:

$$\varrho(s\,;x_1y_1)-\frac{1}{\pi}\int_\gamma\frac{\partial\log r(s\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,\varrho(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma+\log r(s\,;x_1y_1)=0\,. \tag{18}$$

Se poniamo $\varrho(s\,;x_1y_1)=-\log r(s\,;x_1y_1)+\varrho_1(s\,;x_1y_1)$ la funzione $\varrho_1(s\,;x_1y_1)$ si dovrà determinare mediante l'equazione:

$$\varrho_1(s\,;x_1y_1)-\frac{1}{\pi}\int_\gamma\frac{\partial\log r(s\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,\varrho_1(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma= \tag{19}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_\gamma\frac{\partial\log r(s\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\log r_1(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,;$$

e la funzione di GREEN diverrà, ricordando (2),

$$G(xy\,;x_1y_1)=e(xy\,;x_1y_1)-\frac{1}{\pi}\int_\gamma\frac{\partial\log r(xy\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,\varrho_1(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,. \tag{20}$$

Da (19) segue che $\varrho_1(s\,;x_1y_1)$, se esiste, è regolare al contorno, poichè tale è il secondo membro della (19): onde la (20) ci dice che la funzione $e(xy\,;x_1y_1)$ che abbiamo usato nella costruzione della nostra funzione compensatrice non rappresenta altro che *la parte della funzione di* GREEN *che è singolare al contorno.*

Individuata così la parte singolare della funzione di GREEN, a completare la dimostrazione nel metodo di NEUMANN-FREDHOLM occorre dimostrare che l'equazione (18) ammette sempre soluzione; nel nostro metodo occorre dimostrare l'analogo per l'equazione (10) o la (14). E qui compare, se non erro, la maggiore semplicità del nostro metodo: chè, mentre nel metodo di N.-F. per dimostrare tale risolubilità occorre appoggiarsi ripetutamente sui varii teoremi di unicità per le soluzioni dell'equazione $\Delta_2 u=0$ relativi sia al campo esterno che al campo interno, sia per il caso che al contorno sono assegnati i valori della funzione, sia pel caso in cui siano dati i valori della derivata normale, nel nostro tutti i ragionamenti poggiano sopra il solo teorema di unicità corrispondente al teorema di esistenza che stiamo studiando.

8. Nel numero 5 abbiamo ammesso che le funzioni $x(s)$, $y(s)$ che determinano il contorno γ avessero le derivate dei primi 5 ordini. Questo numero è troppo elevato. Possiamo facilmente ridurci ad ammettere che esistano solo le derivate dei primi 4 ordini: e certamente ulteriori studî ci permetterebbero di ridurre anche maggiormente queste condizioni.

In tal caso le $\xi_2(s\,;\sigma)$, $\eta_2(s\,;\sigma)$ di (4) hanno le derivate dei primi due ordini finite e continue anche in $s=\sigma$, mentre esistono pure le derivate di ordine >2

le quali contengono non più di 2 derivazioni rapporto a σ, non più di 4 rapporto ad s, ma non sono più finite e continue per $s=\sigma$ (Vedi Appendice, § II). E quindi il medesimo avviene per la $\dfrac{\partial \log r(s\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}$, e quindi ancora la funzione $e_1(s\,;x_1y_1)$ non ammetterebbe che le derivate del primo e secondo ordine rapporto ad s, e x_1y_1 finite e continue.

Per ovviare a questo inconveniente noi particolarizzeremo la costruzione della funzione $e_1(xy\,;x_1y_1)$, staccando, per così dire, ulteriori termini dalla funzione di Green. Poniamo:

$$(21)\qquad e^{(1)}(xy\,;x_1y_1)=-\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(xy\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,e_1(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(xy\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,d\sigma\int_\gamma \frac{\partial \log r(\sigma\,;\sigma_1)}{\partial n_{\sigma_1}}\log r(\sigma_1\,;x_1y_1)\,d\sigma_1\,.$$

Avremo:

$$(22)\quad e^{(1)}(s\,;x_1y_1)=e_1(s\,;x_1y_1)-\frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(s\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,d\sigma\int_\gamma \frac{\partial \log r(\sigma\,;\sigma_1)}{\partial n_{\sigma_1}}\log r(\sigma_1\,;x_1y_1)\,d\sigma_1=$$
$$=e_1(s\,;x_1y_1)-e_1^{(1)}(s\,;x_1y_1).$$

Ponendo quindi:

$$(23)\qquad \bar{e}(xy\,;x_1y_1)=e(xy\,;x_1y_1)+e^{(1)}(xy\,;x_1y_1),$$

la $\bar{e}(xy\,;x_1y_1)$ soddisferà ancora alla:

$$\Delta_2\,\bar{e}(xy\,;x_1y_1)=0\,,$$

e sarà tale che:

$$(24)\qquad \bar{e}(s\,;x_1y_1)=-\log r(s\,;x_1y_1)-e_1^{(1)}(s\,;x_1y_1).$$

Ma se poniamo:

$$(25)\qquad t(s\,;\sigma)=\int_\gamma \frac{\partial \log r(s\,;\sigma_1)}{\partial n_{\sigma_1}}\,\frac{\partial \log r(\sigma_1\,;\sigma)}{\partial n_\sigma}\,d\sigma_1\,,$$

si ha da (22)

$$(26)\qquad e_1^{(1)}(s\,;x_1y_1)=-\frac{1}{\pi}\int_\gamma t(s\,;\sigma)\log r(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma.$$

D'altro canto la $t(s\,;\sigma)$ data da (25) avrà evidentemente le derivate dei primi quattro ordini, le quali non contengono più di due derivazioni rapporto ad s nè più di due rapporto a σ, finite e continue, poichè tali derivate ha l'integrando. Onde anche la funzione $e_1^{(1)}(s\,;x_1y_1)$ avrà le derivate che non contengono più di due derivazioni rapporto a (s) o rapporto ad (x_1y_1) finite e continue in C e su γ.

Onde noi potremo ora costruire una funzione $e_1^{(1)}(xy\,;\,x_1y_1)$ che prenda i valori di $e_1^{(1)}(s\,;\,x_1y_1)$ ed abbia le derivate che non contengono più di due derivazioni rapporto al punto (xy) o rapporto ad (x_1y_1) finite e continue in C e su γ.

E la funzione:

$$g(xy\,;\,x_1y_1) = \bar{e}(xy\,;\,x_1y_1) + e_1^{(1)}(xy\,;\,x_1y_1) \tag{27}$$

potrà assumersi come funzione compensatrice e si potrà su essa ragionare come si fece nei num. precedenti, poichè la

$$\Delta_2 g(xy\,;\,x_1y_1) = \Delta_2 e_1^{(1)}(xy\,;\,x_1y_1) = h^{(1)}(xy\,;\,x_1y_1) \tag{28}$$

ammette le derivate dei primi due ordini rapporto ad x_1y_1 finite e continue.

§ III.

Il problema derivato di Dirichlet.

9. Prima di procedere allo studio dell'equazione generale è opportuno mostrare qui come si possa collo stesso metodo risolvere il problema derivato di Dirichlet. Esso consiste, come è ben noto, nel cercare una funzione armonica in C, la cui derivata normale si riduca su γ ad una funzione assegnata $l(s)$. Ed è noto che occorre perciò che si abbia:

$$\int_\gamma l(s)\,ds = 0\,. \tag{1}$$

Mantenute le ipotesi fatte nel § II per la curva γ, noi vediamo che il problema si traduce nell'altro di costruire in C una funzione $u(xy)$ la quale abbia la derivata normale nulla su γ e soddisfaccia all'equazione:

$$\Delta_2 u = f(xy)\,, \tag{2}$$

dove $f(xy)$ è una funzione che soddisfa all'equazione:

$$\iint_C f(xy)\,dx\,dy = 0 \text{ [1]}, \tag{3}$$

e che nell'interno di C ammette derivate prime finite e continue.

È noto che una tale funzione, se esiste, è definita a meno di una costante.

[1] Infatti è $f(xy) = \Delta_2 u_1$, dove u_1 è una funzione che su γ soddisfa alla $\dfrac{\partial u_1(s)}{\partial n_s} = -l(s)$; onde per l'identità $\displaystyle\iint_C \Delta_2 u_1\,dx\,dy = -\int_\gamma \frac{\partial u_1(s)}{\partial n_s}\,ds$, da (1) segue (3).

Per costruire la funzione compensatrice porremo qui:

(4) $$e(xy\,;x_1y_1) = -\frac{1}{\pi}\int_\gamma \log r(xy\,;\sigma)\,\frac{\partial \log r(\sigma\,;x_1y_1)}{\partial n_\sigma}\,d\sigma\,.$$

È noto che una tale funzione soddisfa all'equazione:

(5) $$\Delta_2 e = 0$$

ed è tale che:

$$\frac{\partial e(s\,;x_1y_1)}{\partial n_s} = -\frac{\partial \log r(s\,;x_1y_1)}{\partial n_s} - \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{\partial \log r(s\,;\sigma)}{\partial n_s}\,\frac{\partial \log r(\sigma\,;x_1y_1)}{\partial n_\sigma}\,d\sigma =$$
$$= -\frac{\partial \log r(s\,;x_1y_1)}{\partial n_s} - e_1(s\,;x_1y_1)\,.$$

In modo affatto analogo a quanto si vide nel § precedente, si vede subito che, se $x(s)$ ed $y(s)$ ammettono le derivate dei primi 4 ordini, $e_1(s\,;x_1y_1)$ ammette le derivate di primo e secondo ordine che contengono non più di una derivata rapporto ad (x_1y_1) finite e continue anche se (x_1y_1) è su γ: ed ammette le derivate di ordine superiore rapporto ad x_1y_1 all' interno di C. Onde si può costruire una funzione $e_2(xy\,;x_1y_1)$ tale che: 1°) in C e su γ esistono le derivate le quali contengono al più due derivazioni rapporto ad x, y, una derivazione rapporto ad x_1, y_1; 2°) entro C si può ancora derivare una volta sia rapporto ad xy, sia rapporto ad x_1y_1; 3°) su γ si ha:

$$\frac{\partial e_2(s\,;x_1y_1)}{\partial n_s} = e_1(s\,;x_1y_1).$$

(Cfr. *Appendice*, § I).

Posto quindi:

(7) $$\Delta_2 e_2(xy\,;x_1y_1) = h(xy\,;x_1y_1)$$

la funzione h ammetterà in C e su γ le derivate prime rapporto ad (x_1y_1), ed all'interno di C le derivate seconde rapporto ad (x_1y_1) e le derivate prime rapporto ad (xy). Onde posto:

(8) $$g(xy\,;x_1y_1) = e(xy\,;x_1y_1) + e_2(xy\,;x_1y_1),$$

la g potrà assumersi quale funzione compensatrice: e la funzione:

(9) $$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_C \Big[\log r(xy\,;x_1y_1) + g(xy\,;x_1y_1)\Big]\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1$$

avrà su γ la derivata normale nulla; e nei punti in cui $\varphi(xy)$ ammette le derivate prime finite e continue si avrà per essa:

(10) $$\Delta_2 u(xy) = \varphi(xy) + \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_C h(xy\,;x_1y_1)\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1\,.$$

Onde affinchè (9) soddisfaccia a (3), occorrerà che si abbia:

$$\varphi(xy) + \frac{1}{2\pi} \iint_C h(xy\,;x_1y_1)\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = f(xy). \tag{11}$$

Questa equazione potrà essere risolubile oppure no: certo essa avrà determinante nullo, e precisamente fra le funzioni eccezionali in (x_1y_1) di essa deve esservi la $\pi(x_1y_1) = 1$. Invero noi sappiamo che condizione necessaria e sufficiente perchè (11) abbia soluzione è che si abbia:

$$\iint_C \pi(x_1y_1)\,f(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = 0. \tag{12}$$

qualunque sia la funzione eccezionale $\pi(x_1y_1)$ in (x_1y_1) di (11). Ora poichè il problema proposto, e quindi la (11), non può avere soluzione che quando sia soddisfatta la (3), la (3) deve essere una delle (12), e cioè 1 deve essere una funzione eccezionale in (x_1y_1) rispetto all'equazione (11). Si tratta di dimostrare che, opportunamente alterando la $g(xy\,;x_1y_1)$, si può giungere ad un'equazione integrale che abbia solo l'unità quale funzione eccezionale. Supponiamo perciò che $\pi_1(x_1y_1)$, $\pi_2(x_1y_1)$, ... $\pi_{m-1}(x_1y_1)$, $\pi_m(x_1y_1) = 1$ siano le m funzioni eccezionali in (x_1y_1) linearmente indipendenti, e che $\varrho_1(xy)$, $\varrho_2(xy)$,... $\varrho_{m-1}(xy)$, $\varrho_m(xy)$ siano le m funzioni eccezionali in (xy) linearmente indipendenti. Infine siano $v_1(xy)$, $v_2(xy)$, ..., $v_{m-1}(xy)$ $m-1$ funzioni aventi su γ la derivata normale nulla, ed in C e su γ le derivate dei primi tre ordini. La funzione:

$$u(xy) = \frac{1}{2\pi} \iint_C \left[\log r(xy\,;x_1y_1) + g(xy\,;x_1y_1) + \right.$$
$$\left. + \sum_1^{m-1} v_i(xy)\,\varrho_i(x_1y_1)\right] \varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 \tag{13}$$

è ancora come la (9) una funzione con derivata normale nulla sul contorno γ; e perchè essa soddisfaccia all'equazione (2), occorre che la funzione $\varphi(xy)$ abbia le derivate prime entro C e sia soluzione dell'equazione integrale:

$$\varphi(xy) + \frac{1}{2\pi} \iint_C \left[h(xy\,;x_1y_1) + \sum_1^{m-1} \Delta_2 v_i(xy)\,\varrho_i(x_1y_1)\right] \varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = f(xy) \tag{14}$$

Ora affinchè la nuova equazione (14) non ammetta che una sola funzione eccezionale in (x_1y_1), la quale nel nostro caso sarà data necessariamente da una costante, basterà provare che i determinanti formati colle quantità:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \iint_C \varrho_i(xy)\,\varrho_j(xy)\,dx\,dy \\ K_{ij} &= \iint_C \Delta_2 v_i(xy)\,\pi_j(xy)\,dx\,dy \end{aligned} \qquad (i\,,j = 1\,,2\,,\ldots, m-1) \tag{15}$$

sono diversi da zero (¹). Di nuovo come al n. 7 è chiaro che $|k_{ij}| \neq 0$: e per mostrare che lo stesso vale per $|\mathrm{K}_{ij}|$ purchè si scelgano convenientemente le $v_i(xy)$, basterà provare che non esiste alcuna combinazione lineare $\pi(xy)$ di $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-1}$ tale che, qualunque sia la funzione $v(xy)$, la cui derivata normale è nulla su γ, si abbia sempre:

$$\mathrm{K} = \int\int_{\mathrm{C}} \Delta_2 v(xy) \,.\, \pi(xy)\, dx\, dy = 0\,.$$

(¹) Il teorema che qui applichiamo è una semplice generalizzazione di quello dello Schmidt citato al n. 7 (pag. 12). Sia data una equazione integrale (che per semplicità scriviamo in una sola variabile):

$$\varphi(s) + \int k(s\,;t)\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{1}$$

con determinante nullo: siano $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_m(s)$ le sue funzioni eccezionali in s linearmente indipendenti, $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_m(t)$ le sue funzioni eccezionali in t linearmente indipendenti. Si consideri l'equazione integrale:

$$\varphi(s) + \int \left[k(s\,;t) + \sum_1^{\mu} p_i(s)\, q_i(t) \right] \varphi(t)\, dt = f(s) \qquad (\mu \leq m). \tag{2}$$

Se le matrici formate colle quantità:

$$k_{ij} = \int p_i(s)\, \psi_j(s)\, ds \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \mu\,; j = , 1, 2 \ldots m)$$

$$\mathrm{K}_{ij} = \int q_i(s)\, \varphi_j(s)\, ds \tag{4}$$

hanno caratteristica μ, l'equazione (2) ha $m - \mu$ ed $m - \mu$ sole funzioni eccezionali linearmente indipendenti. Infatti una funzione eccezionale di (2) sarà soluzione dell'equazione:

$$\varphi(s) + \int k(s\,;t)\varphi(t)\, dt = -\sum_1^{\mu} p_i(s) \int q_i(t)\, \varphi(t)\, dt\,. \tag{5}$$

Affinchè (5), che è un'equazione del tipo (1) abbia soluzione, occorre e basta che sia:

$$0 = \int \psi_j(s) \sum_1^{\mu} p_i(s)\, ds \,.\, \int q_i(t)\, \varphi(t)\, dt = \sum_1^{\mu}{}_i\, k_{ij} \int q_i(t) \varphi(t)\, dt \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Ma poichè la matrice $\| k_{ij} \|$ ha caratteristica μ sarà necessariamente:

$$\int q_i(t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \mu)\,; \tag{7}$$

e quindi per (5) $\varphi(s)$ sarà una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente a (1): e cioè sarà una combinazione lineare delle $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots \varphi_m(s)$: precisamente sarà una qualunque delle combinazioni lineari soddisfacenti a (7). E per l'ipotesi che la matrice $\| \mathrm{K}_{ij} \|$ abbia caratteristica μ, di tali combinazioni ne esistono μ e μ sole indipendenti.

Si può anzi evidentemente dire che se delle matrici $\| k_{ij} \|$, $\| \mathrm{K}_{ij} \|$ la prima ha caratteristica μ e l'altra ha caratteristica $\mu_1 (\leq \mu)$, esistono $m - \mu_1$ funzioni eccezionali di (2) linearmente indipendenti.

Infatti ragionando come nel § II, si ha:

$$(16)\qquad \iint_C \Delta_2 v(xy)\,\pi(xy)\,dx\,dy = \iint_C \Delta_2\pi(xy)\,.\,v(xy)\,dx\,dy + \int_\gamma v(s)\,\frac{\partial\pi(s)}{\partial n_s}\,ds\,.$$

Ed il secondo membro di (16) non può essere sempre zero fuori che nell'ipotesi che sia $\Delta_2\pi(xy) = 0$ in tutto C, $\frac{\partial\pi(s)}{\partial n_s} = 0$ su γ. Ed allora $\pi(xy)$ dovrebbe essere una costante b e cioè sarebbe $\pi(xy) = b\pi_m(xy)$ il che contraddice all'ipotesi che $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{m-1}, \pi_m = 1$ siano linearmente indipendenti (¹).

CAPITOLO II.

Le equazioni totalmente ellittiche in due variabili indipendenti

---

§ IV.

Ipotesi.

10. Sia:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}u \equiv \mathfrak{M}u + \mathfrak{N}u = f(xy) \\ \mathfrak{M}u \equiv \sum_0^{2n}{}_i\, a_{i,2n-i}(xy)\,\dfrac{\partial^{2n}u}{\partial x^i\,\partial y^{2n-i}} \\ \mathfrak{N}u \equiv \sum_{0\leq i+k\leq 2n-1} b_{ik}(xy)\,\dfrac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i\,\partial y^k} \qquad \left(\dfrac{\partial^0 u}{\partial x^0\,\partial y^0} \equiv u\right) \end{cases}$$

l'equazione che ci proponiamo di studiare. Supporrò, per fissare le idee, $n > 1$ (²).

Supponiamo che nel campo C, il contorno γ incluso, i coefficienti $a_{i,2n-i}(xy)$ siano funzioni finite e continue di xy insieme colle loro derivate dei primi $2n+1$ ordini:

(¹) In modo analogo a quanto si fece al n. 8 si potrebbe fare in modo di richiedere solo l'esistenza delle derivate terze di $x(s)$ e $y(s)$.

(²) Il caso $n=2$ porta qualche inessenziale cambiamento nelle notazioni. Noi nel seguito non richiameremo mai l'attenzione del lettore su tali piccoli mutamenti, sia perchè essi sono semplicissimi, sia ancora perchè le equazioni di 2° ordine totalmente ellittiche sono già state molto studiate per altre vie.

mentre per i coefficienti $b_{ik}(xy)$ e per la funzione $f(xy)$ richiediamo soltanto che esse siano finite e continue in C e su γ, e che all'interno di C ammettano le derivate del primo ordine finite e continue. Essendo per ipotesi la (1) totalmente ellittica, l'equazione

$$(2) \qquad \sum_0^{2n}{}_i\, a_{i,2n-i}(xy)\,\alpha^i = 0$$

ammette in C solo radici complesse: supporremo che in tutto C queste radici siano di multiplicità costante; e, per fissare le idee, tratteremo dapprima il caso delle radici semplici. Le indicheremo allora con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}$, e converremo di ordinarle per modo che le due radici α_{2i-1} ed α_{2i} siano complesse coniugate, e la prima sia quella in cui il coefficiente dell'immaginario è > 0: porremo cioè

$$(3) \quad \alpha_{2i-1}(xy) = p_i(xy) + iq_i(xy) \qquad \alpha_{2i}(xy) = p_i(xy) - iq_i(xy) \qquad q_i(xy) > 0.$$

Le α, e parimenti le p, le q hanno, come le $a_{i,2n-i}$, le derivate dei primi $2n+1$ ordini finite e continue: per le ipotesi fatte esisteranno due numeri μ e M tali che:

$$(4) \qquad q_i(xy) > \mu \qquad\qquad |\alpha_j(xy)| < \mathrm{M}.$$

Infine sarà $a_{2n,0} \neq 0$: potremo quindi supporre, e così faremo d'ora in poi, $a_{2n,0} = 1$.

11. Per fissare le idee supporrò C semplicemente connesso e tutto al finito: sono ovvie le modificazioni che a qualche passo dei ragionamenti che seguono occorrerebbe portare nel caso contrario.

Quanto al contorno γ di C supporremo che le funzioni $x(s)$, $y(s)$, che lo determinano esprimendo le coordinate del punto x, y in funzione dell'arco contato a partire da un punto determinato O, ammettano le derivate dei primi $2n+1$ ordini tutte inferiori ad un certo numero M_1. Chiameremo anche γ la lunghezza di γ: un punto di γ si indicherà quindi indifferentemente colla sua coordinata s oppure con una qualunque $s + c\gamma$ (c = intero positivo o negativo): però quando non sia esplicitamente detto il contrario, quale differenza $s - \sigma$ delle coordinate di due punti di γ dovrà sempre prendersi la minima in modulo. Manterremo per il resto le notazioni del § II.

Il problema che ci proponiamo consiste nel determinare una soluzione $u(xy)$ di (1) tale che sul contorno sia:

$$u(s) = l_0(s)\,, \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} = l_1(s)\,, \ldots, \frac{\partial^{n-1} u(s)}{\partial n_s^{\,n-1}} = l_{n-1}(s)\,,$$

dove le funzioni $l_i(s)$ sono assegnate a priori. Da quanto precede segue, tenendo conto dei risultati dell'*Appendice* (§ 1) che, se si suppone che $l_i(s)$ ammetta le derivate dei primi $2n - i$ ordini finite e continue è legittima la trasformazione del problema indicata nel § I: che cioè ci possiamo limitare a studiare il caso in cui si assegni che la $u(xy)$ abbia le derivate dei primi $n-1$ ordini nulle su γ.

12. Quantunque la maggior parte delle considerazioni che seguono valgano qualunque sia l'equazione (1), pure occorrerà sovente nel corso del lavoro distinguere il caso particolare che la (1) sia omogenea [1] ed a coefficienti costanti. Chiameremo questo caso: *il caso elementare*.

§ V.

La funzione $\psi(xy\,;x_1y_1)$.

13. Prenderemo quale funzione $\psi(xy\,;x_1y_1)$ la medesima funzione che, come già ho accennato nell'Introduzione, ho usato nella Memoria: *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche*, etc. Riproduco qui la definizione e le principali proprietà di questa funzione, rimandando a quel lavoro (nn. 6-13) per la loro precisa dimostrazione.

Si indichi con d il discriminante dell'equazione (2) del § IV:

$$(1)\qquad d(xy) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{2n-1} & \alpha_1^{2n-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{2n-1} & \alpha_2^{2n-2} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n}^{2n-1} & \alpha_{2n}^{2n-2} & \dots & \alpha_{2n} & 1 \end{vmatrix} \;[2]$$

esso sarà sempre $\neq 0$. Con $d_j(xy)$ si indichi il complemento algebrico di α_j^{2n-1} in d, diviso per d medesimo. Si ponga infine:

$$(2)\qquad \varsigma_j(xy\,;\xi\eta) = \alpha_j(xy)\,(x-\xi) + y - \eta \;[3].$$

Sarà per le (4) del § IV;

$$(3)\qquad \frac{\mu}{\mathrm{M}+1}\, r(xy\,;\xi\eta) \leq |\varsigma_j(xy\,;\xi\eta)| \leq (\mathrm{M}+1)\, r(xy\,;\xi\eta) \;[4]$$

Infine per un giro di (xy) [di $(\xi\eta)$] nel verso positivo [negativo] attorno al punto $(\xi\eta)$ [(xy)] la funzione $\log\varsigma_j(xy\,;\xi\eta)$ aumenta di $(-1)^{j+1}2\pi i$.

Assumeremo quale funzione $\psi(xy\,;\xi\eta)$ l'espressione:

$$(4)\qquad \psi(xy\,;\xi\eta) = \frac{i}{2(2n-2)!\pi} \sum_1^{2n} (-1)^j d_j(xy)\, \varsigma_j^{2n-1}(xy\,;\xi\eta)\, \log\varsigma_j(xy\,;\xi\eta) \;[5].$$

[1] E cioè contenente nel primo membro solo derivate di ordine $2n$.

[2] Formola (10) della Memoria citata.

[3] Form. (11) l. c. In quel luogo tale funzione è indicata con σ_j: ho cambiato qui notazione perchè la lettera σ è già usata per indicare l'arco di γ.

[4] Form. (12) l. c.

[5] Form. (13) l. c. Per comodità s'è qui aggiunto il divisore $2(2n-2)!\pi$.

È questa una funzione reale, monodroma, quando x ed y sono reali e che ammette le derivate dei primi $2n+1$ ordini rapporto ad xy e di ordine comunque elevato rapporto a $\xi\eta$; e queste derivate sono finite e continue in tutti i punti, fatta eccezione per i punti $(xy) \equiv (\xi\eta)$ in cui le derivate di ordino $2n-2, 2n-1$, $2n, 2n+1$ rispettivamento divengono infinite logaritmicamente, di 1°, 2°, 3° ordine. E precisamente si ha [1]:

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^{2n-2}\psi}{\partial x^i\,\partial y^k} &= \frac{i}{2\pi}\sum_1^{2n}{}_j(-1)^i \alpha_j^i d_j \log \varsigma_j + \sum_1^{2n}{}_j \log \varsigma_j p_{j,ik} + \mathrm{P}_{ik} \qquad (i+k=2n-2) \\
\frac{\partial^{2n-1}\psi}{\partial x^i\,\partial y^k} &= \frac{i}{2\pi}\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j \frac{\alpha_j^i d_j}{\varsigma_j} + \sum_1^{2n}{}_j \frac{p_{j,ik}}{\varsigma_j} + \sum \log \varsigma_j p'_{j,ik} + \mathrm{P}_{ik} \quad (i+k=2n-1) \\
\frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^i\,\partial y^k} &= \frac{i}{2\pi}\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j \frac{\alpha_j^i d_j}{\varsigma_j^2} + \sum_1^{2n}{}_j \frac{p_{j,ik}}{\varsigma_j} + \sum \log \varsigma_j p'_{j,ik} + \mathrm{P}_{ik} \qquad (i+k=2n)
\end{aligned}
\right.
$$

dove le $p_{j,ik}, p'_{j,ik}, \mathrm{P}_{ki}$ sono funzioni di $xy, \xi\eta$ le quali ammettono tutte le derivate dei primi $2n+1-(i+k)$ ordini almeno finite e continue (ed inoltre le $p_{j,i\,n-i-2}$, $p_{j,i\,n-i-1}$ hanno per $(xy) \equiv (\xi\eta)$ uno zero di 1° ordine almeno).

Però, se si forma la $\mathfrak{M}\psi$ si ha, grazie al fatto che le α_j sono radici della (2) del § IV,

$$
(6) \qquad \mathfrak{M}\psi = \sum_0^{2n}{}_i a_{i\,2n-i}(xy)\left[\sum{}_i\left(\frac{p_{j,i\,2n-i}}{\varsigma_j} + \log \varsigma_j p'_{j,i\,2n-i}\right) + \mathrm{P}_{i\,2n-i}\right] = \\
= k(xy\,;\xi\eta)\,(^2),
$$

dove la $k(xy\,;\xi\eta)$ ha una singolarità di primo ordine soltanto.

Nel caso elementare le (5) si riducono ai loro primi termini soltanto: si ha quindi allora:

$$
(7) \qquad \mathfrak{M}\psi(xy\,;\xi\eta) = 0.
$$

14. La funzione [3]:

$$
(8) \qquad \mathrm{W}(xy) = \iint_{\mathrm{C}} \psi(xy\,;\xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta,
$$

ammette le derivate dei primi $2n-1$ ordini, le quali si ottengono derivando sotto il segno [4]: se la funzione $\varphi(\xi\eta)$ ammette anche le derivate prime finite e continue

[1] Formula (14) l. c. Nella $(14)_{2n-2}$ di quella Memoria per errore di stampa è scritto $\sum_1^{2n}{}_j(-1)^n \log \varsigma_j p_{j,ik}$ invece di $\sum_1^{n}{}_j \log \varsigma_j p_{j,ik}$.

[2] Form. (15) l. c.

[3] Form. (16) l. c.

[4] Form. (17) l. c.

in C, la $W(xy)$ ammette pure le derivate di ordine $2n$ [1]. Si ha inoltre:

$$\mathfrak{M}W(xy) = \varphi(xy) + \int\int_C k(xy\,;\xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{9}$$ [2].

La funzione $\mathfrak{M}W(xy)$ ammette poi a sua volta le derivate di 1° ordine, come del resto le ammette in generale ogni funzione del tipo $\int\int_C k(xy\,;\xi\eta)\,\varphi_1(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta$ tosto che le ammette la funzione $\varphi_1(xy)$ [3].

Nel caso elementare, conforme al fatto che per (7) è $k(xy\,;x_1y_1) = 0$, si ha:

$$\mathfrak{M}W(xy) = \varphi(xy). \tag{10}$$

§ VI.

Studio di alcuni integrali.

Una generalizzazione dei teoremi sui potenziali di semplice e doppio strato.

15. Prima di procedere alla costruzione della funzione compensatrice, ci occorre studiare gli integrali del tipo:

$$\omega_j(xy) = \int_\gamma \frac{1}{\Xi_j(xy\,;\sigma)}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma = \tag{1}$$
$$= \int_\gamma \frac{1}{\alpha_j(xy)\,[x - \xi(\sigma)] + [y - \eta(\sigma)]}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma\,,$$

$\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$ indicando al solito un punto di γ. Se (xy) è interno a C un tale integrale è una funzione finita e continua di (xy) ed ammette le derivate dei primi $2n+1$ ordini finite e continue; ma quando (xy) tende ad un punto (s) di γ l'integrando diviene infinito di 1° ordine. Proponendoci ora di studiare il limite di $\omega_j(xy)$ quando (xy) tende ad (s), supporremo anzitutto che (xy) tenda ad (s) restando sulla normale a γ in (s). Dimostrato poi che tale limite esiste, che la convergenza è uniforme e che il limite è funzione continua di (s), risulterà senz'altro che la convergenza è superficiale.

Premettiamo alcune conseguenze delle ipotesi fatte sulla curva γ che dovremo poi richiamare sovente. Anzitutto osserviamo che il rapporto $\dfrac{|s-\sigma|}{r(s\,;\sigma)}$ è sempre finito: poichè non potrebbe diventare infinito che quando $r(s\,;\sigma) = 0$ e quindi anche

[1] Form. (18) e (19) l. c.

[2] Form. (20) l. c. Si ricordi che abbiamo nella $\psi(xy\,;x_1y_1)$ introdotto il fattore $\dfrac{1}{2(2n-2)!\pi}$, e che nel n. 8 si fece l'ipotesi $a_{2n,0} = 1$.

[3] Cfr. n. 12. Osservazione I l. c.

$s = \sigma$: ora è chiaro che per $s = \sigma$ questo rapporto tende all'unità. Chiameremo $\frac{1}{D}$ il massimo valore di esso; potremo supporre $D < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{D} > 2$: sarà

(2) $$|\sigma - s| \geqq r(s\,;\sigma) \geqq D|\sigma - s|.$$

Ricordiamo ancora che si ha in generale:

$$\xi(\sigma) = x(s) + x'(s)\,(\sigma - s) + \tfrac{1}{2}\,x_2(s\,;\sigma)\,(\sigma - s)^2,$$
$$\eta(\sigma) = y(s) + y'(s)\,(\sigma - s) + \tfrac{1}{2}\,y_2(s\,;\sigma)\,(\sigma - s)^2,$$

dove $x_2(s\,;\sigma)$, $y_2(s\,;\sigma)$ sono i valori delle derivate seconde in due convenienti punti intermedii tra s e σ. Sia (xy) un punto della normale a γ in (s); sarà:

$$x = x(s) - y'(s)\,r(xy\,;s),$$
$$y = y(s) + x'(s)\,r(xy\,;s);$$

e supponiamo che sia $r(xy\,;s) < \frac{1}{16\,M_1}$, M_1 essendo, come si disse al n. 11, il massimo valore assoluto delle derivate di $x(s)$, $y(s)$. Si avrà:

$$\begin{aligned} r^2(xy\,;\sigma) &= [x - \xi(\sigma)]^2 + [y - \eta(\sigma)]^2 = \\ &= r^2(xy\,;s) + (\sigma - s)^2 \{1 + r(xy\,;s)[x_2(s\,;\sigma)\,y'(s) - y_2(s\,;\sigma)\,x'(s)] + \\ &+ (\sigma - s)[x'(s)\,x_2(s\,;\sigma) + y'(s)\,y_2(s\,;\sigma)] + \tfrac{1}{4}(\sigma - s)^2\,[x_2^2(s\,;\sigma) + y_2^2(s\,;\sigma)]\}. \end{aligned}$$

Ma si supponga che σ sia tanto vicino ad s che $|s - \sigma| < \frac{1}{4M_1}$: avremo allora, ricordando che è $|x_2(s\,;\sigma)| < M_1$, $|y_2(s\,;\sigma)| < M_1$, e che, essendo $x'^2(s) + y'^2(s) = 1$, è pure $|x'(s)| + |y'(s)| < \sqrt{2}$,

(3) $$\begin{aligned} r^2(xy\,;\sigma) &> r^2(xy\,;s) + (\sigma - s)^2\left[1 - \frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{32}\right] > \\ &> r^2(xy\,;s) + \tfrac{1}{2}\,(s - \sigma)^2. \end{aligned}$$

E tale formula vale, ricordiamolo, per ogni punto della normale a γ in (s) che disti da s meno di $\frac{1}{16M_1}$, e per $|\sigma - s| < \frac{1}{4M_1}$.

16. Ciò posto cominciamo dal caso particolare in cui $\varphi(\sigma)$ sia l'unità. Chiameremo $\omega_j^{(1)}(xy)$ la funzione corrispondente. Noi abbiamo:

(4) $$\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\,(\log \varsigma_j(xy\,;\sigma))\,.\,\frac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}\,,$$

dove si è posto:

(5) $$\tau_j(xy\,;\sigma) = \alpha_j(xy)\,\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{d\eta}{d\sigma}\,.$$

Sarà quindi evidentemente $\tau_j(xy\,;\sigma)$ una funzione sempre finita e continua colle sue derivate che non contengono più di $2n+1$ derivazioni rapporto ad (xy), e di $2n$ rapporto a σ: inoltre poichè è $\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2$, si avrà in modo analogo alla (3) del § V:

$$\frac{\mu}{\mathrm{M}+1} < |\tau_j(xy\,;\sigma)| < \mathrm{M}+1\,; \tag{6}$$

onde anche $\frac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}$ sarà sempre finita ed ammetterà le stesse derivate che $\tau_j(xy\,;\sigma)$.

Dalla (4) segue:

$$\omega_j^{(1)}(xy) = \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,d\sigma = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial\sigma}(\log \varsigma_j(xy\,;\sigma))\,.\,\frac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}\,d\sigma\,. \tag{7}$$

Supponiamo (xy) interno a C ed integriamo per parti su tutta la curva γ da $\sigma = s$ a $\sigma = s+\gamma$; poichè per un giro positivo di $(\xi(\sigma)\,,\eta(\sigma))$ attorno ad (xy) la funzione $\log \varsigma_j(xy\,;\sigma)$ aumenta di $(-1)^j 2\pi i$, avremo:

$$\omega_j^{(1)}(xy) = (-1)^j\, 2\pi i\,\frac{1}{\tau_j(xy\,;s)} - \int_s^{\gamma+s} \log \varsigma_j(xy\,;\sigma)\,\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}\right) d\sigma\,. \tag{8}$$

Nel precedente integrale abbiamo scritto $\int_s^{\gamma+s}$ in luogo di $\int_\gamma$ per indicare che per il logaritmo devesi scegliere una determinazione arbitraria in (s), ma che si deve poi fissarla per continuità negli altri punti del contorno fino a tornare dopo un giro al punto di partenza $(s+\gamma)$ col primitivo valore aumentato di $(-1)^j 2\pi i$ [1].

Se ora il punto (xy) tende al punto (s) l'integrale che ancora compare in (8) ha un limite determinato e finito, poichè l'integrando ha una singolarità non più che

[1] Si noti che non muta il valore dell'integrale che compare in (7) se si muta la determinazione del logaritmo: poichè ciò equivale ad aumentare $\log \varsigma_j$ di una costante d, e cioè l'integrale di:

$$d\int_s^{\gamma+s} \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}\right) d\sigma = 0\,.$$

Allo stesso modo è facile verificare che si otterrebbe un valore non differente da quello trovato sopra, spostando il punto (s).

Se il punto (xy) fosse esterno a C la funzione $\log \varsigma_j$ non muterebbe determinazione quando σ fa un giro su γ onde si avrebbe:

$$\omega_j^{(1)}(xy) = -\int_s^{\gamma+s} \log \varsigma_j(xy\,;\sigma)\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}\right) d\sigma\,; \tag{8$_e$}$$

o, corrispondentemente, alla formula (9) del testo dovrebbe sostituirsi la formula:

$$\lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j^{(1)}(xy) = \int_s^{\gamma+s} \log \varsigma_j(s\,;\sigma)\,\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s\,;\sigma)}\right) d\sigma\,. \tag{9$_e$}$$

logaritmica. Onde sarà:

$$(9)\qquad \lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j^{(1)}(xy) = (-1)^j\, 2\pi i \frac{1}{\tau_j(s\,;s)} - \int_s^{\gamma+s} \log \varsigma_j(s\,;\sigma) \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s\,;\sigma)}\right) d\sigma\,.$$

E di più si avrà una limitazione del tipo:

$$(10)\qquad \left|\omega_j^{(1)}(xy) - (-1)^j\, 2\pi i \frac{1}{\tau_j(s\,;s)} + \int_s^{\gamma+s} \log \varsigma_j(s\,;\sigma) \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s\,;\sigma)}\right) d\sigma\right| < c_0\, r(xy\,;s)$$

c_0 essendo una costante dipendente solo da γ, μ, M e dal massimo modulo delle derivate prime di $\alpha(xy)$.

Al secondo membro di (9) si può dare un'altra forma. Se noi supponiamo che (xy) sia il punto (s) non esisterà l'integrale (7): ma la medesima trasformazione fatta dianzi ci può servire a mostrare che esiste tuttavia il valore principale di Cauchy dell'integrale medesimo. Infatti si ha, ricordando che il punto $(s+\gamma-\varepsilon)$ coincide con $(s-\varepsilon)$:

$$(11)\qquad \int_{s+\varepsilon}^{s+\gamma-\varepsilon} \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\, d\sigma = \int_{s+\varepsilon}^{s+\gamma-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(\log \varsigma_j(s\,;\sigma)\Big) \frac{1}{\tau_j(s\,;\sigma)}\, d\sigma =$$

$$= \left[\log \varsigma_j(s\,;s-\varepsilon) \frac{1}{\tau_j(s\,;s-\varepsilon)} - \log \varsigma_j(s\,;s+\varepsilon) \frac{1}{\tau_j(s\,;s+\varepsilon)}\right] -$$

$$- \int_{s+\varepsilon}^{s+\gamma-\varepsilon} \log \varsigma_j(s\,;\sigma) \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s\,;\sigma)}\right) d\sigma\,.$$

Ora quando ε tende a zero:

$$(12)\qquad \lim_{\varepsilon=0} \int_{s+\varepsilon}^{s+\gamma-\varepsilon} \log \varsigma_j(s\,;\sigma) \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s\,;\sigma)}\right) d\sigma = \int_s^{s+\gamma} \log \varsigma_j(s\,;\sigma) \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s\,;\sigma)}\right) d\sigma\,.$$

Inoltre si ha:

$$\log \varsigma_j(s\,;s-\varepsilon) \frac{1}{\tau_j(s\,;s-\varepsilon)} - \log \varsigma_j(s\,;s+\varepsilon) \frac{1}{\tau_j(s\,;s+\varepsilon)} =$$

$$= \log \frac{\varsigma_j(s\,;s-\varepsilon)}{\varsigma_j(s\,;s+\varepsilon)} \frac{1}{\tau_j(s\,;s-\varepsilon)} - \log \varsigma_j(s\,;s+\varepsilon)\left[\frac{1}{\tau_j(s\,;s+\varepsilon)} - \frac{1}{\tau_j(s\,;s-\varepsilon)}\right].$$

Ma d'altra parte è $\dfrac{\varsigma_j(s\,;s-\varepsilon)}{\varsigma_j(s\,;s+\varepsilon)} = (-1)^{j+1} \dfrac{-1+k\varepsilon}{1+k_1\varepsilon}$, k, k_1 essendo quantità finite, onde segue:

$$(13)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\left[\log \varsigma_j(s\,;s-\varepsilon) \frac{1}{\tau_j(s\,;s-\varepsilon)} - \log \varsigma_j(s\,;s+\varepsilon) \frac{1}{\tau_j(s\,;s+\varepsilon)}\right] =$$

$$= (-1)^j\, i\pi \frac{1}{\tau_j(s\,;s)}\,.$$

Da (11), (12), (13) segue:

$$(14)\qquad \int_{\epsilon}^{\gamma+s} \log \varsigma_j(s;\sigma) \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s;\sigma)}\right) d\sigma = -\int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\, d\sigma + (-1)^j i\pi \frac{1}{\tau_j(s;s)}$$

dove $\int_{\gamma}$ indica il valore principale di Cauchy dell'integrale.

Sostituendo (14) in (9) e (10) otteniamo:

$$(15)\qquad \lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j^{(1)}(xy) = (-1)^j \pi i \frac{1}{\tau_j(s;s)} + \int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\, d\sigma$$

$$(16)\qquad \left|\omega_j^{(1)}(xy) - (-1)^j \pi i \frac{1}{\tau_j(s;s)} - \int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\, d\sigma\right| < c_0 r(xy;s)\ (^1).$$

17. Torniamo al caso generale dell'integrale (1). E supponiamo che la funzione $\varphi(\sigma)$ sia sempre finita su γ:

$$(17)\qquad |\varphi(\sigma)| < \overline{\varphi}.$$

Ed inoltre che per un certo esponente $\beta > 0$ esista un numero $\overline{\varphi}_1$ tale che sempre si abbia:

$$(18)\qquad |\varphi(\sigma) - \varphi(s)| < \overline{\varphi}_1 |\sigma - s|^{\beta}.$$

Supporremo per comodità $\beta < 1$: è chiaro che se una disuguaglianza del tipo (18) vale per un $\beta \geq 1$, una disuguaglianza analoga vale anche per ogni valore di β minore di 1.

Sarà allora:

$$(19)\qquad \omega_j(xy) = \varphi(s)\, \omega_j^{(1)}(xy) + \int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)} [\varphi(\sigma) - \varphi(s)]\, d\sigma.$$

Dico che quando (xy) tende a (s) restando sulla normale a γ in (s) è:

$$(20)\qquad \lim_{(xy)\equiv(s)} \int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma_j(xy;\sigma)} [\varphi(\sigma) - \varphi(s)]\, d\sigma = \int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)} [\varphi(\sigma) - \varphi(s)]\, d\sigma.$$

Intanto si vede subito che il secondo membro di (20) ha senso: poichè per la (3) del § V, per (2) e (18) si ha:

$$(21)\qquad \left|\frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)} [\varphi(\sigma) - \varphi(s)]\right| < \overline{\varphi}_1 \frac{M+1}{\mu} \frac{|\sigma - s|^{\beta}}{r(s;\sigma)} < \overline{\varphi}_1 \frac{M+1}{\mu D} \frac{1}{|\sigma - s|^{1-\beta}},$$

e quindi per $s = \sigma$ diviene infinito di ordine $\leq 1 - \beta < 1$.

(1) Analogamente se (xy) è esterno a C si avrebbe:

$$(15)_e\qquad \lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j^{(1)}(xy) = (-1)^{j+1} \pi i \frac{1}{\tau_j(s;s)} + \int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\, d\sigma$$

$$(16)_e\qquad \left|\omega_j^{(1)}(xy) + (-1)^j \pi i \frac{1}{\tau_j(s;s)} - \int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma_j(s;\sigma)}\, d\sigma\right| < c_0' r(xy;s).$$

Per dimostrare (20) incominciamo con osservare che si ha in generale in virtù della (3) del § V la disuguaglianza:

$$\left| \frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)} - \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)} \right| =$$

$$(22) \qquad = \left| \frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)\,\varsigma_j(s\,;\sigma)} \left\{ [\alpha_j(xy) - \alpha_j(s)][\xi(\sigma) - x(s)] + \varsigma_j(xy\,;s) \right\} \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{M+1}{\mu}\right)^2 \frac{\bar{\alpha}\,|\xi(\sigma) - x(s)| + M + 1}{r(xy\,;\sigma)\,r(s\,;\sigma)}\, r(xy\,;s)$$

dove $\bar{\alpha}$ indica il massimo valore assoluto delle derivate prime delle α_j.

Ciò posto, dividiamo γ in due parti γ_1 e γ_2 a seconda che è

$$|\sigma - s| < \frac{1}{4M_1} \quad \text{o} \quad > \frac{1}{4M_1}:$$

per (2) γ_1 sarà interno al cerchio di centro s e raggio $\frac{1}{4M_1}$, γ_2 esterno al cerchio di centro (s) e raggio $\frac{D}{4M_1}$.

Supponiamo infine (xy) sulla normale a γ in (s) e tale che

$$r(xy\,;s) < \frac{D}{8M_1} < \frac{1}{16M_1}.$$

Quando (σ) è in γ_2 si avrà allora

$$r(xy\,;\sigma) > \frac{D}{8M_1}\,, \quad r(s\,;\sigma) > \frac{D}{4M_1}\,, \quad |\xi(\sigma) - x(s)| < |\sigma - s| < \gamma$$

onde da (22) si dedurrà:

$$(23) \qquad \left| \int_{\gamma_2} \left[\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)} - \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)} \right] [\varphi(\sigma) - \varphi(s)]\, d\sigma \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{(M+1)\,D}{4M_1\,\mu}\right)^2 (\bar{\alpha}\gamma + M + 1)\,\gamma\, r(xy\,;s)\,\bar{\varphi}.$$

Quando (σ) invece è su γ_1, poichè $r(xy\,;s) < \frac{1}{16M_1}$, $|s - \sigma| < \frac{1}{4M_1}$ varrà la (3), onde otterremo, ponendo $\tau = |s - \sigma|$, e per (2), (18) e (22):

$$\left| \int_{\gamma_1} \left[\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)} - \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)} \right] [\varphi(\sigma) - \varphi(s)]\, d\sigma \right| \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{M+1}{\mu}\right)^2 \bar{\varphi}_1 \left\{ (M+1)\frac{1}{D}\, r(xy\,;s) \int_0^{\frac{1}{4M_1}} \frac{\tau^{\beta-1}}{\sqrt{r^2(xy\,;s) + \frac{1}{2}\tau^2}}\, d\tau \, + \right.$$

$$\left. + \,\bar{\alpha}\, r(xy\,;s) \int_0^{\frac{1}{4M_1}} \frac{\tau^{\beta}}{\sqrt{r^2(xy\,;s) + \frac{1}{2}\tau^2}}\, d\tau \right\}.$$

Ora poichè $\beta < 1$ si ha:

$$\int_0^{\frac{1}{4M_1}} \frac{\tau^{\beta-1}}{\sqrt{r^2(xy\,;s)+\frac{1}{2}\tau^2}}\,d\tau = 2^{\frac{\beta}{2}} r^{\beta-1}(xy\,;s)\int_0^{\frac{1}{4\sqrt{2}M_1 r(xy\,;s)}} \frac{\tau^{\beta-1}}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau \leq$$

$$\leq 2^{\frac{\beta}{2}} r^{\beta-1}(xy\,;s)\int_0^{\infty} \frac{\tau^{\beta-1}}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau \leq c r^{\beta-1}(xy\,;s)$$

dove c indica una costante finita. Ed analogamente:

$$\int_0^{\frac{1}{4M_1}} \frac{\tau^{\beta}}{\sqrt{r^2(xy\,;s)+\frac{1}{2}\tau^2}}\,d\tau = 2^{\frac{\beta+1}{2}} r^{\beta}(xy\,;s)\int_0^{\frac{1}{4\sqrt{2}M_1 r(xy\,;s)}} \frac{\tau^{\beta}}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau \leq c_1\,,$$

poichè l'integrale col tendere di $r(xy\,;s)$ a zero diviene infinito come $\frac{1}{r^{\beta}(xy\,;s)}$.

Onde conchiuderemo:

$$\left|\int_{\gamma_1}\left[\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}-\frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\right][\varphi(\sigma)-\varphi(s)]\,d\sigma\right| \leq \tag{24}$$
$$\leq 2\left(\frac{M+1}{\mu}\right)^2\left[c\frac{1}{D}(M+1)+\bar{\alpha}c_1\left(\frac{D}{8M_1}\right)^{1-\beta}\right] r^{\beta}(xy\,;s)\,\bar{\varphi}_1\,.$$

Dalle (23) (24) segue evidentemente la (20). Onde per (10), (15), (19), (20), si avrà che, quando (xy) tende ad (s) restando sulla normale a γ:

$$\lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j(xy) = (-1)^j 2\pi i\frac{\varphi(s)}{\tau_j(s\,;s)} + \varphi(s)\int_s^{\gamma+s}\log\varsigma_j(s\,;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tau_j(s\,;\sigma)}\right)d\sigma + \tag{25}$$
$$+\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}[\varphi(\sigma)-\varphi(s)]\,d\sigma =$$
$$= (-1)^j\pi i\frac{\varphi(s)}{\tau_j(s\,;s)} + \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\varphi(\sigma)\,d\sigma \;\;[1]\,.$$

Chiamerò questo limite $\omega_j(s)$. Per (16), (23) e (24) sarà:

$$|\omega_j(xy)-\omega_j(s)| < B_1\bar{\varphi}\, r(xy\,;s) + B_2\bar{\varphi}_1 r^{\beta}(xy\,;s), \tag{26}$$

dove B_1 e B_2 indicano due costanti dipendenti solo dalla curva γ e da $M, \mu, \bar{\alpha}, \beta$,

[1] Analogamente se (xy) è esterno a C:

$$\lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j(xy) = (-1)^{j+1}\pi i\frac{\varphi(s)}{\tau_j(s\,;s)} + \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\varphi(\sigma)\,d\sigma\,. \tag{25$_e$}$$

e non affatto dalla funzione $\varphi(\sigma)$ e dal punto (s). Onde la convergenza del limite (25) è uniforme.

E poichè dalla prima forma di (25) risulta evidente che $\omega_j(s)$ è continua, la convergenza al limite di $\omega_j(xy)$ sarà, come già si disse al n. 15, superficiale.

18. Conviene aggiungere alcune osservazioni.

Osservazione I. — Dalla prima forma di $\omega_j(s)$ data da (25) e da (21) segue che $\omega_j(s)$ soddisfa ad una limitazione del tipo:

$$|\omega_j(s)| < \mathrm{B}_3\,\bar{\varphi} + \mathrm{B}_4\,\bar{\varphi}_1 \tag{27}$$

B_3 e B_4 essendo costanti indipendenti dalla $\varphi(\sigma)$.

E dalle (26), (27) segue infine che in tutto C si ha:

$$|\omega_j(xy)| < \mathrm{B}_5\,\bar{\varphi} + \mathrm{B}_6\,\bar{\varphi}_1, \tag{28}$$

B_5 e B_6 essendo costanti analoghe a B_1, B_2, B_3 e B_4.

Osservazione II. — Possiamo supporre che $\varphi(\sigma)$ dipenda anche da certi parametri $\mu_1\,\mu_2 \ldots$ per es.: dal punto (xy) medesimo. Se qualunque siano i valori di questi parametri la φ soddisfa alle (17) (18) — senza fare alcuna ipotesi sulla continuità di φ rapporto ai parametri medesimi — è chiaro che varrà ancora la (28). Poichè supponiamo ad es. che si abbia una funzione $\varphi(xy\,;\sigma)$: fissato un punto (x', y'), si indichi con $\varphi'(\sigma)$ la funzione $\varphi(x'\,y'\,;\sigma)$ e consideriamo la:

$$\omega'_j(xy) = \int_\gamma \frac{\varphi'(\sigma)}{\mathfrak{S}_j(xy\,;\sigma)}\,d\sigma,$$

sarà per (28)

$$|\omega'_j(xy)| < \mathrm{B}_5\,\bar{\varphi} + \mathrm{B}_6\,\bar{\varphi}_1.$$

Ma $\omega'_j(x'y') = \omega_j(x'\,y')$, quindi anche per ω_j vale la (28).

Invece maggiori condizioni debbonsi introdurre per poter conchiudere che la funzione limite è continua rapporto ai parametri μ; e similmente quando φ dipenda da (xy), per dimostrare che:

$$\lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j(xy) = \lim_{(xy)\equiv(s)} \int_\gamma \frac{\varphi(xy\,;\sigma)}{\mathfrak{S}_j(xy\,;\sigma)}\,d\sigma = \tag{25'}$$

$$= (-1)^j\,\pi i\,\frac{\varphi(s\,;s)}{\tau_j(s\,;s)} + \int_\gamma \frac{\varphi(s\,;\sigma)}{\mathfrak{S}_j(s\,;\sigma)}\,d\sigma = \omega_j(s)$$

occorrerà fare qualche ulteriore ipotesi sul modo in cui la $\varphi(xy\,;\sigma)$ dipende da (xy). Basterà per es. supporre che sia funzione continua di xy: invero fissato un numero

ε piccolo a piacere si potrà trovare un numero δ tale che quando (xy) ed $(x_1 y_1)$ distano di meno di δ si abbia:

$$|\varphi(xy\,;\sigma)-\varphi(x_1y_1\,;\sigma)|<\varepsilon$$

$$|[\varphi(xy\,;\sigma)-\varphi(x_1y_1\,;\sigma)]-[\varphi(xy\,;\sigma_1)-\varphi(x_1y_1\,;\sigma_1)]|<\varepsilon\,|\sigma-\sigma_1|^{\frac{\beta}{2}}\ \text{(1)}.$$

Ed allora dalla

$$\omega_j(xy)-\int_\gamma \frac{\varphi(s\,;\sigma)}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,d\sigma=\int_\gamma \frac{\varphi(xy\,;\sigma)-\varphi(s\,;\sigma)}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,d\sigma$$

segue grazie alle disuguaglianze precedenti per (28) che, se (xy) dista da (s) meno di δ, è:

$$\left|\omega_j(xy)-\int_\gamma \frac{\varphi(s\,;\sigma)}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,d\sigma\right|<[\mathrm{B}_5+\mathrm{B}_6']\,\varepsilon\ \text{(2)}$$

e quindi $\omega_j(xy)$ avrà per $(xy)\equiv(s)$ lo stesso limite di $\int_\gamma \frac{\varphi(s\,;\sigma)}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,d\sigma$.

Osservazione III. — Conviene sovente dare a (25) o (25)' forma leggermente diversa.

Osserviamo perciò che la differenza

$$l_j(s\,;\sigma)=\frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}-\frac{\pi}{\gamma}\frac{1}{\tau_j(s\,;s)}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma) \tag{29}$$

è una funzione finita e continua anche per $s=\sigma$: e come

$$\frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)},\ \frac{1}{\tau_j(s\,;s)},\ \operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)$$

ammette tutte le derivate che non contengono più di $2n-1$ derivazioni rapporto a s e non più di $2n+1$ rapporto a σ, e quelle di queste derivate che sono di ordine $\leq 2n-1$ sono finite e continue ancho per $s=\sigma$ (3), quelle di ordine $k>2n-1$

(1) La prima disuguaglianza è evidente data la continuità di φ rapporto ad x, y, σ. Per provare la seconda si osservi che dal fatto che se è soddisfatta la (18), qualunque sia xy, segue che $\dfrac{\varphi(xy\,;\sigma)-\varphi(xy\,;\sigma_1)}{|\sigma-\sigma_1|^{\frac{\beta}{2}}}$ è funzione finita e continua delle quattro variabili x, y, σ, σ_1.

(2) Indico con B_6' un numero analogo a B_6 corrispondente al valore $\frac{\beta}{2}$ di β.

(3) Infatti, si osservi che $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)-\frac{\gamma}{\pi(s-\sigma)}$ è nell'intorno di $s=\sigma$ funzione regolare analitica di s e σ: onde $l_j'(s\,;\sigma)=\frac{1}{\tau_j(s\,;s)}\cdot\left[\frac{\pi}{\gamma}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)-\frac{1}{s-\sigma}\right]$ è funzione regolare anali-

divengono per $s=\sigma$ infinite di ordine $\leq k-2n+1$. Sostituiamo in (25) il valore di $\dfrac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}$ dato da (29) avremo:

$$
(30)\qquad \begin{aligned} \omega_j(s) = \lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j(xy) &= (-1)^j \pi i \frac{\varphi(s)}{\tau_j(s\,;s)} + \\ &+ \frac{\pi}{\gamma}\frac{1}{\tau_j(s\,;s)}\int_\gamma \cot g \frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma + \int_\gamma l(s\,,\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma\,. \end{aligned}
$$

Questa formula presenta sulla (25) il vantaggio che l'integrale singolare risulta indipendente da j.

19. In modo perfettamente analogo si possono studiare gli integrali del tipo:

$$
(31)\qquad \overline{\omega}_j(xy) = \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(\sigma\,;xy)}\varphi(\sigma)\,d\sigma = \int_\gamma \frac{1}{\alpha_j(\sigma)\,[\xi(\sigma)-x]+\eta(\sigma)-y}\varphi(\sigma)\,d\sigma\,.
$$

Infatti si ha, analogamente a (4):

$$
(32)\qquad \frac{1}{\varsigma_j(\sigma\,;xy)} = \frac{\partial}{\partial\sigma}(\log \varsigma_j(\sigma\,;xy))\frac{1}{\overline{\tau}_j(\sigma)} - \frac{d\alpha_j(\sigma)}{d\sigma}\frac{\xi(\sigma)-x}{\varsigma_j(\sigma\,;xy)}\,,
$$

dove

$$
(33)\qquad \overline{\tau}_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma)\frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} + \frac{d\eta(\sigma)}{d\sigma}\,.
$$

E partendo da questa formula si potrebbe ragionare come nei precedenti numeri 16, 17, 18.

---

tica di σ che ammette le derivate dei primi $2n$ ordini rapporto ad s. Basta quindi studiare in un intorno di $s=\sigma$:

$$
l_j(s\,;\sigma)+l_j'(s\,;\sigma) = \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)} - \frac{1}{(s-\sigma)}\frac{1}{\tau_j(s\,;s)} = \frac{\alpha_j(s)\,[x'(s-\sigma)-x+\xi]+[y'(s-\sigma)-y+\eta]}{\varsigma_j(s\,;\sigma)\,(s-\sigma)\,\tau_j(s\,;s)} =
$$

$$
= \frac{\alpha_j(s)\,x_2(s\,;\sigma)+y_2(s\,;\sigma)}{[\alpha_j(s)\,x'+y']^2+(s-\sigma)\,[\alpha_j(s)\,x'+y']\,[\alpha_j(s)\,x_2(s\,;\sigma)+y_2(s\,;\sigma)]}\,,
$$

dove $x_2(s\,;\sigma)$, $y_2(s\,;\sigma)$ ammettono le derivate che non contengono più di $2n-1$ derivazioni rapporto ad s, e di $2n+1$ rapporto a σ, e quelle di esse che sono di ordine $<2n-1$ sono finite e continue mentre quelle di ordine $k>2n-1$ divengono infinite di ordine $\leq k-2n+1$ (Cfr. Appendice, § II). Onde segue l'enunciato quando si osservi che il denominatore di $l_j(s\,;\sigma)+l_j'(s\,;\sigma)$ è sempre diverso da zero, anche per $s=\sigma$ $\left(\text{perchè è } =[\alpha_j(s)\,x'+y']^2 > \dfrac{\mu^2}{(M+1)^2}\right)$.

Ma possiamo anche limitarci ad osservare che

$$\frac{1}{\varsigma_j(\sigma\,;xy)}+\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}=\frac{[\alpha_j(xy)-\alpha_j(\sigma)][x-\xi(\sigma)]}{\varsigma_j(\sigma\,;xy)\,\varsigma_j(xy\,;\sigma)}=\delta_j(xy\,;\sigma)$$

è una funzione finita e continua di (xy) e di σ: sempre inferiore in modulo a $\bar{\alpha}\left(\frac{M+1}{\mu}\right)^2$. Onde segue:

$$\lim_{(xy)\equiv(s)}[\bar{\omega}_j(xy)+\omega_j(xy)]=\int_\gamma \delta_j(s\,;\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma\,,$$

ossia per (30)

$$\begin{aligned}\lim_{(xy)\equiv(s)}\bar{\omega}_j(xy)&=(-1)^{j+1}i\pi\frac{\varphi(\sigma)}{\tau_j(s\,;s)}-\frac{\pi}{\gamma}\frac{1}{\tau_j(s\,;s)}\int_\gamma \operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma+\\ &\quad+\int_\gamma \bar{l}_j(s\,;\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma,\end{aligned}\tag{34}$$

dove:

$$\bar{l}_j(s\,;\sigma)=-\,l_j(s\,;\sigma)+\delta_j(s\,;\sigma)$$

è una funzione finita e continua di s e σ che gode delle stesse proprietà di $l_j(s\,;\sigma)$.

E parimenti si avrebbero delle limitazioni analoghe a (26), (27), (28):

$$\left\{\begin{aligned}&|\bar{\omega}_j(s)|<\bar{B}_3\,\bar{\varphi}+\bar{B}_4\,\bar{\varphi}_1\\ &|\bar{\omega}_j(xy)-\bar{\omega}_j(s)|<\bar{B}_1\,\bar{\varphi}\,r(xy\,;s)+\bar{B}_2\,\bar{\varphi}_1\,r^{\beta}(xy\,;s)\\ &|\bar{\omega}_j(xy)|<\bar{B}_5\,\bar{\varphi}+\bar{B}_6\,\bar{\varphi}_1\,.\end{aligned}\right.\tag{35}$$

E valgono ancora considerazioni analoghe all'osservazione II del n. 18.

20. I valori sopra trovati per i limiti di $\omega_j(xy)$ ed $\bar{\omega}_j(xy)$ dipendono evidentemente solo dal comportamento di $\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;x_1y_1)}$ per $(xy)\equiv(x_1y_1)$; quindi è chiaro che i punti di γ lontani dal punto (s) cui tende (xy) non hanno alcuna influenza nel risultato ottenuto: in particolare agli stessi limiti dati dalle (25), (28), (34) si sarebbe condotti ove si estendesse l'integrale invece che ad una curva chiusa ad una curva aperta, ed (s) fosse un punto di essa curva differente da un estremo. Qualche modificazione invece si deve portare alle limitazioni (26), (27), (28), (35): ed invero è ben naturale che a mano a mano che il punto (s) si avvicina ad un estremo della curva di integrazione la convergenza al limite risulterà sempre meno rapida, e parimenti anche gli integrali singolari che compaiono in (25), (30), (34) verranno ad influire maggiormente nel valore limite ottenuto.

In questo n. 20 mi propongo di trovare quali limitazioni si debbano sostituire a quelle ora ricordate: il risultato ci verrà molto utile negli studî del n. seguente.

Tratterò un caso assai generale. Sia γ la solita curva chiusa: indichi Γ un insieme finito o no di segmenti di $\gamma, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(i)} \dots$; siano $s^{(i,1)}\, s^{(i,2)}$ gli estremi di $\gamma^{(i)}$; $\varphi(\sigma)$ una funzione definita in Γ e che vi soddisfi in ogni segmento $\gamma^{(i)}$ alle (17) e (18) ed inoltre sia tale che presi due estremi qualunque, ad es.: $s^{(h,1)}\, s^{(i,2)}$ di Γ si abbia:

$$(36) \qquad |\varphi(s^{(h,1)}) - \varphi(s^{(i,2)})| < \overline{\varphi}_1\, r^{\beta}(s^{(h,1)}\,;\, s^{(i,2)}) < \overline{\varphi}_1\, |s^{(h,1)} - s^{(i,2)}|^{\beta}.$$

E consideriamo l'integrale:

$$(37) \qquad \omega_j^{(\Gamma)}(xy) = \int_\Gamma \frac{1}{\xi_j(xy\,;\,\sigma)}\, \varphi(\sigma)\, d\sigma .$$

Sia (s) un punto interno ad un segmento di Γ, ad es. di $\gamma^{(1)}$ e chiamiamo ϱ il minimo dei due numeri $|s^{(1,1)} - s|$, $|s^{(1,2)} - s|$. Avremo allora che, posto:

$$\omega_j^{(\Gamma)}(s) = \lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j^{(\Gamma)}(xy) = (-1)^j \pi i\, \frac{\varphi(s)}{\tau_j(s\,;\,s)} + \int_\Gamma \frac{1}{\xi_j(s\,;\,\sigma)}\, \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

la funzione $\omega_j^{(\Gamma)}$ soddisfa alla limitazione:

$$(38) \qquad |\omega_j^{(\Gamma)}(s)| < B_3\, \overline{\varphi} + B_4\, \overline{\varphi}_1 + B_7\, \overline{\varphi} \log \varrho\,;$$

e che inoltre si ha, quando (xy) rappresenta un punto della normale a γ in (s) che dista da (s) meno di $\frac{D}{8M_1}$.

$$(39) \qquad |\omega_j^{(\Gamma)}(xy) - \omega_j^{(\Gamma)}(s)| < B_1\, \varphi\, r(xy\,;s) + B_2\, \overline{\varphi}_1\, r^{\beta}(xy\,;s) + B_8\, \overline{\varphi}\, \frac{r^{1-\beta}(xy\,;\,s)}{\varrho^{\beta}}$$

dove B_7 e B_8 dipendono solo da γ e da $\overline{\alpha}$ (e non da Γ e φ). E quindi infine che per un punto xy sulla normale a γ in (s) si ha:

$$(40) \qquad |\omega_j^{(\Gamma)}(xy)| < B_5\, \overline{\varphi} + B_6\, \overline{\varphi}_1 + B_9\, \overline{\varphi}\, \frac{1}{\varrho^{\beta}},$$

dove ancora B_9 gode delle solite proprietà delle costanti B.

Infatti in questa ipotesi si definisca in tutti i punti di γ una funzione $\psi(\sigma)$ col convenire che sia uguale a $\varphi(\sigma)$ in Γ, e che in un qualunque punto di $\Gamma_1 = \gamma - \Gamma$ sia ottenuta interpolando linearmente tra i due estremi di segmenti di Γ più prossimi ad esso. Per (36) sarà evidentemente:

$$(41) \qquad |\psi(\sigma)| < \overline{\varphi} \quad , \quad |\psi(\sigma) - \psi(s)| < \overline{\varphi}_1\, |s - \sigma|^{\beta}.$$

Ma allora si ha:

$$\omega_j^{(\Gamma)}(xy) = \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma - \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma,$$

$$(42)\qquad \omega_j^{(\Gamma)}(s) = \lim_{(xy)\equiv(s)} \omega_j^{(\Gamma)}(xy) =$$

$$= (-1)^j \pi i\,\frac{\varphi(s)}{\tau_j(s\,;s)} + \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma - \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Ora per (27), (26) e (41) sarà:

$$\left|(-1)^j \pi i\,\frac{\varphi(s)}{\tau_j(s\,;s)} + \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma\right| < B_3\,\bar\varphi + B_4\,\bar\varphi_1\,,$$

$$(43)\qquad \left|\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma - (-1)^j \pi i\,\frac{\varphi(s)}{\tau_j(s\,;s)} + \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma\right| <$$

$$< B_1\,\bar\varphi\, r(xy\,;s) + B_2\,\bar\varphi_1\, r^\beta(xy\,;s)\,;$$

d'altra parte sarà:

$$\left|\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma\right| \le \bar\varphi \int_{\gamma-\gamma^{(1)}} \left|\frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\right| d\sigma \le$$

$$(44)\qquad \le \bar\varphi\,\frac{M+1}{\mu} \int_{\gamma-\gamma^{(1)}} \frac{1}{r(s\,;\sigma)}\,d\sigma \le$$

$$\le 2\bar\varphi\,\frac{(M+1)}{\mu D} \int_\rho^{\frac{\gamma}{2}} \frac{1}{|s-\sigma|}\,d\sigma \le$$

$$\le B_7\,\bar\varphi \log \rho\,.$$

Dalle (44) e dalle prime delle (42) (43) segue (38).
Similmente avremo:

$$(45)\qquad \left|\int_{\Gamma_1}\left[\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)} - \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\right]\psi(\sigma)\,d\sigma\right| \le \bar\varphi \int_{\gamma-\gamma^{(1)}} \left|\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)} - \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\right| d\sigma.$$

Dividiamo, come si fece al n. 17, $\gamma - \gamma^{(1)}$ in due parti γ_1', γ_2' secondo che

$$|\sigma - s| < \frac{1}{4M_1} \quad \text{o} \quad > \frac{1}{4M_1}:$$

γ_1' può eventualmente mancare. Come si ha (23) così pure sarà:

$$(46)\qquad \int_{\gamma_1'} \left|\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)} - \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)}\right| d\sigma < c_2\, r(xy\,;s) \quad c_2 = \left(\frac{(M+1)\,D}{4M_1\mu}\right)^2 \gamma(\bar\alpha\gamma + M + 1).$$

Per quanto riguarda γ'_1 si avrà per (22) e (3)

$$\int_{\gamma_1'}\left|\frac{1}{\mathfrak{S}_j(xy\,;\sigma)}-\frac{1}{\mathfrak{S}_j(s\,;\sigma)}\right|d\sigma\leq$$

$$\leq 2\left(\frac{\mathrm{M}+1}{\mu}\right)^2 r(xy\,;s)\left\{(\mathrm{M}+1)\frac{1}{\mathrm{D}}\int_\rho^{\frac{1}{4\mathrm{M}_1}}\frac{1}{\tau\sqrt{\frac{1}{2}\tau^2+r^2(xy\,;s)}}d\tau+\right.$$

$$\left.+\,\bar{a}\int_\rho^{\frac{1}{4\mathrm{M}_1}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\tau^2+r^2(xy\,;s)}}d\tau\right\}.$$

Ma si ha:

$$\int_\rho^{\frac{1}{4\mathrm{M}_1}}\frac{1}{\tau\sqrt{\frac{1}{2}\tau^2+r^2(xy\,;s)}}d\tau=\frac{1}{r(xy\,;s)}\left\{\log\frac{r(xy\,;s)+\sqrt{r^2(xy\,;s)+\frac{1}{2}\varrho^2}}{\varrho}-\right.$$

$$\left.-\log\frac{r(xy\,;s)+\sqrt{r^2(xy\,;s)+\dfrac{1}{32\,\mathrm{M}_1^2}}}{\dfrac{1}{4\mathrm{M}_1}}\right\}\leq c_3\frac{r(xy\,;s)^{\beta-1}}{\varrho^\beta}\ (^1),$$

$$\int_\rho^{\frac{1}{4\mathrm{M}_1}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\tau^2+r^2(xy\,;s)}}d\tau\leq c_4\log\varrho\leq c_5\frac{1}{\varrho^\beta}.$$

(¹) Si osservi infatti che, se $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, sarà

$$\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\alpha_2}>1,$$

e quindi

$$\log\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\alpha_2}<c'\left[\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\alpha_2}-1\right]^\beta$$

dove β è un qualunque determinato numero positivo e c' è un numero conveniente (dipendente da β). Ma si ha:

$$\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\alpha_2}-1=\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2+1}-\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=\frac{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2+1-\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2+1}+\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}<2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

onde segue infine

$$\log.\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\alpha_2^2}<2^\beta c'\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^\beta.$$

Onde segue:

$$\int_{\gamma_1'} \left| \frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)} - \frac{1}{\varsigma_j(s\,;\sigma)} \right| d\sigma < c_6 \, \frac{r^\beta(xy\,;\sigma)}{\varrho^\beta} \,. \tag{47}$$

Da (45), (46), (47) segue (40).

Analoghe considerazioni si avrebbero per gli integrali del tipo

$$\bar{\omega}_j^{(\Gamma)}(xy) = \int_\Gamma \frac{\varphi(\sigma)}{\varsigma_j(\sigma\,;x\,y)}\, d\sigma \,.$$

21. Questi risultati possiamo applicare subito a studiare gli integrali del tipo:

$$\omega_{jk}(xy\,;x_1y_1) = \int_\gamma \frac{\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)\,\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)}\, d\sigma \tag{48}$$

dove φ è una funzione finita e continua la quale soddisfa qualunque siano i valori di xy, $x_1 y_1$ alle condizioni (17) (18).

Questa funzione è, considerata quale funzione di xy, del tipo di $\omega_j(xy)$, considerata quale funzione di $(x_1 y_1)$, del tipo di $\bar{\omega}_k(x_1y_1)$, almeno finchè rispettivamente $(x_1 y_1)$ od (xy) sono interni a C. Ma quando questi due punti tendono entrambi a portarsi su γ, l'integrando acquista tale singolarità che non appartiene più ai tipi studiati sopra. E realmente la funzione può benissimo divenire infinita; ne determineremo la natura mostrando che essa diviene infinita nei punti di γ, ma di ordine non superiore a $1+\beta$: dove β indica un numero positivo determinato, anche arbitrariamente piccolo; con maggior precisione mostreremo che:

$$r^{1+\beta}(xy\,;x_1y_1)\,\omega_{jk}(xy\,;x_1y_1)$$

è limitata anche quando (xy), $(x_1 y_1)$ vanno su γ.

Osserviamo infatti che ci basterà dimostrare la cosa nell'ipotesi che (xy) ed $(x_1 y_1)$ siano entrambi convenientemente vicini a γ; ad es. quando (xy) ed $(x_1 y_1)$ distino da γ meno di $\dfrac{D}{8M_1}$, per modo che per ognuno di essi passi una sola normale a γ che supporremo incontrare γ rispettivamente in (s) ed (s_1), e che si possa applicare la formula (40). I punti (s) ed (s_1) saranno rispettivamente i punti di γ più prossimi a (xy) ed $(x_1 y_1)$. Distinguiamo due casi secondo che uno almeno dei due punti (xy) ed $(x_1 y_1)$ dista da γ più di $\frac{1}{4}\,r(xy\,;x_1 y_1)$, oppure no.

Applichiamo questa formula facendovi $\alpha_1 = r(xy\,;s)$ e una volta $\alpha_2 = \dfrac{\varrho}{\sqrt{2}}$, l'altra $\alpha_2 = \dfrac{1}{4\sqrt{2}\,M_1}$ avremo che la quantità fra parentesi della formula del testo è inferiore a:

$$2^{\frac{\beta}{2}}\, c'\, r^\beta(xy\,;s) \left\{ \frac{1}{\varrho^\beta} + \frac{1}{(4M_1)^\beta} \right\} < c'' \, \frac{r^\beta(xy\,;s)}{\varrho^\beta}\,;$$

onde segue la disuguaglianza del testo.

Si abbia il primo caso; e sia, per fissare le idee, $(x_1 y_1)$ quello di questi punti per cui è $r(x_1 y_1 ; \sigma) > \frac{1}{4} r(xy ; x_1 y_1)$. Avremo allora per (3) del § V,

$$\left|\frac{1}{\varsigma_k(\sigma ; x_1 y_1)}\right| < 4 \frac{M+1}{\mu} \frac{1}{r(xy ; x_1 y_1)} .$$

E in modo analogo a (22), ed osservando che $r(\sigma ; \sigma_1) \leq r(\sigma ; x_1 y_1) + r(\sigma_1 ; x_1 y_1)$:

$$\left|\frac{1}{\varsigma_k(\sigma ; x_1 y_1)} - \frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1 ; x_1 y_1)}\right| = \frac{(\alpha_k(\sigma) - \alpha_k(\sigma_1))(\xi(\sigma) - x_1) + \varsigma_k(\sigma_1 ; \sigma)}{\varsigma_k(\sigma ; x_1 y_1)\, \varsigma_k(\sigma_1 ; x_1 y_1)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{M+1}{\mu}\right)^2 [\bar{\alpha}\gamma + M + 1] \frac{r(\sigma ; \sigma_1)}{r(\sigma ; x_1 y_1)\, r(\sigma_1 ; x_1 y_1)} \leq$$

$$\leq c_7 \frac{(r(\sigma ; x_1 y_1) + r(\sigma_1 ; x_1 y_1))^{1-\beta}}{r(\sigma ; x_1 y_1)\, r(\sigma_1 ; x_1 y_1)} r^{\beta}(\sigma ; \sigma_1) \leq \tag{49}$$

$$\leq c_7 \left[\frac{1}{r^{\beta}(\sigma ; x_1 y_1) \,.\, r(\sigma_1 ; x_1 y_1)} + \frac{1}{r(\sigma ; x_1 y_1)\, r^{\beta}(\sigma_1 ; x_1 y_1)}\right] r^{\beta}(\sigma ; \sigma_1) \leq$$

$$\leq c_8 \frac{1}{r^{1+\beta}(xy ; x_1 y_1)} |\sigma - \sigma_1|^{\beta} .$$

Cosicchè si avrà:

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{\varphi(xy ; \sigma_1 ; x_1 y_1)}{\varsigma_k(\sigma ; x_1 y_1)}\right| < c_9 \bar{\varphi} \frac{1}{r(xy ; x_1 y_1)} , \\ &\left|\frac{\varphi(xy ; \sigma ; x_1 y_1)}{\varsigma_k(\sigma ; x_1 y_1)} - \frac{\varphi(xy ; \sigma_1 ; x_1 y_1)}{\varsigma_k(\sigma_1 ; x_1 y_1)}\right| < \\ &\qquad < \left[c_{10} \bar{\varphi}_1 \frac{1}{r(xy ; x_1 y_1)} + c_{11} \bar{\varphi} \frac{1}{r^{1+\beta}(xy ; x_1 y_1)}\right] |\sigma - \sigma_1|^{\beta} . \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Onde, applicando ad ω_{jk} la formula (28), si conchiuderà:

$$|\omega_{jk}(xy ; x_1 y_1)| < \frac{B_{10} \bar{\varphi} + B_{11} \bar{\varphi}_1}{r^{1+\beta}(xy ; x_1 y_1)} ,$$

la quale intanto prova che in quest' ipotesi, comunque prossimi a γ siano (xy) ed $(x_1 y_1)$, è sempre:

$$r^{1+\beta}(xy ; x_1 y_1)\, \omega_{jk}(xy ; x_1 y_1) < B_{10} \bar{\varphi} + B_{11} \bar{\varphi}_1 .$$

Passiamo al secondo caso: Dividiamo allora γ in due parti $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}$ ponendo in $\boldsymbol{\Gamma}$ i punti in cui $r(xy ; \sigma) < r(x_1 y_1 ; \sigma)$, in $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}$ quelli in cui $r(xy ; \sigma) > r(x_1 y_1 ; \sigma)$;

i punti in cui $r(xy\,;\sigma)=r(x_1\,y_1\,;\sigma)$ si possono considerare come appartenenti tanto a Γ che a Γ_1.

Siccome si ha:

$$r(xy\,;\sigma)+r(x_1y_1\,;\sigma)\leq r(xy\,;x_1y_1)\,,$$

in Γ sarà $r(x_1\,y_1\,;\sigma)\geq\frac{1}{2}\,r(xy\,;x_1\,y_1)$, in $\overline{\Gamma}$ $r(xy\,;\sigma)\geq\frac{1}{2}\,r(xy\,;x_1\,y_1)$. Potremo scrivere:

$$(51)\qquad \omega_{jk}(xy\,;x_1y_1)=\int_\Gamma\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,\frac{\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)}{\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)}\,d\sigma+$$
$$+\int_{\overline{\Gamma}}\frac{\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,\frac{1}{\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)}\,d\sigma\,.$$

Consideriamo ad es. il primo di questi integrali: esso è del tipo di quelli studiati al n. 20, quando vi si ponga al posto di φ la funzione $\dfrac{\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1\,y_1)}{\varsigma_k(\sigma\,;x_1\,y_1)}$. Infatti, ricordando che nei punti di Γ si ha sempre:

$$r(x_1\,y_1\,;\sigma)\geq\tfrac{1}{2}\,r(xy\,;x_1\,y_1)>\tfrac{1}{4}\,r(xy\,;x_1\,y_1)\,,$$

si vede tosto che questa funzione soddisfa in Γ (gli estremi compresi) alle disuguaglianze (50), le quali comprendono le (17), (18), (36) cui deve soddisfare la φ del n. 20 affinchè le conclusioni di quel numero siano applicabili. Di più osserviamo che, essendo $r(xy\,;s)<\frac{1}{4}\,r(xy\,;x_1\,y_1)$, segue che (s) appartiene a Γ e che i primi estremi di segmenti di Γ che si incontrano a partire da (s), essendo punti per cui $r(xy\,;\sigma)=r(x_1\,y_1\,;\sigma)\geq\frac{1}{2}\,r(xy\,;x_1\,y_1)$ distano da (s) più di $\frac{1}{4}\,r(xy\,;x_1\,y_1)$. Cosicchè al primo di questi integrali si potrà applicare la formula (40) ponendovi $\varrho\geq\frac{1}{4}\,r(xy\,;x_1y_1)$ e per $\overline{\varphi}$ e $\overline{\varphi}_1$ i valori dati dalle (50). Onde si deduce che si avrà ancora:

$$(52)\qquad \left|\int_\Gamma\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,\frac{\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)}{\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)}\,d\sigma\right|<\frac{B_{12}\,\overline{\varphi}+B_{13}\,\overline{\varphi}_1}{r^{1+\beta}(xy\,;x_1y_1)}\,.$$

Analogamente si ragiona per il secondo degli integrali che compaiono in (51). Onde infine otterremo che realmente la funzione (48) soddisfa a una limitazione del tipo

$$(53)\qquad |r^{1+\beta}(xy\,;x_1y_1)\,\omega_{jk}(xy\,;x_1y_1)|<B_{14}\,\overline{\varphi}+B_{15}\,\overline{\varphi}_1$$

come avevamo enunciato.

22. In particolare ad una limitazione di questa natura soddisfa la funzione:

$$(54)\qquad \int_\gamma\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)\log\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,,$$

poichè posto:

$$\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)\,\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)\log\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)=\psi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)\,, \tag{55}$$

la $\psi(xy\,;\sigma\,;x_1\,y_1)$ soddisfa alle proprietà richieste sopra per la φ, e l'integrale (54) si può scrivere:

$$\int_\gamma \frac{\psi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)\,\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)}\,d\sigma\,, \tag{56}$$

e così ridurlo alla forma del numero precedente [1].

23. Un'ulteriore estensione degli integrali considerati fin qui si ottiene considerando integrali della forma:

$$\omega_{j,g}(xy)=\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j^g(xy\,;\sigma)}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma\,. \tag{57}$$

g essendo un intero positivo. Ammettiamo che la funzione $\varphi(\sigma)$ abbia le derivate dei primi g ordini finite e continue; o più semplicemente che la funzione $\varphi(\sigma)$ abbia le derivate dei primi $g-1$ ordini finite e continue inferiori in modulo a $\bar{g}_1$ e tali che le derivate $(g-1)^{esime}$ soddisfacciano ad una limitazione della forma (18):

$$|\varphi^{(g-1)}(\sigma)-\varphi^{(g-1)}(\sigma_1)|<\bar{\varphi}_1\,|\sigma-\sigma_1|^\beta. \tag{58}$$

È facile vedere che, almeno se si suppone $g<2n+1$, l'integrale (57) rappresenta una funzione finita e continua di (xy) in C e su γ.

Infatti si osservi che si ha analogamente a (4)

$$\tag{59} \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\varsigma_j^2(xy\,;\sigma)}=-\frac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}=\vartheta_{21}(xy\,;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\\ &\frac{1}{\varsigma_j^3(xy\,;\sigma)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{\varsigma_j^2(xy\,;\sigma)}=\\ &\qquad=\vartheta_{32}(xy\,;\sigma)\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}+\vartheta_{31}(xy\,;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{1}{\varsigma_j^g(xy\,;\sigma)}=\vartheta_{gg-1}(xy\,;\sigma)\frac{\partial^{g-1}}{\partial\sigma^{g-1}}\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}+\\ &\qquad+\vartheta_{gg-2}(xy\,;\sigma)\frac{\partial^{g-2}}{\partial\sigma^{g-2}}\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}+\cdots+\vartheta_{g1}(xy\,;\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,. \end{aligned}\right.$$

[1] Del resto si potrebbe in questo caso dimostrare che l'integrale (54) diviene infinito di ordine <1: ma non ci occorre.

dove le ϑ_{hh_1} sono polinomî in $\dfrac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}$ e nelle sue derivate rapporto a σ dei primi $h-h_1-1$ ordini, onde ammettono le derivate rapporto a σ finite e continue dei primi $2n+h_1+1-h$ ordini e rapporto ad xy dei primi $2n+1$ ordini.

Applicando le (59) a (57), e poi integrando per parti si avrà:

$$(60)\qquad \omega_{j,g}(xy)=\int_\gamma \frac{\partial^{g-1}}{\partial\sigma^{g-1}}\left(\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\right)\varphi(\sigma)\,\vartheta_{g,g-1}(xy\,;\sigma)\,d\sigma+\cdots+$$

$$+\int_\gamma \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\right)\varphi(\sigma)\,\vartheta_{g1}(xy\,;\sigma)\,d\sigma=\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j(xy\,;\sigma)}\,\chi(xy\,;\sigma)\,d\sigma,$$

dove $\chi(xy\,;\sigma)$ è un polinomio nella $\varphi(\sigma)$ e nelle sue derivate dei primi $g-1$ ordini, nelle $\vartheta_{gk}(xy\,;\sigma)$ e nelle derivate di esse rapporto a σ dei primi k ordini, od in altri termini nella $\varphi(\sigma)$, nella $\dfrac{1}{\tau_j(xy\,;\sigma)}$ e nelle loro derivate di ordine $\leqq g-1$. Quindi grazie alle ipotesi fatte sulla $\varphi(\sigma)$ questa funzione $\chi(xy\,;\sigma)$ soddisfa a limitazioni del tipo delle (17) e (18). Onde risulta l'enunciato.

Analoghe considerazioni valgono quando si tratti di integrali del tipo:

$$(61)\qquad \bar\omega_{j,g}(xy)=\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_j^{\,g}(\sigma\,;xy)}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Basterà costruire delle formule analoghe alle (59), che stiano a queste come la (32) sta alla (4): e l'unica differenza consisterà in ciò che in tali formule compariranno anche termini pei quali nelle corrispondenti formule (60) non occorre fare alcuna integrazione per parti.

§ 24. Il precedente teorema ammette esso pure come quelli relativi ad $\omega_j(xy)$ delle estensioni.

Così si supponga $\varphi(\sigma)$ dipendente anche da xy ed x_1y_1 e si supponga che la funzione $\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)$ sia tale che le sue derivate di ordine $g-1$ rapporto a σ siano della forma:

$$(62)\qquad \frac{\partial^{g-1}\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)}{\partial\sigma^{g-1}}=\sum_1^{2n}\frac{\varphi_k(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)}{\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)}+$$

$$+\sum_1^{2n}{}_k\,\varphi'_k(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)\log\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)+\Phi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)\,.$$

dove le φ_k, φ'_k, Φ soddisfanno qualunque siano (xy) e (x_1y_1) alle solite condizioni del tipo delle (17) e (18), e che analoghe formule valgano per le derivate di ordine inferiore. Allora mediante la trasformazione (60) ed applicando i risultati dei numeri 21 e 22, otterremo che la funzione:

$$\omega_{j,g}(xy\,;x_1y_1)=\int_\gamma \frac{\varphi(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)}{\varsigma_j^g(xy\,;\sigma)}\,d\sigma\,, \tag{63}$$

la quale è finita e continua per (xy) ed (x_1y_1) interni a C, diviene infinita di ordine $\leq 1+\beta$ quando xy ed x_1y_1 vanno sul contorno. Od in altri termini che la funzione

$$r^{1+\beta}(xy\,;x_1y_1)\,\omega_{j,g}(xy\,;x_1y_1) \tag{64}$$

è finita e continua anche sul contorno.

§ VII.

La funzione compensatrice.

25. Siamo ora in grado di costruire la funzione compensatrice. Ciò faremo nei primi tre numeri di questo §, mentre dimostreremo nei seguenti che la funzione soddisfa alle proprietà volute.

Consideriamo n sistemi di $2n$ funzioni $\lambda_i^{(1)}(s)\,,\lambda_i^{(2)}(s)\,,\dots,\lambda_i^{(n)}(s)$ $(i=1\,,2\,,\dots,2n)$ del punto (s) variabile su γ determinati dagli n sistemi di equazioni lineari:

$$(a^{(1)})\quad\left\{\begin{array}{ll}
\sum_1^{2n}{}_m(-1)^m\,\lambda_m^{(1)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=\dfrac{1}{i\pi} & \sum_1^{2n}{}_m\,\lambda_m^{(1)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0\\
\sum_1^{2n}{}_m(-1)^m\,\lambda_m^{(1)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0 & \sum_1^{2n}{}_m\,\lambda_m^{(1)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0\\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\\
\sum_1^{2n}{}_m(-1)^m\,\lambda_m^{(1)}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0 & \sum_1^{2n}{}_m\,\lambda_m^{(1)}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0\,,
\end{array}\right.$$

$$(a^{(2)})\quad\left\{\begin{array}{ll}
\sum_1^{2n}{}_m(-1)^m\,\lambda_m^{(2)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0 & \sum_1^{2n}{}_m\,\lambda_m^{(2)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0\\
\sum_1^{2n}{}_m(-1)^m\,\lambda_m^{(2)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=\dfrac{1}{i\pi} & \sum_1^{2n}{}_m\,\lambda_m^{(2)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0\\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\\
\sum_1^{2n}{}_m(-1)^m\,\lambda_m^{(2)}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0 & \sum_1^{2n}{}_m\,\lambda_m^{(2)}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;s)}=0\,.
\end{array}\right.$$

. . . .

$$(a^{(n)})\quad\left\{\begin{array}{ll}
\sum_1^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(n)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;\,s)}=0 & \sum_1^{2n}{}_m \lambda_m^{(n)}(s)\,\alpha_m^{n-1}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;\,s)}=0\\
\sum_1^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(n)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;\,s)}=0 & \sum_1^{2n}{}_m \lambda_m^{(n)}(s)\,\alpha_m^{n-2}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;\,s)}=0\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
\sum_1^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_m^{(n)}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;\,s)}=\dfrac{1}{\pi i} & \sum_1^{2n}{}_m \lambda_m^{(n)}(s)\,\dfrac{1}{\tau_m(s\,;\,s)}=0\,.
\end{array}\right.$$

Tali sistemi ammettono sempre una soluzione ed una sola. Infatti il determinante dei coefficienti di uno qualunque di questi sistemi è:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\prod_1^{2n}{}_i \tau_i(s\,;\,s)}\begin{vmatrix}
-\alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & -\alpha_3^{n-1} & \alpha_4^{n-1} & \dots & -\alpha_{2n-1}^{n-1} & \alpha_{2n}^{n-1}\\
\alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \alpha_4^{n-1} & \dots & \alpha_{2n-1}^{n-1} & \alpha_{2n}^{n-1}\\
\dots & & & & & & \dots\\
\dots & & & & & & \dots\\
-1 & 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1
\end{vmatrix}=\\
&=\frac{(-1)^n 2^{2n}}{\prod_1^{2n}{}_i \tau_i(s\,;\,s)}\begin{vmatrix}
\alpha_1^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_{2n-1}^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0\\
\alpha_1^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \dots & \alpha_{2n-1}^{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0\\
\dots & & & & & & & \dots\\
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2^{n-1} & \alpha_4^{n-1} & \dots & \alpha_{2n}^{n-1}\\
0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2^{n-2} & \alpha_4^{n-2} & \dots & \alpha_{2n}^{n-2}\\
\dots & & & & & & & \dots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1
\end{vmatrix}=
\end{aligned}\right.$$

$$=\frac{(-1)^n 2^{2n}}{\prod_1^{2n} \tau_i(s\,;\,s)}\prod_{h<k}(\alpha_{2k-1}(s)-\alpha_{2h-1}(s))\,(\alpha_{2k}(s)-\alpha_{2h}(s))\,;$$

e quindi è certo diverso da zero poichè tutte le α sono distinte.

Di più le funzioni $\lambda_{2h-1}^{(j)}(s)$ e $\lambda_{2h}^{(j)}(s)$ sono a due a due complesse coniugate [1], ed ammettono le derivate rapporto ad s dei primi $2n$ ordini finite e continue.

[1] Infatti le quantità $\lambda_{m0}^{(1)}$ complesse coniugate delle $\lambda_m^{(1)}$ soddisfanno al sistema che si ottiene da $(a^{(1)})$ cambiando i coefficienti ed i termini noti nei complessi coniugati:

$$\begin{array}{ll}
\sum_1^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_{m0}^{(1)}\,\alpha_{m0}^{n-1}\,\dfrac{1}{\tau_{m0}(s\,;\,s)}=-\dfrac{1}{i\pi} & \sum_1^{2n}{}_m \lambda_{m0}^{(1)}\,\alpha_{m0}^{n-1}\,\dfrac{1}{\tau_{m0}(s\,;\,s)}=0\\
\sum_1^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_{m0}^{(1)}\,\alpha_{m0}^{n-2}\,\dfrac{1}{\tau_{m0}(s\,;\,s)}=0 & \sum_1^{2n}{}_m \lambda_{m0}^{(1)}\,\alpha_{m0}^{n-2}\,\dfrac{1}{\tau_{m0}(s\,;\,s)}=0\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
\sum_1^{2n}{}_m (-1)^m \lambda_{m0}^{(1)}\,\dfrac{1}{\tau_{m0}(s\,;\,s)}=0 & \sum_1^{2n}{}_m \lambda_{m0}^{(1)}\,\dfrac{1}{\tau_{m0}(s\,;\,s)}=0\,.
\end{array}$$

26. Consideriamo allora le n funzioni:

$$\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma) = \sum_{1}^{2n}{}_m\, \lambda^{(j)}_m(\sigma)\, \varsigma^{n-2}_m(xy\,;\sigma) \log \varsigma_m(xy\,;\sigma)\,. \tag{2}$$

Fissato σ, $\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)$ è monodroma in (xy) almeno finchè il punto (xy) rimane entro C, poichè non potrà mai avvenire che (xy) faccia un giro attorno a (σ): cosicchè per determinare completamente $\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)$ basterà fissare per ogni valore di (σ) una determinazione per i logaritmi che compaiono in (2). Tale determinazione noi prenderemo in modo affatto arbitrario colle sole condizioni che: 1° le determinazioni di $\log \varsigma_{2h-1}$ e $\log \varsigma_{2h}$ siano complesse coniugate; 2° che le determinazioni relative ai varî valori di σ variino con continuità al variare di σ, fatta naturalmente eccezione per un punto di γ, per es. per il punto $(0) \equiv (\gamma)$ in cui esse hanno un salto di $\pm 2\pi i$.

Da quanto precede risulta che la $\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)$ è una funzione reale dei due punti (xy) e $(\xi(\sigma)\,\eta(\sigma))$ finita e continua per tutti i valori di xy, σ tranne che per $\sigma = 0$ ove ha un salto. Di più $\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)$ ammette tutte le derivate che non contengono più di $2n+1$ derivazioni rapporto ad xy, e più di $2n$ derivazioni rapporto a σ finite e continue fuori che per $\sigma = 0$ dove hanno un salto. Precisamente calcolando le varie derivate di $\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)$ rapporto a xy otterremo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{i+k}\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)}{\partial x^i\,\partial y^k} &= \frac{(n-2)!}{(n-i-k-2)!}\sum_{1}^{2n}{}_m\, \lambda^{(j)}_m(\sigma)\, \alpha^i_m(xy)\, \varsigma^{n-i-k-2}_m \log \varsigma_m + \\ &+ \Sigma p^{(j)}_{m,ik} \log \varsigma_m + \mathrm{P}^{(j)}_{ik} \qquad (i+k \leq n-2)\,,\end{aligned} \tag{3}$$

dove, come nel § V, le $p^{(j)}_{m,ik}$, $\mathrm{P}^{(j)}_{ik}$ rappresentano funzioni razionali intere di $(x-\xi(\sigma))$, $(y-\eta(\sigma))$ con coefficienti funzioni di σ e di xy di cui le prime si annullano per $(xy) \equiv (\sigma)$;

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{i+k}\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)}{\partial x^i\,\partial y^k} &= (n-2)!\sum_{1}^{2n}{}_m\, \lambda^{(j)}_m(\sigma)\, \alpha^i_m(xy)\, \frac{1}{\varsigma_m^{i+k-n+2}} + \\ &+ \Sigma p^{(j)}_{m,ik}\frac{1}{\varsigma_m^{i+k-n+1}} + \Sigma p'^{(j)}_{m,ik} \log \varsigma_m + \mathrm{P}^{(j)}_{ik} \ [1] \\ &(2n+1 \geq i+k \geqq n-1)\end{aligned} \tag{4}$$

dove ancora le $p^{(j)}_{m,ik}$, $p'^{(j)}_{m,ik}$, $\mathrm{P}^{(j)}_{ik}$ sono al solito funzioni finite e continue le quali

---

Ma, ricordando che $\alpha_{2h-1\,0} = \alpha_{2h}$, $\alpha_{2h\,0} = \alpha_{2h-1}$, $\tau_{2h-1\,0} = \tau_{2h}$, $\tau_{2h\,0} = \tau_{2h-1}$, segue che questo sistema coincide col sistema $(a^{(1)})$ quando si prenda:

$$\lambda^{(1)}_{2h-1\,0} = \lambda^{(1)}_{2h} \quad \text{e} \quad \lambda^{(1)}_{2h\,0} = \lambda^{(1)}_{2h-1}\,.$$

[1] Per $i+k = n-1$ manca il secondo termine nelle (4).

hanno le derivate che non contengono più di $2n+1-i-k$ derivazioni rapporto ad xy, nè più di $2n$ rapporto a σ.

Dalle (3) e (4) segue che le derivate di ordine $n-2, n-1, \dots, 2n, 2n+1$ di $\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$ divengono per $(xy)\equiv(\sigma)$ rispettivamente infinite logaritmicamente, di $1^\circ, 2^\circ \dots (n+2)^\circ, (n+3)^\circ$ ordine.

La $\Omega^{(j)}$ così costruita gode però di due proprietà per noi fondamentali:

1°. Quando si costruisce la $\mathfrak{M}\Omega^{(j)}(xy;\sigma)$, questa per $(xy)\equiv(\sigma)$ non avrà che una singolarità di ordine $n+1$ e precisamente si potrà porre:

$$(5)\qquad \mathfrak{M}\Omega^{(j)}(xy;\sigma)\equiv \Sigma p_m^{(j)}(xy;\sigma)\frac{1}{\varsigma_m^{n+1}(xy;\sigma)}+\Sigma p_m'^{(j)}\log\varsigma_m(xy;\sigma)+\mathrm{P}^{(j)}(xy;\sigma).$$

Questo si verifica immediatamente mediante le formule (4).

2°. Se indichiamo con $\varphi_j(\sigma)$ una funzione che soddisfaccia alle condizioni (17) e (18) del § VI, e consideriamo l'integrale:

$$(6)\qquad \Phi_j(xy)=\frac{1}{(n-2)!}\int_\gamma \Omega^{(j)}(xy;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma,$$

questo rappresenta una funzione finita e continua insieme colle derivate dei suoi primi $n-1$ ordini anche sul contorno γ: e tale che:

$$(7)\qquad \frac{\partial^{n-1}\Phi_j(s)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}=\varepsilon_{ij}\,\varphi_j(s)+\int_\gamma \Delta_{j,i}(s;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma\qquad(\varepsilon_{ii}=1\,;\,\varepsilon_{ij}=0\ (i\neq j)),$$

dove $\Delta_{j,i}(xy;\sigma)$ rappresenta una funzione avente per $(xy)\equiv(\sigma)$ una singolarità al più logaritmica. Tale enunciato si dimostra subito osservando che per (4) si ha:

$$(8)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial^{n-1}\Phi_j(xy)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}&=\int_\gamma \sum_1^{2n}{}_m \frac{\lambda_m^{(j)}(\sigma)\,\alpha_m^{n-i}(xy)}{\varsigma_m(xy;\sigma)}\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma+\\&+\frac{1}{(n-2)!}\int_\gamma\big[\Sigma p_{m,n-ii-1}^{(j)}(xy;\sigma)\log\varsigma_m(xy;\sigma)+\\&+\mathrm{P}_{m,n-ii-1}^{(j)}(xy;\sigma)\big]\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma\,.\end{aligned}$$

Ma per gli studî dei nn. 15-18 (e specialmente la formula (30)) si ha.

$$(9)\qquad \begin{aligned}\lim_{(xy)\equiv(s)}\alpha_m^{n-i}(xy)\int_\gamma\frac{\lambda_m^{(j)}(\sigma)}{\varsigma_m(xy;\sigma)}\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma&=\frac{(-1)^m\pi i\,\lambda_m^{(j)}(s)\,\alpha_m^{n-i}(s)}{\tau_m(s;s)}\,\varphi_j(s)+\\+\frac{\pi}{\gamma}\frac{\alpha_m^{n-i}(s)}{\tau_m(s;s)}\int_\gamma\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)\,\lambda_m^{(j)}(\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma&+\alpha_m^{n-i}(s)\int_\gamma l_m(s;\sigma)\,\lambda_m^{(j)}(\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma=\\=(-1)^m\pi i\,\frac{\lambda_m^{(j)}(s)\,\alpha_m^{n-i}(s)}{\tau_m(s;s)}\,\varphi_j(s)&+\frac{\pi}{\gamma}\frac{\alpha_m^{n-i}(s)\,\lambda_m^{(j)}(s)}{\tau_m(s;s)}\int_\gamma\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma+\\&+\alpha_m^{n-i}(s)\int_\gamma \mathrm{L}_{mj}(s;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma\end{aligned}$$

dove la funzione:

$$(10)\qquad L_{mj}(s\,;\sigma)=\frac{\pi}{\gamma}\left[\frac{\lambda_m^{(j)}(\sigma)}{\imath_m(s\,;s)}-\frac{\lambda_m^{(j)}(s)}{\imath_m(s\,;s)}\right]\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)+l_m(s\,;\sigma)\,\lambda_m^{(j)}(\sigma)$$

è, come la $l_m(s\,;\sigma)$ data dalla (29) del n. 18, una funzione finita e continua insieme colle sue derivate che non contengono più di $2n-1$ derivazioni rapporto ad s, nè più di $2n$ rapporto a σ; e quelle di queste derivate le quali sono di ordine $\leq 2n-1$ sono finite e continue anche per $s=\sigma$, mentre quelle di ordine $k>2n-1$ divengono infinite di ordine $k-2n+1$ al più.

Portando le (9) nella (8), tenendo conto che le $\lambda^{(j)}$ soddisfanno al sistema di equazioni $(a^{(j)})$, si deduce la (7) dove si ponga:

$$(11)\qquad \begin{aligned}\varDelta_{j,i}(s\,;\sigma)&=\sum_1^{2n}{}_m\,\alpha_m^{n-i}(s)\,L_{mj}(s\,;\sigma)+\\&+\frac{1}{(n-2)!}\left\{\Sigma_m\,p_{m,n-ii-1}^{(j)}(s\,;\sigma)\log\varsigma_m(s\,;\sigma)+P_{m,n-ii-1}^{(j)}(s\,;\sigma)\right\}=\\&=\sum_1^{2n}{}_m\,\alpha_m^{n-i}(s)\,L_{mj}(s\,;\sigma)+\overline{\varDelta}_{j,i}(s\,;\sigma)\,;\end{aligned}$$

il che dimostra l'enunciato.

È da notarsi che nel caso elementare si ha:

1°. Le $\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)$ ammettono le derivate che non contengono più di $2n$ derivazioni rapporto a σ, ma quante si vogliono rapporto xy.

2°. Le formule (4) si riducono al loro primo termine.

3°. Si ha identicamente

$$(5)'\qquad \mathfrak{M}\,\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)=0\,.$$

4°. Nelle (8) scompare (per 2°) il secondo integrale, e si ha quindi in luogo della (7) la formula:

$$(7)'\qquad \frac{\partial^{n-1}\Phi_j(s)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}=\varepsilon_{ij}\,\varphi_j(s)+\sum_1^{2n}{}_m\,\alpha_m^{n-i}\int_\gamma L_{mj}(s\,;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma\,.$$

In altri termini in (11) è $\overline{\varDelta}_{j,i}=0$.

27. Poniamo per brevità:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}\psi_1(xy\,;\xi\eta)&=\frac{\partial^{n-1}\psi(xy\,;\xi\eta)}{\partial x^{n-1}}\,,\\ \psi_2(xy\,;\xi\eta)&=\frac{\partial^{n-1}\psi(xy\,;\xi\eta)}{\partial x^{n-2}\,\partial y}\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \psi_n(xy\,;\xi\eta)&=\frac{\partial^{n-1}\psi(xy\,;\xi\eta)}{\partial y^{n-1}}\,.\end{aligned}\right.$$

E consideriamo la funzione:

$$e(xy\,;x_1y_1)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\int_\gamma \Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma. \tag{13}$$

Questa funzione è finita e continua insieme colle sue derivate rapporto ad xy ed x_1y_1 che non contengono più di $2n+1$ derivazioni rapporto ad xy, quando i due punti (xy) ed (x_1y_1) sono all'interno di C; vogliamo ora studiare quale comportamento hanno queste derivate quando (xy) ed (x_1y_1) vengano su γ. E precisamente vogliamo provare che a tale funzione si può assegnare l'ufficio medesimo che nei § II e III abbiamo assegnato alla funzione che abbiamo chiamato pure $e(xy\,;x_1y_1)$. E cioè che essa è tale che:

1°. Le sue derivate di ordine $\leq 2n-1$ rapporto ad x ed y e l'espressione $\mathfrak{M}e(xy\,;x_1y_1)$ divengono nei punti di γ singolari di ordine $\leq 1+\beta$, dove β è un numero piccolo a piacere: vogliamo dire che moltiplicate per $r(xy\,;x_1y_1)^{1+\beta}$ dànno un prodotto finito anche nei punti di γ.

2°. La differenza $\psi(xy\,;x_1y_1)-e(xy\,;x_1y_1)$ e qualunque sua derivata di ordine $k\leq n-1$ rapporto ad x, y è una funzione finita e continua su γ che ammette le derivate dei primi $2n-k$ ordini rapporto all'arco di γ finite e continue od aventi al più una singolarità di ordine $1+\beta$.

È chiaro che provate queste due affermazioni potremo, come nei § II e III, completare la costruzione della funzione compensatrice costruendo col metodo indicato nell'Appendice § 1, una funzione $e_1(xy\,;x_1y_1)$ tale che essa e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini rapporto ad x e y abbiano i valori di $e(xy\,;x_1y_1)-\psi(xy\,;x_1y_1)$ e delle derivate analoghe, e che le derivate di ordine $\leq 2n$ abbiano al più su γ singolarità di ordine $1+\beta$.

Ritorneremo del resto su quest'ultimo punto nel n. 30.

28. Le due proprietà enunciate per la $e(xy\,;x_1y_1)$ sono conseguenza delle due proprietà di $\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)$ notate nel n. 26. Così l'affermazione relativa a $\mathfrak{M}e(xy\,;x_1y_1)$ risulta evidente nel caso elementare poichè avendosi allora per (5)' $\mathfrak{M}\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)=0$ risulterà pure:

$$\mathfrak{M}e(xy\,;x_1y_1)=0 \tag{14}$$

qualunque sia (xy).

Nel caso generale mi limiterò a dimostrare l'asserzione contenuta in 1° per $\mathfrak{M}e(xy\,;x_1y_1)$, poichè la dimostrazione è uguale o più semplice per quanto riguarda le derivate di ordine $\leq 2n-1$.

Per (5) si ha:

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{M}e(xy\,;x_1y_1)&=\frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\int_\gamma \mathfrak{M}\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma=\\&=\frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\sum_1^{2n}{}_m\int_\gamma p_m^{(j)}(xy\,;\sigma)\,\frac{1}{\varsigma_m^{n+1}(xy\,;\sigma)}\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma+\\&+\frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\int_\gamma\left\{\sum_1^{2n}{}_m p_m'^{(j)}(xy\,;\sigma)\log\varsigma_m(xy\,;\sigma)+\mathrm{P}^{(j)}(xy\,;\sigma)\right\}\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma=\\&=\frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\sum_1^{2n}{}_m\delta_{jm}(xy\,;x_1y_1)+\frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j\,\Delta_j(xy\,;x_1y_1).\end{aligned}\right.$$

La funzione $\Delta_j(xy\,;x_1y_1)$ è evidentemente sempre finita e continua perchè l'integrando ha al più una singolarità logaritmica quando (xy) viene in (σ).

Per le $\delta_{jm}(xy\,;x_1y_1)$ si osservi che le $p_m^{(j)}(xy\,;\sigma)$ ammettono le derivate finite rapporto a σ di ordine $\leqq n$, e che le derivate rapporto a σ delle $\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)$ di ordine n non sono che combinazioni lineari delle derivate di ordine $2n-1$ della $\psi(\sigma\,;x_1y_1)$. Quindi la $\dfrac{\partial^n[p_m^{(j)}(xy\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)]}{\partial\sigma^n}$ è della forma:

$$\Sigma_k\,\chi_k(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)\,\frac{1}{\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)}+\Sigma\,\chi'_k(xy\,;\sigma\,;x_1y_1)\log\varsigma_k(\sigma\,;x_1y_1)+X(xy\,;\sigma\,;x_1y_1),$$

dove le χ, χ', X soddisfanno a limitazioni del tipo delle (17) (18) del § VI, per β comunque piccolo. Ed analoga forma avranno le derivate di ordine inferiore. Quindi $\delta_{jm}(xy\,;x_1y_1)$ sarà del tipo della $\omega_{j,n+1}(xy\,;x_1y_1)$ data dalla (63) del § VI (n. 24) onde si avrà che comunque piccolo sia β:

$$r^{1+\beta}(xy\,;x_1y_1)\,\delta_{jm}(xy\,;x_1y_1)$$

è finito anche per (xy) ed (x_1y_1) su γ. E quindi anche sarà:

$$r^{1+\beta}(xy\,;x_1y_1)\,\mathfrak{M}e(xy\,;x_1y_1)$$

sempre limitato in C e su γ.

Per le derivate di ordine $\leqq 2n-1$ vale lo stesso ragionamento; anzi si può dire che le derivate di ordine $\leqq 2n-3$ restano finite anche al contorno.

29. Per dimostrare la seconda delle proprietà enunciate per la $e(xy\,;x_1y_1)$, basterà evidentemente limitarci a dimostrare che le n derivate di ordine $n-1$ di $\psi(xy\,;x_1y_1)-e(xy\,;x_1y_1)$ sono su γ funzioni finite e continue insieme colle loro derivate dei primi $n+1$ ordini rapporto all'arco od hanno al più una singolarità di ordine $1+\beta$, perchè allora l'analoga proprietà risulterà evidente anche per le derivate di ordine $< n-1$.

Ora si ha per le formule (7) e (12):

$$(16)\qquad \left[\frac{\partial^{n-1}[e(xy:x_1y_1)-\psi(xy\,;x_1y_1)]}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)=s}=\int_\gamma\sum_1^n{}_j\,\Delta_{j,i}(s\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma,$$

dove le $\Delta_{j,i}(s\,;\sigma)$ sono date da (11). Ma poichè $\alpha_m(s)$ ed $\mathrm{L}_{mj}(s\,;\sigma)$ hanno le derivate dei primi $2n-1$ ordini rapporto ad s finite e continue, a maggior ragione poichè supponiamo $n\geqq 2$, avranno le derivate di ordine $\leqq n+1$ finite e continue. Ora non resta che da considerare le derivate rapporto ad s di ordine $\leqq n+1$ di

$$\int_\gamma\sum{}_j\,\overline{\Delta}_{j,i}(s\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,.$$

Ma consideriamo addirittura le derivate rapporto ad xy delle funzioni:

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_\gamma \left\{ \Sigma_m\, p^{(j)}_{m,n-i\,i-1}(xy\,;\,\sigma)\log \varsigma_m(xy\,;\,\sigma) + \mathrm{P}^{(j)}_{m,n-i\,i-1}(xy\,;\,\sigma) \right\} \psi_j(\sigma\,;\,x_1y_1)\,d\sigma\,.$$

Noi vediamo immediatamente che una derivata k^{esima} di tale funzione è della forma:

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_\gamma \left\{ \Sigma_m\, \bar{\bar{p}}_m(xy\,;\,\sigma)\frac{1}{\varsigma^k_m(xy\,;\,\sigma)} + \right.$$

$$\left. + \Sigma_m\, \bar{p}'_m(xy\,;\,\sigma)\log\varsigma_m(xy\,;\,\sigma) + \bar{\mathrm{P}}_m(xy\,;\,\sigma) \right\} \psi_j(\sigma\,;\,x_1y_1)\,d\sigma\,,$$

dove le $\bar{p}_m$, $\bar{p}'_m$, $\bar{\mathrm{P}}_m$ sono funzioni dipendenti anche dagli indici i e j, le quali ammettono tutte le $2n$ prime derivate rapporto a σ. E quindi ragionando su queste allo stesso modo che poc'anzi su $\mathfrak{M}e(xy\,;\,x_1y_1)$ e sulle altre derivate di $e(xy\,;\,x_1y_1)$ si vede che una tale funzione non può avere, quando (xy) viene in (s), una singolarità di ordine maggiore di quella di $\dfrac{1}{r^{1+\beta}(s\,;\,x_1y_1)}$, β essendo un numero piccolo a piacere. Anzi per $k \leq n-1$ tali derivate sono senz'altro finite anche su γ.

30. In forza dei teoremi del § 1 dell'Appendice possiamo ora, come si disse al n. 27, costruire una funzione $e_1(xy\,;\,x_1y_1)$ tale che:

1°) ammetta in C le derivate dei primi $2n+1$ ordini finite e continue rapporto ad xy entro C, e le derivate di ordine $\leq 2n-3$ siano finite e continue anche su γ e quelle di ordine $2n-2$, $2n-1$, $2n$ divengano su γ infinite di ordine $1+\beta$, β essendo un numero piccolo a piacere;

2°) quando xy è su γ, essa e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini prendano i valori di $e(s\,;\,x_1y_1) - \psi(s\,;\,x_1y_1)$ e delle derivate corrispondenti.

Quale funzione compensatrice prenderemo:

$$g(xy\,;\,x_1y_1) = -\,e(xy\,;\,x_1y_1) + e_1(xy\,;\,x_1y_1)\,. \tag{17}$$

Essa invero prende insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini i valori di $-\psi(xy\,;\,x_1y_1)$ e delle derivate corrispondenti; ammette all'interno di C le derivate dei primi $2n+1$ ordini finite e continue; ha le derivate dei primi $2n-1$ ordini anche su γ, con singolarità di ordine inferiore ad $1+\beta$; e parimenti la funzione:

$$\mathfrak{M}g(xy\,;\,x_1y_1) = -\,\mathfrak{M}e(xy\,;\,x_1y_1) + \mathfrak{M}e_1(xy\,;\,x_1y_1) = h(xy\,;\,x_1y_1) \tag{18}$$

ha al contorno essa pure una singolarità di ordine $\leq 1+\beta$.

Onde ricordando i teoremi del n. 14 *se consideriamo l'integrale*:

$$u(xy) = \int\int_C [\psi(xy\,;x_1y_1) + g(xy\,;x_1y_1)]\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1\,. \tag{19}$$

dove $\varphi(xy)$ *ha le derivate prime finite e continue entro* C, *esso rappresenta una funzione tale che*:

1°) *è nulla insieme colle sue derivate dei primi* $n-1$ *ordini su* γ;

2°) *le sue derivate di ordine* $\leq 2n-1$ *esistono in* C *e su* γ, *e sono date da*:

$$\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i\,\partial y^k} = \int\int_C \left[\frac{\partial^{i+k}\psi(xy\,;x_1y_1)}{\partial x^i\,\partial y^k} + \frac{\partial^{i+k}g(xy\,;x_1y_1)}{\partial x^i\,\partial y^k}\right]\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1\,. \tag{20}$$

3°) *ammette le derivate* $2n^{esime}$ *entro* C, *e la funzione* $\mathfrak{M}u$ *è data da*:

$$\mathfrak{M}u = \varphi(xy) + \int\int_C [k(xy\,;x_1y_1) + h(xy\,;x_1y_1)]\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1dy_1 \tag{21}$$

ed ammette a sua volta, entro C, *le derivate prime finite e continue.*

§ VIII.

Il caso elementare.

31. Le considerazioni degli ultimi due numeri si semplificano nel caso elementare [1].

Intanto, grazie alle osservazioni finali del n. 26 ed in special modo alla formula (7)′, la (16) diviene:

$$\left[\frac{\partial^{n-1}\{e(xy\,;x_1y_1) - \psi(xy\,;x_1y_1)\}}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)} = \tag{1}$$
$$= \int_\gamma \sum_1^n{}_j \sum_1^{2n}{}_m\, \alpha_m^{n-i}(s)\,\mathrm{L}_{mj}(s\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma:x_1y_1)\,d\sigma = e_{1,i}(s\,;x_1y_1)\,.$$

Ricordando che $\mathrm{L}_{mj}(s\,;\sigma)$ ammette tutte le derivate che non contengono più di $2n-1$ derivazioni rapporto ad s o rapporto a σ, e che quelle di esse che sono di ordine $\leq 2n-1$ sono finite continue, potremmo già dedurre parecchie conseguenze per la funzione $e_1(xy\,;x_1y_1)$ costruita nel numero 30; in particolare mostrare che la $e_1(xy\,;x_1y_1)$ ammette le prime $2n+1$ derivate rapporto ad xy finite e continue

[1] Nel numero 12 (pag. 22) è stato definito quello che fu chiamato il caso elementare: ed osservazioni particolari relative ad esso sono già state fatte ai nn. 13 (form. (7)), 14 (form. (10)), 26 (form. (5)′, (7)′), 27 (form. (14)).

anche su γ (poichè i valori delle derivate $(n-1)^e$ assegnati al contorno hanno le derivate dei primi $2n-1$ ordini e si suppone $n \geq 2$). Ma nel seguito (n. 35) sarà necessario sapere inoltre che la funzione $\mathfrak{M} e_1(xy\,;x_1y_1)$ ammette pure le derivate dei primi $2n$ ordini rapporto ad x_1y_1 finite e continue; ora invece dalle proprietà ora ricordate di $\mathrm{L}_{mj}(s\,;\sigma)$ si vedrebbe facilmente che segue soltanto che le derivate di ordine $2n$ rapporto ad x_1y_1 delle derivate $(n+1)^{esime}$ rapporto ad s di $e_{1,i}(s\,;x_1y_1)$ esistono all'interno di C ed anche quando x_1y_1 tende ad un punto σ di γ diverso da s, ma divengono infinite quando x_1y_1 tende a s; quindi le derivate di ordine $2n$ rapporto ad x_1y_1 delle derivate $2n^{esime}$ rapporto a xy di $e_1(xy\,;x_1y_1)$ non possono essere tutte finite e continue, cosicchè non risulta senz'altro che $\mathfrak{M}e_1(xy\,;x_1y_1)$ goda della proprietà richiesta. Per evitare questa difficoltà ci sarà utile particolarizzare ulteriormente la costruzione della funzione compensatrice in modo analogo a quanto si fece al n. 8; cercando di riapplicare alla costruzione della $e_1(xy\,;x_1y_1)$ il medesimo procedimento che pur ora nella costruzione della funzione $g(xy\,;x_1y_1)$ ci permise di evitare una difficoltà analoga relativa al divenire infinite di certe sue derivate.

Consideriamo perciò la funzione

$$(2)\qquad e^{(1)}(xy\,;x_1y_1) = \frac{1}{(n-2)!}\sum_1^n{}_j \int_\gamma \Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)\, e_{1,j}(\sigma\,;x_1y_1)\, d\sigma\,.$$

Si avrà, come per la funzione (13) del § VII, che questa funzione soddisfa, nel caso elementare, all'equazione:

$$(3)\qquad \mathfrak{M}e^{(1)}(xy\,;x_1y_1) = 0\,,$$

ed inoltre come al n. 29 si vede che:

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\left[\frac{\partial^{n-1} e^{(1)}(xy\,;x_1y_1)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)} =\\ &= e_{1,i}(s\,;x_1y_1) + \int_\gamma \sum_1^n{}_j \sum_1^{2n}{}_m\, \alpha_m^{n-i}(s)\,\mathrm{L}_{mj}(s\,;\sigma)\, e_{1,j}(\sigma\,;x_1y_1)\, d\sigma =\\ &= e_{1,i}(s\,;x_1y_1) + e_{1i}^{(1)}(s\,;x_1y_1)\,.\end{aligned}$$

Se quindi si pone

$$(5)\qquad \bar{e}(xy\,;x_1y_1) = e(xy\,;x_1y_1) - e^{(1)}(xy\,;x_1y_1)\,,$$

si avrà come per la funzione (13) del § VII:

$$(6)\qquad \mathfrak{M}\bar{e}(xy\,;x_1y_1) = 0\,,$$

ed inoltre per (1) e (4) si avrà:

$$(7)\qquad \left[\frac{\partial^{n-1}\left[\bar{e}(xy\,;x_1y_1) - \psi(xy\,;x_1y_1)\right]}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)} = -\, e_{1i}^{(1)}(s\,;x_1y_1).$$

E per completare la costruzione della funzione compensatrice basterà trovare una funzione $e_1^{(1)}(xy\,;x_1y_1)$ che su γ prenda insieme colle sue derivate di ordine $n-1$ i valori di $\bar{e}(xy\,;x_1y_1) - \psi(xy\,;x_1y_1)$, od in altri termini tale che le sue derivate di ordine $n-1$ siano uguali alle $e_{1,i}^{(1)}(s\,;x_1y_1)$. E porre poi:

$$g(xy\,;x_1y_1) = -\,\bar{e}(xy\,;x_1y_1) + e_1^{(1)}(xy\,;x_1y_1). \tag{8}$$

Studiamo meglio le funzioni $e_{1,i}^{(1)}(s\,;x_1y_1)$. Se poniamo:

$$\mathfrak{L}_{l,i}(s\,;\sigma) = \int_\gamma \sum_1^n{}_{l_1} \sum_1^{2n}{}_{m,m_1} \alpha_{m_1}^{n-i}(s)\, \alpha_m^{n-l_1}(\sigma_1)\, \mathrm{L}_{m_1,l_1}(s\,;\sigma_1)\, \mathrm{L}_{m,l}(\sigma_1\,;\sigma)\, d\sigma_1 \tag{9}$$

avremo evidentemente da (4) e (1):

$$e_{1,i}^{(1)}(s\,;x_1y_1) = \int_\gamma \sum_1^n{}_l\, \mathfrak{L}_{l,i}(s\,;\sigma)\, \psi_l(\sigma\,;x_1y_1)\, d\sigma\,. \tag{10}$$

Siccome le funzioni $\mathrm{L}_{m_1,l_1}(s\,;\sigma_1)$ ammettono le derivate dei primi $2n-1$ ordini finite e continue rapporto a s, e le $\mathrm{L}_{ml}(\sigma_1\,;\sigma)$ ammettono le derivate dei primi $2n-1$ ordini finite e continue rapporto a σ, le funzioni $\mathfrak{L}_{l,i}(s\,;\sigma)$ saranno funzioni finite e continue insieme con tutte le loro derivate di ordine $\leq 4n-2$ le quali non contengono più di $2n-1$ derivazioni rapporto ad s, nè più di $2n-1$ rapporto a σ. Onde intanto anche $e_{1,i}^{(1)}(s\,;x_1y_1)$ avrà le derivate dei primi $2n-1$ ordini rapporto ad s.

Ma studiamo anche le derivate rapporto ad x_1y_1. Ricordando le (12) del n. 27 e le formule del § V concludiamo che le derivate rapporto ad x_1y_1 di $\psi_l(\sigma\,;x_1y_1)$ di ordine quanto si vuole elevato esistono, e quelle di ordine $\leq n-1$ sono sempre finite od hanno al più una singolarità logaritmica, mentre quelle di ordine $k > n-1$ sono della forma:

$$\frac{\partial^k \psi_j(\sigma\,;x_1y_1)}{\partial x^{k_1}\, \partial y^{k_2}} = \frac{i}{2\pi} \sum_1^{2n}{}_m \frac{\alpha_m^{k_1+n-j} d_m}{\varsigma_m^{k-n+1}(\sigma\,;x_1y_1)} \qquad (k_1 + k_2 = k). \tag{11}$$

Onde intanto segue che le (10) e le loro derivate rapporto ad s ammettono all'interno di C tutte le derivate rapporto ad x_1y_1. Ed applicando i teoremi dei numeri 19, 24, 25 per le proprietà notate delle derivate di $\mathfrak{L}_{l,i}(s\,;\sigma)$ si avrà di più per (11) che esistono e sono finite e continue anche su γ le derivate dei primi $3n-2$ ordini rapporto ad x_1y_1 delle (10) e delle loro derivate rapporto ad s dei primi $2n-1$ ordini.

Queste proprietà delle $e_{1,i}^{(1)}(s\,;x_1y_1)$ si riflettono in altrettante proprietà che possiamo ammettere soddisfaccia la $e_1^{(1)}(xy\,;x_1y_1)$. Precisamente noi potremo ammettere che la $e_1^{(1)}(xy\,;x_1y_1)$ abbia le derivate dei primi $2n$ ordini finite e continue (1), anche

(1) Dico $2n$ e non $3n-2$ ($\geq 2n$ se, come supponiamo, n maggiore di 1) poichè nell'Appendice (§ 1) dimostro solo che per una funzione costruita con simili dati esistono le derivate in numero che non supera mai il numero delle derivate che hanno le funzioni che determinano il contorno diminuito di un'unità.

su γ rapporto a xy: e che sia essa che le sue derivate dei primi $2n$ ordini rapporto a x_1y_1 abbiano le derivate dei primi $3n-2>2n$ ordini rapporto a x_1y_1. Onde, per (8) e (6) si avrà che:

$$\mathfrak{M}g(xy\,;x_1y_1)=\mathfrak{M}e_1^{(1)}(xy\,;x_1y_1)=h(xy\,;x_1y_1) \tag{12}$$

sarà una funzione che in C e su γ ha le derivate rapporto a x_1y_1 dei primi $2n$ ordini finite e continue, e all'interno di C ha le derivate finite e continue rapporto ad xy.

32. Nel caso elementare è facile dimostrare il teorema di unicità.

Lemma — *Sia $\mathfrak{P}u=0$ un'equazione lineare alle derivate parziali di ordine ν a coefficienti costanti* [1]. *Se una funzione $u(xy)$ è soluzione della $\mathfrak{P}u=0$ ed è nulla sopra un contorno chiuso γ insieme colle sue derivate dei primi $\nu-1$ ordini, essa è nulla nel campo* C *interno a γ* [2].

Infatti sia $\mathfrak{P}_1u$ l'aggiunta di $\mathfrak{P}u$: si avrà che, dette z e z_1 due qualunque funzioni finite e continue assieme colle loro derivate di ordine $\nu-1$ in C e su γ, ed aventi le derivate di ordine ν integrabili in C:

$$\int\!\!\int_C[z\mathfrak{P}z_1-z_1\mathfrak{P}_1z]\,dx\,dy=\int_\gamma \mathfrak{K}(z\,;z_1)\,ds\,, \tag{13}$$

dove $\mathfrak{K}(z\,;z_1)$ è un'espressione bilineare nelle derivate di z e z_1 di ordine $\leq\nu-1$.

Se nella (13) poniamo $z_1=u$, sarà $\mathfrak{P}u=0$; inoltre $\mathfrak{K}(z\,;u)$ sarà nulla qualunque sia z, poichè su γ u è nulla colle sue derivate di ordine $\leq\nu-1$. Quindi (13) ci dice allora che qualunque sia z deve essere

$$\int\!\!\int_C u\,\mathfrak{P}_1z\,dx\,dy=0\,. \tag{14}$$

Il che non può essere se non è $u=0$ [3].

[1] Il ragionamento che segue si estenderebbe anche facilmente al caso dei coefficienti analitici.

[2] In altri termini il problema di Cauchy ammette una sola soluzione. Simile teorema dimostrò l'Holmgren (Ofversigt of Kongl. Vetenskaps Akad. Förh. 1901, pp. 91-103, riprodotto in Hadamard, *Leçons sur la Propagation des ondes* etc. Nota 1, pp. 348 e sgg.) supponendo il contorno γ aperto e non formato da linee caratteristiche per l'equazione, e dimostrando che in un intorno sufficientemente piccolo della curva γ la soluzione è necessariamente nulla. Qui ponendo l'ipotesi, ai nostri scopi opportuna, che γ sia chiusa, riusciamo a dire di più che u è nulla in tutto C.

[3] L'affermazione è intuitiva. Possiamo precisarne la dimostrazione nel modo seguente. Sia $u\neq 0$ in un punto P, ad es. $u>0$, sia [R] un cerchio di raggio R e centro P entro cui u sia >0 e sia $f(xy)$ una funzione continua nulla all'esterno di [R], e >0 all'interno. Sarà: $\int\!\!\int_C uf(xy)\,dx\,dy>0$. Possiamo allora, per un noto teorema del Weierstrass, costruire un polinomio $f_1(xy)$, che differisca da $f(xy)$ tanto poco che sia ancora $\int\!\!\int_C uf_1(xy)\,dx\,dy>0$. Basterà allora mostrare che esiste una soluzione $z(xy)$ di $\mathfrak{P}_1z=f_1(xy)$ regolare in tutto C perchè tale conclusione venga a contraddire a (14). Ora essendo $\mathfrak{P}_1z$ a coefficienti costanti e $f_1(xy)$ un polinomio, si può facilmente soddisfare a $\mathfrak{P}_1z=f_1(xy)$, prendendo per z un polinomio e quindi una funzione regolare in tutto il piano.

Teorema di unicità. — Ciò posto, il noto ragionamento di DIRICHLET-RIEMANN che serve a stabilire il teorema di unicità per l'equazione $\Delta_2 u = 0$, serve facilmente a stabilirlo ancora in questo caso: a dimostrare cioè che *nel caso elementare esiste al più una soluzione la quale insieme colle sue derivate di ordine* $\leq n-1$ *si annulla al contorno.* Basterà mostrare perciò che non esiste una soluzione $\neq 0$ dell'equazione

$$\mathfrak{M}u \equiv \Sigma a_{i2n-i} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^i \, \partial y^{2n-i}} = 0 \tag{15}$$

che si annulli colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ su γ. Infatti, osserviamo che la forma binaria quadratica definita positiva $\Sigma a_{i2n-i}\, \alpha^i \beta^{2n-i}$ si può porre sotto la forma di somma di due quadrati

$$\sum_0^{2n} a_{i2n-i}\, \alpha^i \beta^{2n-i} = \left[\sum_0^n{}_i\, \delta_{in-i}\, \alpha^i \beta^{n-i}\right]^2 + \left[\sum_0^n{}_i\, \delta'_{in-i}\, \alpha^i \beta^{n-i}\right]^2, \tag{16}$$

le δ_{in-i}, δ'_{in-i} essendo costanti. Onde si avrà l'identità

$$\mathfrak{M}u \equiv \left(\sum_0^n{}_i\, \delta_{in-i} \frac{\partial^n}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}}\right)\left(\sum_0^n{}_i\, \delta_{in-i} \frac{\partial^n u}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}}\right) +$$
$$+ \left(\sum_0^n{}_i\, \delta'_{in-i} \frac{\partial^n}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}}\right)\left(\sum_0^n{}_i\, \delta'_{in-i} \frac{\partial^n u}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}}\right).$$

Se ora si considera l'integrale

$$\mathrm{J}u \equiv \int\!\!\int_{\mathrm{C}} \left[\left\{\sum_0^n{}_i\, \delta_{in-i} \frac{\partial^n u}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}}\right\}^2 + \left\{\sum_0^n{}_i\, \delta'_{in-i} \frac{\partial^n u}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}}\right\}^2\right] dx\, dy, \tag{17}$$

si ottiene facilmente coi soliti procedimenti di integrazione per parti l'identità

$$\mathrm{J}u \equiv \int_\gamma \mathfrak{L}u\, ds + (-1)^n \int\!\!\int_{\mathrm{C}} u\, \mathfrak{M}u\, dx\, dy, \tag{18}$$

dove $\mathfrak{L}u$ indica una forma bilineare nelle derivate della u tale che la somma degli ordini di derivazione in ogni termine è $2n-1$. In ogni termine di $\mathfrak{L}u$ esiste quindi una derivata almeno di ordine $\leq n-1$. Se quindi u è nulla su γ colle sue derivate di ordine $\leq n-1$, è $\mathfrak{L}u = 0$: e se è soluzione di (15), per (18) dovrà essere $\mathrm{J}u = 0$: e quindi per (17) dovrà aversi

$$\sum_0^n{}_i\, \delta_{in-i} \frac{\partial^n u}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}} = 0 \quad , \quad \sum_0^n{}_i\, \delta'_{in-i} \frac{\partial^n u}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}} = 0. \tag{19}$$

Ricordando che u è nulla insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini su γ, basta applicare il lemma precedente, prendendo una di queste equazioni (19) come equazione $\mathfrak{P}u = 0$ per conchiudere che è $u = 0$ in tutto C; c. d. d.

33. Prima di passare al teorema di esistenza conviene aggiungere qualche osservazione relativa alla formula (13) nel caso in cui come $\mathfrak{P}$ si prenda la $\mathfrak{M}$. Si avrà allora che $\mathfrak{P}_1$ coincide con $\mathfrak{M}$; quindi:

$$\int\int_C [z\,\mathfrak{M}z_1 - z_1\,\mathfrak{M}z]\,dx\,dy = \int_\gamma \mathfrak{K}(z\,;z_1)\,d\sigma\,; \tag{20}$$

ed essendo $\mathfrak{M}z$ omogenea, la $\mathfrak{K}(z\,;z_1)$ sarà essa pure omogenea; vogliamo dire che la somma degli ordini delle due derivate di z e di z_1 che compaiono in ciascuno dei termini di $\mathfrak{K}(z\,;z_1)$ è costante ed $= 2n-1$. Porremo quindi:

$$\mathfrak{K}(z\,;z_1) = \mathfrak{K}_{0\,2n-1}(z\,;z_1) + \mathfrak{K}_{1\,2n-2}(z\,;z_1) + \cdots + \mathfrak{K}_{2n-1\,0}(z\,;z_1), \tag{21}$$

dove $\mathfrak{K}_{i\,2n-i-1}(z\,;z_1)$ è un polinomio bilineare nelle derivate di ordine i di z e di ordine $2n-i-1$ di z_1. A $\mathfrak{K}(z\,;z_1)$ possiamo assegnare le forme più varie diversamente ordinando le integrazioni per parti che servono a dedurre la (20); per es.: per fissare le idee possiamo fare in modo che indicando con t_σ e n_σ le direzioni positive della tangente e della normale a γ in (σ), sia:

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_{i\,2n-i-1}(z(\sigma)\,;z_1(\sigma)) &= (-1)^i \frac{\partial^i z}{\partial x^i} \sum_0^{2n-i-1}{}_l\, a_{2n-l\,l} \frac{\partial^{2n-i-1} z_1}{\partial x^{2n-l-i-1}\,\partial y^l}\cos(n_\sigma x) + \\ &+ (-1)^i \frac{\partial^{2n-i-1} z_1}{\partial y^{2n-i-1}} \sum_0^{i}{}_l\, a_{l\,2n-l} \frac{\partial^i z}{\partial x^l\,\partial y^{i-l}}\cos(n_\sigma y) \;(^1).\end{aligned} \tag{22}$$

Trasformiamo questa espressione di $\mathfrak{K}_{i\,2n-i-1}(z\,;z_1)$ col sostituire alle derivate secondo x ed y le derivate secondo n_σ e t_σ: ciò che si fa mediante le formule:

$$\frac{\partial^j}{\partial x^{j_1}\,\partial y^{j_2}} = \left[\frac{\partial}{\partial t_\sigma}\cos(n_\sigma y) + \frac{\partial}{\partial n_\sigma}\cos(n_\sigma x)\right]^{j_1}\left[-\frac{\partial}{\partial t_\sigma}\cos(n_\sigma x) + \frac{\partial}{\partial n_\sigma}\cos(n_\sigma y)\right]^{j_2} \tag{23}$$

dove nel secondo membro le potenze ed i prodotti si debbono fare colle solite leggi simboliche:

$$\frac{\partial^h}{\partial t_\sigma^h}\frac{\partial^k}{\partial t_\sigma^k} = \frac{\partial^{h+k}}{\partial t_\sigma^{h+k}},\quad \frac{\partial^h}{\partial t_\sigma^h}\frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^k} = \frac{\partial^{h+k}}{\partial t_\sigma^h\,\partial n_\sigma^k},\ \text{ecc.}$$

La $\mathfrak{K}_{i\,2n-i-1}$ diverrà una espressione bilineare nelle

$$\frac{\partial^i z}{\partial t_\sigma^j\,\partial n_\sigma^{i-j}},\quad \frac{\partial^{2n-i-1} z_1}{\partial t_\sigma^j\,\partial n_\sigma^{2n-i-j-1}}\,.$$

(1) Si ottiene questa espressione partendo da $\int\int_C z\,\mathfrak{M}z_1 dx\,dy$ e delle i integrazioni per parti cui devesi assoggettare ciascun termine facendone quante più è possibile rapporto ad x e le residue rapporto ad y.

Avremo, eseguendo i calcoli

$$\mathfrak{K}_{i2n-i-1}(z(\sigma)\,;z_1(\sigma)) = (-1)^i\left[\Sigma a_{2n-l\,l}\cos^{2n-l}(n_\sigma x)\cos^l(n_\sigma y)\right]\frac{\partial^i z}{\partial n_\sigma^i}\frac{\partial^{2n-i-1}z_1}{\partial n_\sigma^{2n-i-1}}+\cdots= \tag{24}$$
$$=(-1)^i\zeta(\sigma)\frac{\partial^i z}{\partial n_\sigma^i}\frac{\partial^{2n-i-1}z_1}{\partial n_\sigma^{2n-i-1}}+\cdots$$

dove nei termini tralasciati una almeno delle due derivate contiene una derivazione rapporto a t_σ. Risulta da (24) ricordando che la forma (16) è definita positiva, che la $\zeta(\sigma)$ e cioè il coefficiente di $\frac{\partial^i z}{\partial n_\sigma^i}\frac{\partial^{2n-i-1}z_1}{\partial n_\sigma^{2n-i-1}}$ è sempre diversa da 0.

Conviene notare il significato delle derivate rapporto a t_σ ed n_σ qui introdotte. Esse sono legate colle derivate rapporto all'arco σ dalle formule:

$$\frac{\partial}{\partial t_\sigma}=\frac{\partial}{\partial\sigma} \qquad \frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^{k-1}\partial t_\sigma}=\frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^{k-1}\partial\sigma},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_\sigma^2}=\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}-\frac{d^2y}{d\sigma^2}\frac{1}{\frac{dx}{d\sigma}}\frac{\partial}{\partial n_\sigma} \qquad \frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^{k-2}\partial t_\sigma^2}=\frac{\partial^k}{\partial n_\sigma^{k-2}\partial\sigma^2}-\frac{d^2y}{d\sigma^2}\frac{1}{\frac{dx}{d\sigma}}\frac{\partial^{k-1}}{\partial n_\sigma^{k-1}}$$

. . . .

E quindi le derivate rapporto a t_σ differiscono da quelle rapporto a σ per derivate di ordine inferiore. Onde si ha che appunto come avviene per le derivate rapporto all'arco σ, assegnati sopra la curva γ i valori delle derivate di ordine $\leq k-1$ di una funzione, saranno pure noti i valori delle derivate di ordine k che contengono una derivazione almeno rapporto a t_σ, mentre restano pienamente arbitrarî i valori delle derivate di ordine k fatte rapporto ad n_σ soltanto.

34. Riprendiamo ora lo studio del teorema di esistenza. Consideriamo la funzione

$$u(xy)=\int\!\!\int_C\left[\psi(xy\,;x_1y_1)+g(xy\,;x_1y_1)\right]\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1. \tag{25}$$

Nel nostro caso per la (12) del n. 31 e la (10) del n. 14, si avrà che la u, oltre ad annullarsi sul contorno γ insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, ammette le derivate di ordine $2n$ tosto che $\varphi(xy)$ ha le derivate prime finite, ed è tale che

$$\mathfrak{M}u(xy)=\varphi(xy)+\int\!\!\int_C h(xy\,;x_1y_1)\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1, \tag{26}$$

onde, affinchè essa sia soluzione dell'equazione

$$\mathfrak{M}u=f(xy), \tag{27}$$

occorre che $\varphi(xy)$ sia soluzione dell'equazione integrale

$$\varphi(xy)+\int\!\!\int_C h(xy\,;x_1y_1)\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1dy_1=f(xy). \tag{28}$$

Ed inversamente se (28) è risolubile, e se $f(xy)$ ha le derivate prime, anche la $\varphi(xy)$ ha le derivate prime, e la $u(xy)$ data da (25) è realmente soluzione di (27). Cosicchè se l'equazione (28) ha determinante $\neq 0$, essa avrà sempre soluzione ed il teorema di esistenza sarà dimostrato.

Ma l'equazione (28) può avere determinante nullo; però come abbiamo notato al Cap. I, ciò può dipendere benissimo da una inopportuna scelta della funzione compensatrice $g(xy\,;x_1y_1)$. Si tratta di mostrare che si può sempre modificarla per modo di giungere ad un'equazione integrale con determinante diverso da 0.

35. Se la (28) ha determinante nullo esisteranno m funzioni eccezionali in (x_1y_1) ed m in (xy) finite e continue in C e su γ, linearmente indipendenti: chiamiamo $\pi_1(xy), \pi_2(xy), \ldots, \pi_m(xy)$ le prime, $\varrho_1(xy), \varrho_2(xy), \ldots, \varrho_m(xy)$ le seconde: le $\pi_i(xy)$ saranno soluzioni dell'equazione:

$$\pi(x_1y_1) + \int\!\!\int_C h(xy\,;x_1y_1)\,\pi(xy)\,dx\,dy = 0\,, \tag{29}$$

le altre della

$$\varrho(xy) + \int\!\!\int_C h(xy\,;x_1y_1)\,\varrho(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = 0.$$

Notiamo che le $\pi(x_1y_1)$ soluzioni di (29) ammettono necessariamente tutte le derivate rapporto ad x_1y_1 dei primi $2n$ ordini finite e continue in C e su γ. Infatti, basta rammentare che grazie ai risultati del n. 31 la $h(xy\,;x_1y_1)$ ammette le derivate rapporto ad x_1y_1 dei primi $2n$ ordini.

Ciò posto consideriamo m funzioni $v_1(xy), v_2(xy), \ldots, v_m(xy)$, funzioni finite e continue insieme colle loro derivate dei primi $2n+1$ ordini in C e su γ, nulle su γ insieme colle loro derivate dei primi $n-1$ ordini, che del resto per ora lasciamo indeterminate. La funzione:

$$g(xy\,;x_1y_1) + \sum_1^m{}_i\, v_i(xy)\,\varrho_i(x_1y_1)$$

soddisfa ancora alle proprietà della funzione compensatrice: onde ancora la funzione:

$$u(xy) = \int\!\!\int_C \left[\psi(xy\,;x_1y_1) + g(xy\,;x_1y_1) + \sum_1^m{}_i\, v_i(xy)\,\varrho_i(x_1y_1)\right]\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 \tag{30}$$

sarà nulla su γ colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ e perchè soddisfi a (27) occorre che la $\varphi(xy)$ ammetta le derivate prime finite e continue e sia soluzione dell'equazione

$$\varphi(xy) + \int\!\!\int_C \left[h(xy\,;x_1y_1) + \sum_1^m{}_i\, \mathfrak{M}v_i(xy)\,\varrho_i(x_1y_1)\right]\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = f(xy)\,; \tag{31}$$

ora noi sappiamo che basterà scegliere le $v_i(xy)$ per modo che il determinante formato collo

$$\varkappa_{ij} = \iint_C \mathfrak{M} v_i(xy) \,.\, \pi_j(xy)\, dx\, dy$$

sia diverso da zero per mostrare che l'equazione (31) ha soluzione (1).

E come al n. 6 basterà perciò provare che presa una qualunque combinazione lineare $\pi(xy)$ delle $\pi_i(xy)$ e cioè una qualunque funzione eccezionale in $(x_1 y_1)$ di (28), diversa da zero, è sempre possibile trovare una $v(xy)$ nulla su γ colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ tale che:

$$\varkappa = \iint_C \mathfrak{M} v(xy) \,.\, \pi(xy)\, dx\, dy \neq 0\,. \tag{32}$$

Infatti, siccome le $\pi(xy)$ hanno tutte le derivate dei primi $2n$ ordini si può applicare la (20): e ricordando che la $v(xy)$ è nulla su γ insieme colle sue derivate di ordine $\leq n-1$ sarà:

$$\mathfrak{K}_{n\,n-1}(\pi\,,\,v) = \mathfrak{K}_{n+1\,n-2}(\pi\,,\,v) = \cdots = \mathfrak{K}_{2n-1\,0}(\pi\,,\,v) = 0\,.$$

Onde si otterrà:

$$\begin{aligned}\varkappa = & \iint_C v(xy)\, \mathfrak{M}\pi(xy)\, dx\, dy\, + \\ & + \int_\gamma [\mathfrak{K}_{0\,2n-1}(\pi\,,v) + \mathfrak{K}_{1\,2n-2}(\pi\,,\,v) + \cdots + \mathfrak{K}_{n-1\,n}(\pi\,,\,v)]\, d\sigma\,.\end{aligned} \tag{33}$$

Affinchè sia $\varkappa = 0$ qualunque sia $v(xy)$ occorrerà quindi che separatamente si annullino sempre l'integrale di area e l'integrale curvilineo di (33). Ma perchè l'integrale di area sia sempre nullo occorre che sia:

$$0 = \mathfrak{M}\pi(xy)\,. \tag{34}$$

Passiamo ad esaminare quali condizioni si richiedono perchè sia nullo l'integrale curvilineo. Siccome la $v(xy)$ deve soddisfare alla sola condizione di essere nulla sul contorno insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, restano ancora arbitrarî i valori delle $\frac{\partial^n v(\sigma)}{\partial n_\sigma^n}, \frac{\partial^{n+1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n+1}}, \ldots, \frac{\partial^{2n-1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-1}}$. Fissiamo che debba essere

$$\frac{\partial^n v(\sigma)}{\partial n_\sigma^n} = \frac{\partial^{n+1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n+1}} = \cdots = \frac{\partial^{2n-2} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-2}} = 0\,.$$

Sarà per (24):

$$\mathfrak{K}_{n-1\,n}(\pi\,,\,v) = \mathfrak{K}_{n-2\,n+1}(\pi\,,\,v) = \cdots = \mathfrak{K}_{1\,2n-2}(\pi\,,\,v) = 0$$

$$\mathfrak{K}_{0\,2n-1}(\pi\,,\,v) = \zeta(\sigma)\,\pi(\sigma)\,\frac{\partial^{2n-1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-1}}\,.$$

(1) Poichè il determinante delle $k_{ij} = \iint_C \varrho_i(xy)\,\varrho_j(xy)\, dx\, dy$ è certo $\neq 0$ (cfr. n. 6 pp. 11-13).

Onde poichè $\zeta(\sigma) \neq 0$ e $\dfrac{\partial^{2n-1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-1}}$ è completamente arbitraria, affinchè si abbia $x = 0$ e cioè

$$0 = \int_\gamma [\mathfrak{K}_{0\,2n-1}(\pi, v) + \cdots + \mathfrak{K}_{n-1\,n}(\pi, v)]\, d\sigma = \int_\gamma \zeta(\sigma)\, \pi(\sigma) \frac{\partial^{2n-1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-1}}\, d\sigma\,,$$

dovrà essere:

$$\pi(\sigma) = 0\,. \tag{35}$$

Sarà allora identicamente qualunque sia v

$$\mathfrak{K}_{0\,2n-1}(\pi, v) = 0\,. \tag{36}$$

Poniamo ora quale v una funzione per cui sia:

$$\frac{\partial^n v(\sigma)}{\partial n_\sigma^n} = \frac{\partial^{n+1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n+1}} = \cdots = \frac{\partial^{2n-3} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-3}} = 0\,.$$

Per queste ipotesi e per (36) e (35) sarà:

$$\mathfrak{K}_{n-1\,n}(\pi, v) = \mathfrak{K}_{n-2\,n+1}(\pi, v) = \cdots = \mathfrak{K}_{2,2n-3}(\pi, v) = 0 \qquad \mathfrak{K}_{0\,2n-1}(\pi, v) = 0$$

$$\mathfrak{K}_{1,2n-2}(\pi, v) = \zeta(\sigma) \frac{\partial \pi(\sigma)}{\partial n_\sigma} \frac{\partial^{2n-2} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-2}}\,;$$

e perchè $\dfrac{\partial^{2n-2} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-2}}$ è arbitraria, affinchè sia sempre $x = 0$ dovrà essere:

$$\frac{\partial \pi(\sigma)}{\partial n_\sigma} = 0\,. \tag{37}$$

E così procedendo si dimostra che perchè sia sempre $x = 0$ la $\pi(xy)$ dovrà soddisfare alla (34) ed alle

$$\pi(\sigma) = \frac{\partial \pi(\sigma)}{\partial n_\sigma} = \cdots = \frac{\partial^{n-1} \pi(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n-1}} = 0 \tag{38}$$

ossia dovrà su γ annullarsi colle sue derivate di ordine $\leq n - 1$. Pel teorema di unicità dimostrato nel n. 32, segue che dovrà essere $\pi(xy) = 0$, il che è contro l'ipotesi fatta sopra che fosse $\pi(xy)$ diversa da zero.

È quindi dimostrato completamente il teorema di esistenza nel caso elementare.

§ IX.

Il caso generale.

36. Analoghi, ma alquanto più complessi, a quelli del § precedente sono i ragionamenti che ci serviranno nel caso generale; e d'altra parte i risultati, come già fu previsto nell'Introduzione, non saranno, nè potranno essere così limpidi come nel caso elementare, poichè esistono realmente casi in cui i teoremi di esistenza e di unicità vengono a mancare.

Consideriamo dunque la solita equazione

(1) $$\mathfrak{E}u \equiv \mathfrak{M}u + \mathfrak{N}u + f(xy) = 0\,;$$

e cerchiamo una soluzione di essa finita e continua in C colle sue derivate dei primi $2n$ ordini, nulla su γ colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini.

Riservandoci di determinare con maggior precisione di quanto si fece al n. 30 la funzione compensatrice, noi potremo cercare di porre la funzione cercata nella forma (19) del n. 30:

(2) $$u(xy) = \iint_C [\psi(xy\,;x_1y_1) + g(xy\,;x_1y_1)]\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1\,.$$

Se si suppone che $\varphi(xy)$ abbia all'interno di C derivate prime finite (non limitate) e continue, per i risultati del n. 30 si vede che $u(xy)$ soddisfa a tutte le proprietà relative al comportamento delle derivate in C e su γ richieste sopra: e l'esprimere che essa soddisfa a (1) si tradurrà nel chiedere che la $\varphi(xy)$ soddisfaccia all'equazione integrale del tipo di Fredholm:

(3) $$\varphi(xy) + \iint \chi(xy\,;x_1y_1)\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 + f(xy) = 0$$

dove si è posto

(4) $$\begin{aligned}\chi(xy\,;x_1y_1) = k(xy\,;x_1y_1) &+ \sum_{0\le i+k\le n-1} b_{ik}(xy)\,\frac{\partial^{i+k}\psi(xy\,;x_1y_1)}{\partial x^i\,\partial y^k} +\\ &+ h(xy\,;x_1y_1) + \sum_{0\le i+k\le n-1} b_{ik}(xy)\,\frac{\partial^{i+k}g(xy\,;x_1y_1)}{\partial x^i\,\partial y^k}\,.\end{aligned}$$

Occorre dunque esaminare se la $\chi(xy\,;x_1y_1)$ è tale che ad essa si possa applicare la teoria di Fredholm, se l'equazione (3) ammette soluzione qualunque sia $f(xy)$, ed infine, se, almeno quando si ammette come si disse al n. 10 che $f(xy)$ abbia entro C le derivate prime, finite e continue, anche la $\varphi(xy)$ soluzione di (3) soddisfaccia alle stesse condizioni.

37. Facile è vedere che alla (3) si può applicare la teoria di Fredholm e che la soluzione di essa, se esiste, ha le derivate prime.

La funzione $\chi(xy\,;x_1y_1)$ data da (4) è finita e continua in tutto C e su γ tranne che nei punti $(xy)\equiv(x_1y_1)$ in cui diviene infinita di 1° ordine se il punto è interno a C, diviene infinita di ordine $< 1+\beta$ dove β è un numero positivo arbitrario piccolo a piacere se (xy) è su γ. All'equazione (3) si può quindi applicare la teoria di Fredholm pel caso delle funzioni caratteristiche con punti singolari; anzi noi sappiamo che, se da essa si passa col noto ragionamento a quella in cui la funzione caratteristica è la seconda funzione iterata, si giunge ad un'equazione equivalente a (3) con funzione caratteristica ovunque finita.

Ma v'è di più: se noi rammentiamo che all'interno di C le $b_{ik}(xy)$ hanno tutte almeno le derivate prime, la $g(xy\,;x_1y_1)$ ha le derivate $(2n+1)^{esime}$ finite e continue anche per $(xy)\equiv(x_1y_1)$, noi vediamo che all'interno di C la singolarità delle derivate di $\chi(xy\,;x_1y_1)$ proviene solo dalle singolarità di $k(xy\,;x_1y_1)$ e delle derivate $(2n-1)$ e $(2n-2)^{esime}$ di $\psi(xy\,;x_1y_1)$; onde segue che la $\chi(xy\,;x_1y_1)$ e la funzione di ugual nome studiata nel numero 15 della mia citata Memoria dei Rendiconti di Palermo, e le loro derivate hanno le medesime singolarità: quindi, ragionando come in quel lavoro risulterà evidente che la funzione terza iterata della funzione $\chi(xy\,;x_1y_1)$ ammetterà le derivate prime rapporto ad (xy) finite (non limitate) e continue all'interno di C.

Indicando quindi con $\overline{\chi}(xy\,;x_1y_1)$ tale funzione iterata avremo che se $\varphi(xy)$ soddisfa all'equazione (3), essa soddisfa pure alle

$$\varphi(xy)-\int\!\!\int_C \overline{\chi}(xy\,;x_1y_1)\,\varphi(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1+\overline{f}(xy)=0 \tag{6}$$

dove è

$$\begin{aligned}\overline{f}(xy)\equiv f(xy)-\int\!\!\int_C \chi(xy\,;x_1y_1)\,f(x_1y_1)\,dx\,dy\,+\\ +\int\!\!\int_C \chi(xy\,;x_1y_1)\,dx_1\,dy_1\int\!\!\int_C \chi(x_1y_1\,;x_2y_2)\,f(x_2y_2)\,dx_2\,dy_2\,-\\ -\int\!\!\int_C \chi(xy\,;x_1y_1)\,dx_1\,dy_1\int\!\!\int_C \chi(x_1y_1\,;x_2y_2)\,dx_2\,dy_2\int\!\!\int_C \chi(x_2y_2\,;x_3y_3)\,f(x_3y_3)\,dx_3\,dy_3\,.\end{aligned} \tag{7}$$

E poichè se $f(xy)$ ha le derivate prime all'interno di C, da (7) risulta (cfr. i ragionamenti della mia citata Memoria) che le ammette pure $\overline{f}(xy)$, noi potremo conchiudere da (6) che ogni soluzione $\varphi(xy)$ di un'equazione del tipo (3) in cui $f(xy)$ abbia le derivate prime finite e continue all'interno di C, ha essa pure le stesse derivate finite e continue all'interno di C.

38. Ma quanto invece costituisce la difficoltà del problema, è che realmente può accadere che l'equazione (3) o (6) non sia sempre risolubile, ma abbia invece determinante nullo.

Ammettiamo ora, come si disse al n. 10 che le funzioni $b_{ik}(xy)$ che compaiono in $\mathfrak{A}$ abbiano le derivate di ordine $\leq i+k+1$ finite, e continue in C su γ; esisterà l'equazione aggiunta della (1); indichiamo con $\mathfrak{T}u \equiv \mathfrak{M}u + \mathfrak{N}_1 u$ il primo membro di tale equazione aggiunta. Noi proveremo ora che *se per l'equazione*

$$\mathfrak{T}u = 0 \tag{8}$$

vale il teorema di unicità relativo al campo C — se cioè non esiste alcuna soluzione di (8) nulla su γ colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, finita e continua in C colle sue derivate dei primi $2n$ ordini — *si può sempre alterare la funzione compensatrice* $g(xy\,;x_1y_1)$ *per modo che la* (3) — o la (6) — *abbia soluzione qualunque sia* $f(xy)$; *in altri termini vale il teorema di esistenza per la* (1). Sostituiremo più tardi (n. 40) l'ipotesi che valga il teorema di unicità per la (8) con quella che valga il teorema di unicità per la stessa (1).

Infatti, ove l'equazione (3) — o (6) — avesse determinante nullo, esisterebbe un certo numero m di funzioni eccezionali in x_1y_1 linearmente indipendenti, ed m pure ne esisterebbero in xy; siano le prime $\pi_1(x_1y_1)\,, \pi_2(x_1y_1)\,, \ldots, \pi_m(x_1y_1)$, le seconde $\varrho_1(xy)\,, \varrho_2(xy)\,, \ldots, \varrho_m(xy)$: e si avrà:

$$\pi_i(x_1y_1) + \iint_C \chi(xy\,;x_1y_1)\,\pi_i(xy)\,dx\,dy \quad = 0 \tag{9}$$

$$\varrho_i(xy) \quad + \iint_C \chi(xy\,;x_1y_1)\,\varrho_i(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1 = 0\,. \tag{10}$$

Dimostreremo nel § III dell'Appendice che le soluzioni di un'equazione omogenea del tipo (9) hanno necessariamente le derivate dei primi $2n$ ordini finite e continue il contorno incluso: ammettiamolo per ora.

Allora come al n. 35 noi sostituiremo alla funzione $g(xy\,;x_1y_1)$ una nuova funzione

$$g(xy\,;x_1y_1) + \sum_1^m v_i(xy)\,\varrho_i(x_1y_1) \tag{11}$$

$v_i(xy)$ essendo funzioni finite e continue colle loro derivate dei primi $2n+1$ ordini in C, nulle colle derivate dei primi $n-1$ ordini su γ. Se le v_i sono determinate per modo che il determinante che ha per elementi

$$\varkappa_{ij} = \iint_C \mathfrak{E}\,v_i(xy)\,\pi_j(xy)\,dx\,dy \tag{12}$$

sia diverso da zero, l'equazione integrale che si deduce prendendo la (11) come funzione compensatrice, sarà sempre risolubile.

E ancora per dimostrare che le $v_i(xy)$ si possono prendere in modo che il determinante formato con (12) sia diverso da zero, basta dimostrare che, assegnata una qualunque combinazione lineare $\pi(xy)$ di $\pi_1(xy)\,, \ldots, \pi_m(xy)$, si può sempre trovare una $v(xy)$ tale che non sia

$$\iint_C \mathfrak{E}\,v(xy)\,.\,\pi(xy)\,dx\,dy = 0\,. \tag{13}$$

Il ragionamento per dimostrare che la (13) non può essere sempre soddisfatta è assolutamente identico a quello del n. 35.

Come là osserveremo che si ha la formula generale:

(14) $$\iint_C [z\mathfrak{G}z_1 - z_1\mathfrak{D}z]\,dx\,dy = \int_\gamma \mathfrak{K}(z\,;z_1)\,d\sigma$$

dove è

(15) $$\mathfrak{K}(z\,;z_1) = \sum_{0 \leq i+j \leq 2n-1} \mathfrak{K}_{i,j}(z\,;z_1)$$

$\mathfrak{K}_{i,j}$ essendo un'espressione bilineare nelle derivate di ordine i di z, j di z_1. È da notare che le $\mathfrak{K}_{i\,2n-i-1}$ coincidono con quelle del n. 33 e quindi ad esse si può assegnare la forma (22) o (24).

Applichiamo (14) a trasformare il primo membro di (13). Poichè le derivate di ordine $\leq n-1$ di $v(xy)$ sono per ipotesi nulle su γ si avrà

(16) $$\iint_C \mathfrak{G}v(xy)\,.\,\pi(xy)\,dx\,dy = \iint_C v(xy)\,.\,\mathfrak{D}\pi(xy)\,dx\,dy + \\ + \sum_n^{2n-1}{}_j \sum_0^{2n-j-1}{}_i \int_\gamma \mathfrak{K}_{ij}(\pi\,;v)\,d\sigma\,.$$

Perchè questa espressione sia sempre nulla qualunque sia $v(xy)$ (purchè nulla colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini su γ) occorrerà al solito che siano nulli separatamente l'integrale di superficie e la somma degli integrali d'area. La prima domanda importa che sia

(17) $$\mathfrak{D}\pi(xy) = 0\,.$$

Quanto alla seconda osserviamo che in particolare deve essere

$$\sum_n^{2n-1}{}_j \sum_0^{2n-j-1}{}_i \int_\gamma \mathfrak{K}_{ij}(z\,;z_1)\,d\sigma = 0$$

quando sia

$$\frac{\partial^n v(\sigma)}{\partial n_\sigma^n} = \frac{\partial^{n+1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n+1}} = \cdots = \frac{\partial^{2n-2} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-2}} = 0\,.$$

Ma in tal caso l'unico integrale curvilineo non identicamente nullo è

$$\int_\gamma \mathfrak{K}_{0,2n-1}(\pi\,;v)\,d\sigma = 0$$

e ciò porta come al n. 35 (formula (35)) che deve essere identicamente

(18) $$\pi(\sigma) = 0\,;$$

con ciò avremo pure sempre $\mathfrak{K}_{0,j}(\pi\,;v) = 0$, onde sarà

(19) $$\sum_n^{2n-1}{}_j \sum_0^{2n-i-1}{}_i \int_\gamma \mathfrak{K}_{ij}(\pi\,;v)\,d\sigma = \sum_n^{2n-2}{}_j \sum_1^{2n-j-1}{}_i \int_\gamma \mathfrak{K}_{ij}(\pi\,;v)\,d\sigma\,.$$

Osserviamo che siccome questa quantità deve pure essere nulla quando si prenda v per modo che

$$\frac{\partial^n v(\sigma)}{\partial n_\sigma^n} = \frac{\partial^{n+1} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n+1}} = \cdots = \frac{\partial^{2n-3} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-3}} = 0$$

e poichè nel secondo membro di (19) l'unica $\mathfrak{K}_{ij}$ avente l'indice $j \geqq 2n-2$ è $\mathfrak{K}_{1,2n-2}(\pi\,;\sigma)$, si trarrà che deve essere $\int_\gamma \mathfrak{K}_{1,2n-2}(\pi\,;v)\,d\sigma = 0$ qualunque sia $\frac{\partial^{2n-2} v(\sigma)}{\partial n_\sigma^{2n-2}}$; e quindi sarà identicamente

$$\frac{\partial \pi(\sigma)}{\partial n_\sigma} = 0\,. \tag{20}$$

Così proseguendo si dimostra infine che $\pi(xy)$ oltre alla (17) deve soddisfare alle $\pi(\sigma) = \frac{\partial \pi(\sigma)}{\partial n_\sigma} = \cdots = \frac{\partial^{n-1} \pi(\sigma)}{\partial n_\sigma^{n-1}} = 0$; e quindi per l'ipotesi che per (8) valga il teorema di unicità dovrà essere identicamente in C

$$\pi(xy) = 0\,;$$

il che è contro l'ipotesi che le π_i fossero linearmente indipendenti.

39. Non è però privo di interesse alla precedente dimostrazione fare seguire alcune considerazioni che, mentre per alcuni casi possono costituire una nuova dimostrazione del teorema di esistenza, servono anche nel caso ora trattato a completare l'enunciato.

Premettiamo l'osservazione seguente. Se per un'equazione arbitraria $\mathfrak{E}u = 0$ sappiamo — per una qualunque ragione — che vale il teorema di esistenza, data un'arbitraria funzione compensatrice $g(xy\,;x_1y_1)$ per cui l'equazione (3) o (6) abbia determinante nullo, noi possiamo sempre modificarla coll'aggiungere una somma di termini del tipo $\Sigma v_i(xy)\,\varrho_i(x_1y_1)$ per modo che la nuova equazione (3) o (6) corrispondente alla nuova funzione compensatrice abbia determinante non nullo. Invero si prendano come precedentemente per le $\varrho_i(xy)$ le soluzioni eccezionali in (xy) linearmente indipendenti della primitiva equazione integrale: indicate poi come sempre con $\pi_i(xy)$ le funzioni eccezionali di (x_1y_1) della primitiva equazione integrale, si fissino delle funzioni $t_i(xy)$ derivabili tali che il determinante formato colle

$$x_{ij} = \int\!\!\int_C t_i(xy)\,\pi_j(xy)\,dx\,dy$$

sia $\neq 0$ (ciò che sarà sempre possibile prendendo ad es. $t_i(xy) = \pi_i(xy)$); infine si prendano quali funzioni $v_i(xy)$ quelle che si annullano colle loro derivate dei primi $n-1$ ordini su γ e soddisfanno in C all'equazione $\mathfrak{E}v_i(xy) = t_i(xy)$: tali funzioni $v_i(xy)$ esisteranno certamente per il supposto teorema di esistenza. La nuova equazione integrale che si otterrà contiene in più nella funzione caratteristica la somma

$\Sigma_i \mathfrak{E} v_i(xy)\, \varrho_i(x_1y_1) = \Sigma t_i(xy)\, \varrho_i(x_1y_1)$, e per l'ipotesi fatta sulle $t_i(xy)$ avrà certo determinante $\neq 0$.

Ciò posto, consideriamo in generale una famiglia di equazioni

$$
(21) \qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{E}_\lambda u &\equiv \mathfrak{M}_\lambda u + \mathfrak{N}_\lambda u + f(xy) = 0 \\
\mathfrak{M}_\lambda u &\equiv \sum_{1}^{2n} a_{i\,2n-i}(xy|\lambda)\, \frac{\partial^{2n}}{\partial x_i\, \partial y^{2n-i}} \\
\mathfrak{N}_\lambda u &\equiv \sum_{0 \leq i+k \leq 2n-1} b_{ik}(xy|\lambda)\, \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i\, \partial y^k}
\end{aligned}
$$

i cui coefficienti dipendono analiticamente da un parametro λ quando λ varia ad es. in un certo campo contenente il segmento $0 \ldots 1$; e godono pel resto delle proprietà dette al § IV. Supponiamo che per questi valori di λ la (21) rappresenti sempre una equazione totalmente ellittica, tale che le radici $\alpha_i(xy|\lambda)$ dell'equazione

$$
\sum_{0}^{2n}{}_i\, a_{i\,2n-i}(xy|\lambda)\, \alpha^i = 0
$$

siano a due a due coniugate, sempre complesse, distinte e finite. In altri termini supponiamo che le condizioni del § IV valgano per tutte le equazioni che corrispondono ai varî valori di λ. Per le $b_{ik}(xy)$ potremo per il momento tenerci alla più stretta ipotesi che ammettano solo le derivate prime finite e continue all'interno di C.

Di più *si supponga che la* (21) *per un valore di* λ *ad es. per* $\lambda = 0$ *si riduca ad un'equazione per cui risulti provato il teorema di esistenza*, sia ciò coi metodi dei numeri precedenti, sia per qualunque altra via.

Vogliamo studiare i teoremi di esistenza e di unicità per le equazioni della famiglia (21); e cioè se per i varî valori di λ esiste ed è unica la funzione che si annulla colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini su γ, ammette le derivate dei primi $2n$ ordini in C e soddisfa all'equazione (21).

Se noi riprendiamo la costruzione della funzione $\psi(xy\,;x_1y_1)$, della $e(xy\,;x_1y_1)$, della $e_1(xy\,;x_1y_1)$ e della $g(xy\,;x_1y_1)$ che abbiamo date nei § V e VII e consideriamo le corrispondenti funzioni $\psi(xy\,;x_1y_1|\lambda)$, $e(xy\,;x_1y_1|\lambda)$, $e_1(xy\,;x_1y_1|\lambda)$, $g(xy\,;x_1y_1|\lambda)$, relative all'equazione (7), noi vediamo subito che la funzione $\psi(xy\,;x_1y_1|\lambda)$ e le sue derivate dei primi $2n+1$ ordini sono per $(xy) \not\equiv (x_1y_1)$ funzioni analitiche regolari per tutti i valori di λ compresi fra 0 ed 1; che del pari la funzione $e(xy\,;x_1y_1\,\lambda)$ e le sue derivate sono funzioni analitiche regolari per i valori di λ compresi nell'intervallo $0 \ldots 1$ tranne al più quando è $(xy) \equiv (x_1y_1) \equiv (\sigma)$; ed infine costruendo la $e_1(xy\,;x_1y_1\,\lambda)$ come è indicato nel § I dell'Appendice si può fare in modo che anche la $e_1(xy\,;x_1y_1|\lambda)$ e quindi pure la $g(xy\,;x_1y_1|\lambda)$ sia una funzione analitica regolare di λ quando non è $(xy) \equiv (x_1y_1) \equiv (\sigma)$. È da notare che la $e(xy\,;x_1y_1|\lambda)$, e quindi la $g(xy; x_1y_1|\lambda)$, si può alterare per una funzione nulla al contorno colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini finita e continua insieme colle sue derivate dei primi $2n$ ordini anche su γ, indipendente da λ senza che cessi di godere delle proprietà sopra notate; e che usufruendo di tale arbitrarietà noi possiamo fare in modo che $g(xy\,;x_1y_1|0)$ sia precisamente una di quelle funzioni per cui grazie all'ipotesi che per $\lambda=0$ valga il teorema di esistenza, pur ora abbiamo visto che l'equazione integrale (3) o (6) ha determinante non nullo.

Onde infine noi potremo dire che tranne nei punti $(xy)\equiv(x_1y_1)$ la funzione $\psi(xy\,;x_1y_1|\lambda)+g(xy\,;x_1y_1|\lambda)$ è funzione analitica regolare di λ. E posto:

$$u(xy|\lambda)=\int\!\!\int_C[\psi(xy\,;x_1y_1|\lambda)+g(xy\,;x_1y_1|\lambda)]\,\varphi(x_1y_1|\lambda)\,dx_1\,dy_1$$

dove $\varphi(xy|\lambda)$ ammette le derivate prime finite e continue entro C, questa funzione soddisfa al solito alle condizioni imposte relative al comportamento delle derivate; e perchè soddisfaccia a (21) basterà che la $\varphi(xy|\lambda)$ oltre ad avere le derivate prime finite e continue entro C sia soluzione della:

$$\varphi(xy|\lambda)+\int\!\!\int_C\chi(xy\,;x_1y_1|\lambda)\,\varphi(x_1y_1|\lambda)\,dx_1\,dy_1=f(xy), \tag{22}$$

dove si è posto

$$\chi(xy\,;x_1y_1|\lambda)=k(xy\,;x_1y_1|\lambda)+\sum_{0\le i+k\le 2n-1}b_{ik}(xy|\lambda)\frac{\partial^{i+k}\psi(xy\,;x_1y_1|\lambda)}{\partial x^i\,\partial y^k}+$$
$$+h(xy\,;x_1y_1|\lambda)+\sum_{0\le i+k\le 2n-1}b_{ik}(xy|\lambda)\frac{\partial^{i+k}g(xy\,;x_1y_1|\lambda)}{\partial x^i\,\partial y^k}.$$

E poichè accanto a questa equazione si può considerare l'analoga di (6)

$$\begin{gathered}\varphi(xy|\lambda)+\int\!\!\int_C\overline{\chi}(xy\,;x_1y_1|\lambda)\,\varphi(x_1y_1|\lambda)\,dx_1\,dy_1=\overline{f}(xy|\lambda),\\ \left(\overline{f}(xy|\lambda)=f(xy)-\int\!\!\int_C\chi(xy\,;x_1y_1|\lambda)f(x_1y_1)\,dx_1\,dy_1+\cdots\right)\end{gathered} \tag{23}$$

se la $\varphi(xy|\lambda)$ è soluzione di (22) o (23), essa ha certo le derivate prime e la $u(xy|\lambda)$ soddisfa certo a (21). Cosicchè resta solo da esaminare se la soluzione di (23) o (23) esiste.

Può il determinante $D(\lambda)$ di (23) essere nullo oppure no: certo però esso sarà diverso da zero per valori generici di λ: infatti per $\lambda=0$ esso è certo $\neq 0$ per l'ipotesi fatta in principio, e d'altro canto esso è come la $\overline{\chi}(xy\,;x_1y_1|\lambda)$ funzione analitica regolare di λ in tutti i punti dell'intervallo $0\ldots1$. Onde gli zeri di λ, quando λ è compreso fra 0 ed 1 non possono essere che isolati, ed isolati quindi i valori per cui l'equazione (22) o (23) non ha sempre soluzione. Onde intanto risulta dimostrato che in queste nostre ipotesi *per valori generici di* λ — e cioè per tutti i valori di λ per cui $D(\lambda)\neq 0$ — *esiste sempre una soluzione dell'equazione totalmente ellittica* (21) *di ordine* $2n$, *che al contorno* γ *di un campo assegnato* C *prenda valori dati insieme colle sue derivate dei primi* $n-1$ *ordini.*

Ma, possiamo dire di più e dimostrare *che se in un qualunque modo per un valore di* λ *si è provato che per la* (21) — e non come nei numeri precedenti per l'aggiunta di essa — *vale il teorema di unicità, vale anche il teorema di esistenza.*

Useremo perciò di un ragionamento dovuto al FREDHOLM [1]. Osserviamo che la soluzione dell'equazione (22) è della forma:

$$\varphi(xy|\lambda) = \frac{\varphi_1(xy|\lambda)}{D(\lambda)}, \tag{24}$$

dove $\varphi_1(xy|\lambda)$ e $D(\lambda)$ sono regolari analitiche per tutti i valori di λ dell'intervallo $0 \ldots 1$. E corrispondentemente $u(xy|\lambda)$ ha la forma:

$$\begin{gathered} u(xy|\lambda) = \frac{u_1(xy|\lambda)}{D(\lambda)} \\ u_1(xy|\lambda) = \int\int_C [\psi(xy\,;x_1y_1|\lambda) + g(xy\,;x_1y_1|\lambda)]\,\varphi_1(x_1y_1|\lambda)\,dx_1\,dy_1\,, \end{gathered} \tag{25}$$

dove $u_1(xy|\lambda)$ è ancora una funzione analitica di λ, regolare nei punti dell'intervallo $0 \ldots 1$. Essa si annulla colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini su γ e soddisfa all'equazione:

$$\mathfrak{S}_\lambda u_1 = D(\lambda)\, f(xy). \tag{26}$$

Per dimostrare il nostro assunto noi mostreremo ora che se λ_1 è uno zero di ordine m di $D(\lambda)$, ma vale il teorema di unicità, necessariamente $u_1(xy|\lambda)$ ha in λ_1 uno zero pure di ordine m almeno: cosicchè si può porre:

$$\begin{gathered} u_1(xy|\lambda) = u_1^*(xy|\lambda)\,(\lambda - \lambda_1)^m \\ D(\lambda) = D^*(\lambda)\,(\lambda - \lambda_1)^m \qquad\qquad D^*(\lambda_1) \neq 0 \end{gathered} \tag{27}$$

e la funzione:

$$u(xy|\lambda) = \frac{u_1(xy|\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{u_1^*(xy|\lambda)}{D^*(\lambda)} \tag{28}$$

è regolare anche per $\lambda = \lambda_1$, e risolve il problema primitivo.

Infatti se $u_1(xy|\lambda)$ avesse in λ_1 uno zero di ordine $m_1 < m$ si potrebbe porre:

$$u_1(xy|\lambda) = \overline{u}_1(xy|\lambda)\,(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, \tag{29}$$

ma per (26) $\overline{u}_1(xy|\lambda)$ è una funzione nulla al contorno γ colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, soluzione dell'equazione:

$$\mathfrak{S}_\lambda \overline{u}_1 = \frac{D(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}}\, f(xy) = D^*(\lambda)\,(\lambda - \lambda_1)^{m-m_1} f(xy)$$

[1] FREDHOLM, *Solution d'un problème fondamental* etc. Archiv for Matematik Astronomi och Fysik. Bd I, n. 28. Vedi pure LAURICELLA, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^4 v = 0$. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 1907, 2° sem.

e quindi per $\lambda = \lambda_1$ è $\bar{u}_1(xy|\lambda_1)$ soluzione dell'equazione

(30) $$\mathfrak{E}_{\lambda_1}\bar{u}_1(xy|\lambda_1) = 0$$

perchè si suppone $m_1 < m$. E quindi, poichè supponiamo che per l'equazione (30), valga il teorema di unicità sarà identicamente qualunque sia xy, $\bar{u}_1(xy|\lambda_1) = 0$ il che è contro l'ipotesi che $u(xy|\lambda)$ avesse in λ_1 uno zero di ordine m_1 soltanto. In altri termini, $u_1(xy|\lambda)$ non può avere in λ_1 uno zero di ordine $m_1 < m$.

Il teorema di esistenza è così pienamente dimostrato.

40. Possiamo fare alcune applicazioni di questi ragionamenti. In primo luogo i risultati del numero precedente ci permettono di perfezionare il teorema del n. 38. Consideriamo al solito l'equazione

$$\mathfrak{E}u \equiv \mathfrak{M}u + \mathfrak{N}u + f(xy) = 0$$

e, sopposto che le b_{ik} abbiano le derivate di ordine $i+k+1$, la sua aggiunta

$$\mathfrak{T}u \equiv \mathfrak{M}u + \mathfrak{N}_1 u + f(xy) = 0.$$

E si assuma come famiglia delle equazioni (21) la famiglia

(31) $$\mathfrak{E}_\lambda u \equiv \mathfrak{M}u + (1-\lambda)\mathfrak{N}u + \lambda\mathfrak{N}_1 + f(xy).$$

Tutte queste equazioni hanno sempre le stesse caratteristiche e quindi le condizioni del numero precedente relative a queste sono di certo soddisfatte. Di più per $\lambda = 0$ si riottiene la $\mathfrak{E}u = 0$, per $\lambda = 1$ la $\mathfrak{T}u = 0$.

Supponiamo che per la $\mathfrak{E}u = 0$ valga il teorema di unicità, allora per i risultati del n. 38 per la $\mathfrak{T}u = 0$ vale il teorema di esistenza. Ma allora per il teorema del numero precedente anche per $\mathfrak{E}u = 0$ che appartiene con $\mathfrak{T}u = 0$ ad una stessa famiglia del tipo (21) e per cui vale il teorema di unicità, vale pure il teorema di esistenza.

Inversamente supponiamo che per la $\mathfrak{E}u = 0$ valga il teorema di esistenza allora per la $\mathfrak{T}u = 0$ vale il teorema di unicità (¹). Ma allora per il numero precedente vale ancora il teorema di esistenza per $\mathfrak{T}u = 0$, quindi, infine (²), anche il teorema di unicità per $\mathfrak{E}u = 0$.

Onde possiamo conchiudere: *per un'equazione, che oltre a soddisfare le solite condizioni sia tale che le $b_{ik}(xy)$ abbiano le derivate di ordine $i+k+1$, i teoremi di esistenza e di unicità sono sempre contemporaneamente veri, e se valgono per un'equazione valgono pure per la sua aggiunta.*

In secondo luogo insisterò sul fatto che le considerazioni del n. 39 costituiscono una *nuova dimostrazione che il teorema di esistenza è vero quando è vero il teorema di unicità* (non dell'inverso (³)) per ampie classi di equazioni. E che quando

(¹) Se per un'equazione vale il teorema d'esistenza, la formula di Green ci dice che vale per l'equazione aggiunta il teorema di unicità. Cfr. la mia Memoria citata dei Rendiconti del Circolo di Palermo, n. 3.

(²) Poichè la relazione di aggiunzione è involutoria

(³) Non dell'inverso perchè sopra essa risulta per noi dalla considerazione dell'aggiunta, che non sempre è possibile fare ad es. quando non esistano le derivate di ordine $i+k$ della b_{ik}.

ciò sia possibile tale nuova dimostrazione presenta dei vantaggi sulla precedente, sia in quanto non richiede che le $b_{ik}(xy)$ abbiano le derivate dei primi $i+k+1$ ordini in C e su γ, ma solo le derivate di primo ordine all'interno di C, sia in quanto mostra che si può dire che è eccezionale il caso in cui vengano a mancare per un dato campo i teoremi di esistenza ed i teoremi di unicità. E per applicare tale dimostrazione basterà poter trovare una famiglia del tipo (21) cui l'equazione appartenga insieme con una per cui già si sappia valere il teorema di esistenza: e ad es. ciò sarà evidentemente possibile tosto che si supponga che le caratteristiche siano fisse e cioè le radici α_i costanti, oppure che tutte le quantità $q_i(xy) \pm q_k(xy)$ oppure tutte le $p_i(xy) \pm p_k(xy)$ siano diverse da zero in tutto C [1].

§ X.

Estensione dei risultati precedenti alle equazioni a caratteristiche multiple.

41. Abbiamo fin qui trattato del caso in cui le radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ siano tutte semplici. Poche modificazioni occorre fare quando si presenti il caso in cui queste radici non siano tutte semplici. Noi supporremo, come già dicemmo nel § IV, che esse sieno in tutto C di multiplicità costante. E chiameremo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu}$ le radici distinte, supponendo che α_{2i-1} ed α_{2i} siano complesse coniugate e quindi di multiplicità h_i comune. Sarà $h_1 + h_2 + \cdots + h_\nu = n$. Ancora supporremo che la α_{2i-1} abbia il coefficiente dell'immaginario $>$ di 0.

[1] Se ad es. si suppone $q_i(xy) \pm q_k(xy) > \mu_1$ e si ha come sempre $|q_i(xy)| > \mu$, si fissino delle costanti $\bar\alpha_{2i-1} = \bar p_i + i\bar q$, $\bar\alpha_{2i} = \bar p_i - i\bar q$, $\bar q$ essendo una costante positiva $< \mu$ indipendente da i, e le $\bar p_i$ essendo tutte diverse. Si ponga poi $\alpha_i(xy|\lambda) = \bar\alpha_i + \lambda\,[\alpha_i(xy) - \bar\alpha_i]$; per λ compreso fra 0 ed 1 le $\alpha_i(xy|\lambda)$ sono funzioni finite e continue in C colle loro derivate dei primi $n+1$ ordini, sempre complesse, a due a due coniugate, e distinte perchè per $\lambda = 0$ è $|\alpha_i(xy|0) - \alpha_k(xy|0)| = |\bar\alpha_i - \bar\alpha_k| \neq 0$ e per $\lambda \neq 0$ si ha $|\alpha_i(xy|\lambda) - \alpha_k(xy|\lambda)| > \lambda |q_{i_1}(xy) - q_{k_1}(xy)| > \lambda\mu_1 > 0$, dove i_1 e k_1 indicano rispettivamente il massimo intero contenuto in $\dfrac{i+1}{2}$ e $\dfrac{k+1}{2}$.

Se quindi si pone $\Sigma a_{i\,2n-i}(xy|\lambda)\,\alpha^i = \prod_1^{2n}{}_k\,(\alpha - \alpha_k(xy|\lambda))$ e

$$\mathfrak{M}_\lambda u = \Sigma a_{i\,2n-i}(xy|\lambda) \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^i \, \partial y^{2n-i}}$$

la famiglia di equazioni

$$\mathfrak{E}_\lambda u \equiv \mathfrak{M}_\lambda(u) + \lambda \mathfrak{N} u + f(xy) = 0$$

sarà una famiglia del tipo (26) che per $\lambda = 0$ dà un'equazione del caso elementare, per $\lambda = 1$ la equazione primitiva.

Come funzione $\psi(xy\,;x_1y_1)$ prenderemo la funzione [1]

$$\psi(xy\,;x_1y_1)=$$

$$(1)\quad =i\sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{h_i}{}_k\,[d_{2i-1k}(xy)\,\varsigma_{2i-1}^{2n-k-1}(xy\,;x_1y_1)\,\varsigma_{2i}^{k-1}(xy\,;x_1y_1)\log\varsigma_{2i-1}(xy\,;x_1y_1)-$$
$$-\,d_{2ik}(xy)\,\varsigma_{2i}^{2n-k-1}(xy\,;x_1y_1)\,\varsigma_{2i-1}^{k-1}(xy\,;x_1y_1)\log\varsigma_{2i}(xy\,;x_1y_1)]$$

dove i coefficienti d sono tali che si abbia identicamente:

$$(2)\quad \sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{h_i}{}_k\,[d_{2i-1k}(xy)\,\varsigma_{2i-1}^{2n-k-1}(xy\,;x_1y_1)\,\varsigma_{2i}^{k-1}(xy\,;x_1y_1)+$$
$$+\,d_{2ik}(xy)\,\varsigma_{2i}^{2n-k-1}(xy\,;x_1y_1)\,\varsigma_{2i-1}^{k-1}(xy\,;x_1y_1)]=0\,.$$

Questa funzione gode di tutte le proprietà della $\psi(xy\,;x_1y_1)$.

Quanto alla costruzione della funzione compensatrice si vede chiaramente, riprendendo i ragionamenti del § VII, che basta costrurre una nuova funzione $\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)$ la quale goda delle due proprietà indicate al n. 27; poichè le residue deduzioni tutte si fondano sopra queste proprietà.

Porremo perciò

$$(3)\quad \Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)=\sum_1^{\nu}{}_m\sum_1^{h_m}{}_k\,[\lambda^{(j)}_{2m-1k}(\sigma)\,\varsigma_{2m-1}^{n-k-1}(xy\,;\sigma)\,\varsigma_{2m}^{k-1}(xy\,;\sigma)\log\varsigma_{2m-1}(xy\,;\sigma)+$$
$$+\,\lambda^{(j)}_{2mk}(\sigma)\,\varsigma_{2m}^{n-k-1}(xy\,;\sigma)\,\varsigma_{2m-1}^{k-1}(xy\,;\sigma)\log\varsigma_{2m}(xy\,;\sigma)]\,,$$

dove i coefficienti $\lambda^{(j)}_{2m-1k}$ e $\lambda^{(j)}_{2mk}$ sono da determinarsi convenientemente.

Come per la $\psi(xy\,;x_1y_1)$ sopra definita si vede immediatamente che i termini di massima singolarità delle derivate di $\Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)$ rapporto ad xy si ottengono derivando $\Omega^{(j)}$ come se le α fossero costanti. E conseguentemente, osservando che le quantità $\varsigma_{2m-1}^{n-k-1}\cdot\varsigma_{2m}^{k-1}\cdot\log\varsigma_{2m-1}$ e le analoghe che si ottengono scambiando $2m$ con $2m-1$, sono, per $k\leq h_m$ e per α_{2m-1} e α_{2m} costanti, delle soluzioni dell'equazione $\mathfrak{M}u=0$, segue che formando la espressione $\mathfrak{M}\Omega^{(j)}$ sempre scompaiono i termini di massima singolarità qualunque siano i coefficienti λ; onde intanto $\mathfrak{M}\Omega^{(j)}$ soddisfa alla prima delle proprietà del n. 26.

Per fare in modo che risulti soddisfatta la seconda, bisognerà calcolare in modo conveniente le λ. Calcoliamo perciò le derivate di ordine $n-1$ di $\Omega^{(j)}$, o meglio i loro termini di massima singolarità, e cioè, ripetiamo, le derivate di ordine $n-1$ di $\Omega^{(j)}$ fatte considerando le α come costanti. In questa ipotesi si ha

$$(4)\quad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&\sim\frac{\partial}{\partial\varsigma_{2m-1}}\,\alpha_{2m-1}+\frac{\partial}{\partial\varsigma_{2m}}\,\alpha_{2m}\\ \frac{\partial}{\partial y}&\sim\frac{\partial}{\partial\varsigma_{2m-1}}+\frac{\partial}{\partial\varsigma_{2m}}\,,\end{aligned}$$

dove il segno $\sim$ indica che i due membri sono uguali quando si considerino le α come costanti.

[1] Cfr. loc. cit. Rendic. di Palermo, n. 13, form. (13)'.

Indichiamo con $\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l;\,l)}(\alpha\beta)$ il coefficiente di $\zeta_1^{\mu+\nu-l}\zeta_2^l$ nello sviluppo di:

$$(\alpha\zeta_1+\beta\zeta_2)^\mu\,(\zeta_1+\zeta_2)^\nu\,;$$

avremo evidentemente:

$$\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l,\,l)}(\alpha\beta)=\binom{\mu}{l}\binom{\nu}{0}\alpha^{\mu-l}\beta^l+\binom{\mu}{l-1}\binom{\nu}{1}\alpha^{\mu-l+1}\beta^{l-1}+\cdots+\binom{\mu}{0}\binom{\nu}{l}\alpha^\mu \tag{5}$$

dove per valore di $\binom{h}{k}$ deve prendersi il solito coefficiente binomiale se $k\leq h$, e lo zero se $k>h$.

Con questa notazione dalla formula (4) segue la formula generale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}&\sim\left(\frac{\partial}{\partial\mathfrak{S}_{2m-1}}\alpha_{2m-1}+\frac{\partial}{\partial\mathfrak{S}_{2m}}\alpha_{2m}\right)^{n-i}\left(\frac{\partial}{\partial\mathfrak{S}_{2m-1}}+\frac{\partial}{\partial\mathfrak{S}_{2m}}\right)^{i-1}=\\&=\sum_{l=0}^{l=n-1}\mathfrak{A}_{n-i,\,i-1}^{(l,\,n-1-l)}(\alpha_{2m-1}\,,\,\alpha_{2m})\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial\mathfrak{S}_{2m-1}^l\,\partial\mathfrak{S}_{2m}^{n-1-l}}\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Applicando questa formula alla funzione:

$$\mathfrak{S}_{2m-1}^{n-k-1}(xy\,;\sigma)\,\mathfrak{S}_{2m}^{k-1}(xy\,;\sigma)\log\mathfrak{S}_{2m-1}(xy\,;\sigma)\,;$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\left(\mathfrak{S}_{2m-1}^{n-k-1}\,\mathfrak{S}_{2m}^{k-1}\log\mathfrak{S}_{2m-1}\right)\sim\\&\qquad\sim\sum_{l=0}^{l=n-1}\mathfrak{A}_{n-i,\,i-1}^{(l,\,n-1-l)}(\alpha_{2m-1}\,,\,\alpha_{2m})\,\frac{\partial^{n-1}\left(\mathfrak{S}_{2m-1}^{n-k-1}\,\mathfrak{S}_{2m}^{k-1}\log\mathfrak{S}_{2m-1}\right)}{\partial\mathfrak{S}_{2m-1}^l\,\partial\mathfrak{S}_{2m}^{n-1-l}}=\\&=(n-k-1)!\,(k-1)!\sum_{l=n-k}^{l=n-1}(-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}_{n-i,\,i-1}^{(l,\,n-1-l)}(\alpha_{2m-1}\,,\,\alpha_{2m})\left(\frac{\mathfrak{S}_{2m}}{\mathfrak{S}_{2m-1}}\right)^{k-n+l}\frac{1}{\mathfrak{S}_{2m-1}}\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Cosicchè si avrà:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n-1}\Omega^{(j)}}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}&\sim\sum_1^\nu{}_m\sum_1^{h_m}{}_k\,(n-k-1)!\,(k-1)!\,\times\\\times\Bigg[\lambda_{2m-1k}^{(j)}(\sigma)&\sum_{l=n-k}^{l=n-1}(-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}_{n-i,\,i-1}^{(l,\,n-1-l)}(\alpha_{2m-1}(xy)\,,\,\alpha_{2m}(xy))\left(\frac{\mathfrak{S}_{2m}}{\mathfrak{S}_{2m-1}}\right)^{k-n+l}\frac{1}{\mathfrak{S}_{2m-1}}+\\+\lambda_{2mk}^{(j)}(\sigma)&\sum_{l=n-k}^{l=n-1}(-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}_{n-i,\,i-1}^{(l,\,n-1-l)}(\alpha_{2m}(xy)\,,\,\alpha_{2m-1}(xy))\left(\frac{\mathfrak{S}_{2m-1}}{\mathfrak{S}_{2m}}\right)^{k-n+l}\frac{1}{\mathfrak{S}_{2m}}\Bigg]\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Osserviamo ora che il rapporto $\frac{\mathfrak{S}_{2m-1}}{\mathfrak{S}_{2m}}$ è una funzione di xy e σ sempre finita e continua e derivabile anche quando xy viene in σ in virtù della disuguaglianza (3) del § V.

Cosicchè, se si considera l'integrale:

$$\Phi_j(xy) = \int_\gamma \Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma,$$

dove $\varphi_j(\sigma)$ è una funzione che soddisfa alle solite limitazioni (17) e (18) del § VII; ragionando come al n. 26 otterremo per (8)

$$\left[\frac{\partial^{n-1}\Phi_j(xy)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)} =$$

(9)
$$\begin{aligned}
&= \pi i\varphi_j(s)\left\{\sum_1^{\nu}{}_m \sum_1^{h_m}{}_k (n-k-1)!\,(k-1)!\,\times\right.\\
&\times\left[-\lambda^{(j)}_{2m-1k}(s)\sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m-1}(s),\alpha_{2m}(s))\,\frac{\tau^{k-n+l}_{2m}(s\,;s)}{\tau^{k-n+l+1}_{2m-1}(s\,;s)}+\right.\\
&\left.\left.+\lambda^{(j)}_{2mk}(s)\sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n-k}\,\mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m}(s),\alpha_{2m-1}(s))\,\frac{\tau^{k-n+l}_{2m-1}(s\,;s)}{\tau^{k-n+l+1}_{2m}(s\,;s)}\right]\right\}+\\
&+\frac{\pi}{\gamma}\int_\gamma \operatorname{cotg}\frac{\pi}{\gamma}(s-\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma\left\{\sum_1^{\nu}{}_m \sum_1^{h_m}{}_k (n-k-1)!\,(k-1)!\,\times\right.\\
&\times\left[\lambda^{(j)}_{2m-1k}(s)\sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m-1}(s),\alpha_{2m}(s))\,\frac{\tau^{k-n+l}_{2m}(s\,;s)}{\tau^{k-n+l+1}_{2m-1}(s\,;s)}+\right.\\
&\left.\left.+\lambda^{(j)}_{2mk}(s)\sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m}(s),\alpha_{2m-1}(s))\,\frac{\tau^{k-n+l}_{2m-1}(s\,:s)}{\tau^{k-n+l+1}_{2m}(s\,;s)}\right]\right\}\times\\
&+\int_\gamma \Delta_{ji}(s\,;\sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,d\sigma,
\end{aligned}$$

dove $\Delta_{ji}(s\,;\sigma)$ rappresenta una funzione che per $(s)\equiv(\sigma)$ ha al più una singolarità logaritmica.

Perchè la formula (9) risulti del tipo della formula (7) del n. 26 (pag. 46), occorre quindi e basta che le funzioni λ siano determinate per modo che risultino soddisfatte le $2n$ equazioni lineari:

(10)
$$\begin{aligned}
&\sum_1^{\nu}{}_m \sum_1^{h_m}{}_k (n-k-1)!\,(k-1)!\,\times\\
&\qquad\times\left[-\lambda^{(j)}_{2m-1k}\sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})\,\frac{\tau^{k-n+l}_{2m}}{\tau^{k-n+l+1}_{2m-1}}+\right.\\
&\qquad\left.+\lambda^{(j)}_{2mk}\sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,l-1}(\alpha_{2m},\alpha_{2m-1})\,\frac{\tau^{k-n+l}_{2m-1}}{\tau^{k-n+l+1}_{2m}}\right]=\frac{\varepsilon_{ij}}{\pi i}\\
&\sum_1^{\nu}{}_m \sum_1^{h_m}{}_k (n-k-1)!\,(k-i)!\,\times\\
&\qquad\times\left[\lambda^{(j)}_{2m-1k}\sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})\,\frac{\tau^{k-n+l}_{2m}}{t^{k-n+l+1}_{2m-1}}+\right.\\
&\qquad\left.+\lambda^{(j)}_{2mk}\sum_{n-k}^{n-1}{}_l (-1)^{l-n+k}\,\mathfrak{A}^{(l,n-1-l)}_{n-i,i-1}(\alpha_{2m},\alpha_{2m-1})\,\frac{\tau^{k-n+l}_{2m-1}}{\tau^{k-n+l+1}_{2m}}\right]=0
\end{aligned}$$

$$(i=1,2,\ldots,n),$$

dove per brevità si pose λ, α, τ, invece di $\lambda(s)$, $\alpha(s)$, $\tau(s;s)$. Basterà quindi provare che le (10) ammettono soluzione. Od anche che il loro determinante è diverso da zero.

Come al n. 26 si vede subito che il determinante delle (10) è, a meno del segno e di una potenza di 2, uguale al prodotto del determinante che ha per elementi

$$\sum_{n-k}^{n-1}{}_l \,(-1)^{l-n+k}\, \mathfrak{A}_{n-i,\,i-1}^{(l,\,n-1-l)}(\alpha_{2m-1}, \alpha_{2m})\, \frac{\tau_{2m}^{k-n+l}}{\tau_{2m-1}^{k-n+l+1}} \tag{11}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, \nu,\ k = 1, 2, \ldots, h_m; \qquad i = 1, 2, \ldots, n)$$

per il determinante coniugato. Immagineremo che pei termini di una stessa colonna i abbia valore costante, nei termini di una medesima riga abbiano valore costante m e k. Per un dato valore di m, aggiungiamo alla riga corrispondente a $k = \varkappa$ quella corrispondente a $k = \varkappa - 1$ moltiplicata $\dfrac{\tau_{2m}}{\tau_{2m-1}}$: il determinante formato cogli elementi (11) risulterà uguale, a meno del segno, a quello la cui $(h_1 + h_2 + \cdots$ $\cdots + h_{m-1} + k)^{esima}$ riga è formata cogli elementi:

$$\mathfrak{A}_{n-i,\,i-1}^{(n-k,\,k-1)}(\alpha_{2m-1}, \alpha_{2m})\, \frac{1}{\tau_{2m-1}}\,; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ossia il nostro determinante è a meno del fattore $\prod_m \dfrac{1}{\tau_{2m-1}^{h_m}}$ uguale al determinante la cui $(h_1 + h_2 + \cdots + h_{m-1} + k)^{esima}$ riga è:

$$\mathfrak{A}_{n-i,\,i-1}^{(n-k,\,k-1)}(\alpha_{2m-1}, \alpha_{2m}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Per calcolare quest'ultimo determinante dobbiamo premettere una formula relativa alle $\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l,\,l)}(\alpha, \beta)$. Osserviamo che si ha:

$$\frac{\mu+\nu-l+1}{l}\binom{\mu}{l-i-1}\binom{\nu}{i} = \frac{l-i}{l}\binom{\mu}{l-i}\binom{\nu}{i} + \frac{i+1}{l}\binom{\mu}{l-i-1}\binom{\nu}{i+1}.$$

Si deduce da (5) cambiando l in $l - 1$

$$\frac{\mu+\nu-l+1}{l}\,\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l+1,\,l-1)}(\alpha, \beta) = \left[\binom{\mu}{l}\binom{\nu}{0} + \frac{1}{l}\binom{\mu}{l-1}\binom{\nu}{1}\right]\alpha^{\mu-l+1}\beta^{l-1} +$$

$$+\left[\frac{l-1}{l}\binom{\mu}{l-1}\binom{\nu}{1} + \frac{2}{l}\binom{\mu}{l-2}\binom{\nu}{2}\right]\alpha^{n+l+2}\beta^{l-2} +$$

$$\cdots + \left[\frac{1}{l}\binom{\mu}{l}\binom{\nu}{l-1} + \binom{\mu}{0}\binom{\nu}{l}\right]\alpha^{\mu}.$$

E quindi confrontando con $\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l,l)}$ dato da (5):

$$\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l,l)}(\alpha,\beta)-\frac{\mu+\nu-l+1}{l}\cdot\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l+1,l-1)}(\alpha,\beta)=$$

$$=\left[\binom{\mu}{l}\binom{\nu}{0}\alpha^{\mu-l}\beta^{l-1}+\frac{l-1}{l}\binom{\mu}{l-1}\binom{\nu}{1}\alpha^{\mu-l+1}\beta^{l-2}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{l}\binom{\mu}{1}\binom{\nu}{l-1}\alpha^{\mu-1}\right](\beta-\alpha)=$$

$$=\frac{\mu}{l}\left[\binom{\mu-1}{l-1}\binom{\nu}{0}\alpha^{\mu-l}\beta^{l-1}+\binom{\mu-1}{l-2}\binom{\nu}{1}\alpha^{\mu-l+1}\beta^{l-2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\binom{\mu-1}{0}\binom{\nu}{l-1}\alpha^{\mu-1}\right](\beta-\alpha).$$

Ma la parte fra parentesi non è che $\mathfrak{A}_{\mu-1,\nu}^{(\mu+\nu-l,l-1)}(\alpha,\beta)$ onde si deduce la formula ricorrente:

$$\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l,l)}(\alpha,\beta)-\frac{\mu+\nu-l+1}{l}\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(\mu+\nu-l+1,l-1)}(\alpha,\beta)=$$

$$(13)\qquad =\frac{\mu}{l}(\beta-\alpha)\,\mathfrak{A}_{\mu-1,\nu}^{(\mu+\nu-l,l-1)}(\alpha,\beta).$$

Applichiamo questa formula al calcolo del determinante formato cogli elementi (12). Togliamo per ogni dato valore di m dalla riga corrispondente a $k=\varkappa>1$ quella corrispondente a $k=\varkappa-1$ moltiplicata per $\dfrac{n-\varkappa+1}{\varkappa-1}$ per (13) otterremo così che il determinante formato cogli elementi (12) è uguale a quello le cui righe di posto $(h_1+h_2+\cdots+h_{m-1}+k)^{esimo}$ per $k>1$ è

$$(14)\qquad \frac{n-i}{k-1}\,\mathfrak{A}_{n-i-1,i-1}^{(n-k,k-2)}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})\,[\alpha_{2m}-\alpha_{2m-1}]$$

e per $k=1$ è

$$(a_1)\qquad \mathfrak{A}_{n-i,i-1}^{(n-1,0)}=\alpha_{2m-1}^{n-i}.$$

E tale determinante è uguale a meno del fattore $\prod_m\dfrac{1}{(h_m-1)!}[\alpha_{2m}-\alpha_{2m-1}]^{h_m-1}$ (dove m percorre i numeri da 1 a ν per cui $h_m\geq 2$) al determinante di cui le righe di posto $h_1+h_2+\cdots+h_{m-1}+k$ per $k>1$ è:

$$(15)\qquad (n-i)\,\mathfrak{A}_{n-i-1,i-1}^{(n-k,k-2)}(\alpha_{2m-1},\alpha_{2m})$$

mentre le righe di posto $h_1+h_2+\cdots+h_{m-1}+1$ sono ancora date da (a_1).

Procediamo sulla riga (15) come precedentemente usando dell' identità (13): otterremo ancora che il nuovo determinante è a meno del fattore

$$\prod_m \frac{1}{(h_m-2)!}\left[\alpha_{2m}-\alpha_{2m-1}\right]^{h_m-2}$$

(dove m percorre i numeri da 1 a ν per cui $h_m \geqq 3$) è uguale a quello le cui righe di posto $h_1+h_2+\cdots+h_{m-1}+1$ sono le (a_1) quelle di posto $h_1+h_2+\cdots+h_{m-1}+2$ sono le:

$$(a_2) \qquad (n-i)\,\mathfrak{A}^{(n-2,0)}_{n-i-1,\,i-1}(\alpha_{2m-1}\,,\,\alpha_{2m}) = (n-i)\,\alpha_{2m-1}^{n-i-1}$$

quelle di posto $h_1+h_2+\cdots+h_{m-1}+k$ per $k>2$ sono le

$$(16) \qquad (n-i)\,(n-i-1)\,\mathfrak{A}^{(n-k,\,k-3)}_{n-i-2,\,i-1}(\alpha_{2m-1}\,,\,\alpha_{2m})\,.$$

Così procedendo si ottiene che il determinante che studiamo è a meno di un fattore diverso da zero uguale a quello in cui la riga di posto $h_1+h_2+\cdots+h_{m-1}+k$ è data da:

$$(a_k) \qquad \begin{aligned}&(n-i)\,(n-i-1)\ldots(n-i-k+1)\,\mathfrak{A}^{(n-k,\,0)}_{n-i-k,\,i-1}(\alpha_{2m-1}\,,\,\alpha_{2m}) =\\ &\qquad = (n-i)\,(n-i-1)\ldots(n-i+k+1)\,\alpha_{2m-1}^{n-i-k+1}\,.\end{aligned}$$

E cioè al determinante:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \ldots\ldots & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ (n-1)\,\alpha_1^{n-2} & (n-2)\,\alpha_1^{n-3} & \ldots\ldots & 2\alpha_1 & 1 & 0 \\ (n-1)\,(n-2)\,\alpha_1^{n-3} & (n-2)\,(n-3)\,\alpha_1^{n-4} & \ldots\ldots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_3^{n-1} & \alpha_3^{n-2} & \ldots\ldots & \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\,.$$

Ora questo determinante non è che il determinante dei coefficienti del sistema di equazioni lineari nelle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, le quali esprimono che l'equazione:

$$x^n + \xi_1 x^{n-1} + \cdots + \xi_{n-1} x + \xi_n = 0$$

ha come radici $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2\nu-1}$ colle rispettive moltiplicità $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$; e quindi è diverso da zero.

Onde anche il sistema (10) è risolubile, e si possono determinare le $\lambda^{(\beta)}$ per modo che $\Omega^{(\beta)}(xy\,;\sigma)$ soddisfaccia pure alla seconda delle proprietà del n. 26. Stabilito questo punto i residui ragionamenti non differiscono da quelli dei precedenti paragrafi.

CONCLUSIONE.

§ XI.

42. Chiudiamo i nostri studî con alcune considerazioni riassuntive.

In quanto precede dobbiamo distinguere il metodo ed i risultati. Io credo fermamente che il metodo qui esposto debba costituire la base vera su cui si potranno edificare le dimostrazioni dei più generali teoremi di esistenza. Di esso abbiamo già parlato a lungo nell'Introduzione, ed abbiamo spiegato come la semplificazione introdotta dall'idea di costruire la funzione compensatrice consista essenzialmente nello spezzare il problema in due gradi: nel primo dei quali si chiede di soddisfare esattamente alle condizioni al contorno, e solo approssimativamente — in quanto riguarda, diremo così, le parti di massima singolarità — all'equazione proposta, nel secondo mediante l'uso della teoria delle equazioni integrali si fa in modo di soddisfare esattamente all'equazione proposta.

Certo il punto più delicato di questo procedimento consiste nella costruzione della funzione compensatrice. E dico delicato, e non complicato; perchè se le lunghe discussioni su certe forme di integrali, e sui loro limiti, e sulle disuguaglianze cui soddisfanno, in cui sopra ci siamo diffusi, possono parere al lettore alquanto intricate, pure esse non dipendono che da alcuni teoremi sulla derivabilità degli integrali, che hanno comportamento analogo a quelli della teoria del potenziale, teoremi che, pur non esistendo nella letteratura matematica colle loro precise ed ampie condizioni di applicabilità, entreranno certo presto a far parte del nostro patrimonio scientifico, e sono presenti alla mente di chiunque abbia riflettuto appunto sulla natura degli integrali che compaiono nella teoria del potenziale e del problema di DIRICHLET. Valga a giustificare la mia presunzione delle semplificazioni possibili, il ricordare quanto di recente abbia semplificati i calcoli relativi alle equazioni iperboliche in tre o più variabili, l'introduzione, dovuta ai sigg. HADAMARD e D'ADHÉMAR, del concetto di *parte finita* di un integrale.

Del procedimento seguìto nel costruire la funzione compensatrice ho già discorso al n. 7 (§ II, pp. 13 e seg.). Possiamo qui aggiungere qualche osservazione. Noi dovevamo costruire una funzione che prendesse insieme colle sue derivate fino ad un certo ordine, gli stessi valori della soluzione fondamentale dell'equazione data, e nei termini di massima singolarità soddisfacesse all'equazione. Ma nel § I dell'Appendice noi diamo un metodo generale — cui ci siamo sovente riferiti nel corso del lavoro — per costruire funzioni che prendano insieme colle loro derivate valori dati al contorno e non abbiano mai singolarità più complicate di quelle dei valori assegnati al contorno medesimo: e questo ci ha permesso ancora una volta di scindere il problema della funzione compensatrice in due gradi. Nel primo grado abbiamo costrutto una prima funzione che solo approssimatamente soddisfa alle condizioni al contorno: vogliamo dire tale che la differenza tra i valori assegnati per la funzione compensatrice o per le sue derivate e quelli che prende questa prima funzione sono regolari od almeno affetti da singolarità inferiore a quelle dei valori assegnati. Cosicchè se teniamo conto che le singolarità di cui sono affetti i valori assegnati per la funzione compensatrice e per le sue derivate sono isolate, questo primo problema risulta essere in certo modo un problema locale; relativo al comportamento nell'intorno di un sol punto invece che in un campo di dimensione finita assegnato. Nel secondo grado coi metodi del § I dell'Appendice, abbiamo corretto la funzione compensatrice in modo che venisse a soddisfare esattamente alle condizioni al contorno.

Cosicchè la difficoltà è ancora ridotta ulteriormente alla costruzione della prima funzione soltanto, per quanto riguarda il secondo grado essendo i metodi da noi dati assolutamente generali. Per il primo grado, se il risultato del nostro lavoro ci pare mostri il valore della semplificazione operata, tuttavia non possiamo dire di essere riusciti ad indicare sicuramente la via che conduce alla soluzione più generale di esso. Ci basterà osservare che, come in sostanza è fatto nel nostro lavoro, la costruzione di una tale funzione è possibile per i contorni più generali quando si sappia eseguirla per una famiglia di curve (o superficie) tale che esista una curva (superficie) della famiglia passante per un punto arbitrario del campo considerato, e che ivi abbia un contatto di ordine sufficientemente elevato (dipendente dall'ordine dell'equazione che si studia) con una superficie arbitraria assegnata [1]. Ma, ripetiamo, vi è ancora in questo punto qualcosa di non ben precisato nel determinare come si dovrà procedere per ottenere la massima generalità possibile.

43. Quanto ai risultati essi si riferiscono alle sole equazioni lineari totalmente ellittiche in due variabili, e consistono sostanzialmente in questi due enunciati:

1°. Per un dato campo e per una data equazione valgono contemporaneamente i teoremi di unicità e di esistenza: ed in tal caso valgono pure per l'equazione aggiunta.

2°. Se si ha una famiglia di equazioni per una delle quali si sappia che per un dato campo vale il teorema di esistenza, per l'equazione generica della famiglia vale pure il teorema di esistenza.

Questi due teoremi sono dedotti nell'ipotesi che le equazioni rappresentatrici della curva contorno abbiano le derivate dei primi $2n+1$ ordini, ed in ipotesi più o meno ampie relative alle funzioni che compaiono come coefficienti dell'equazione: pel primo abbiamo supposto che per ognuna di queste funzioni esistessero e fossero finite e continue le derivate il cui ordine supera di un'unità l'ordine della derivata di cui essa è coefficiente; pel secondo, mantenuta questa ipotesi per i coefficienti delle derivate di ordine $2n$, si restrinsero le ipotesi per gli altri coefficienti, supponendo per questi l'esistenza delle sole derivate prime finite e continue all'interno del campo

[1] E questo ci permette di dire senz'altro che, a parte le difficoltà dei particolari delle dimostrazioni, i nostri metodi si possono certo applicare alle equazioni di secondo ordine in più variabili (in cui i termini di secondo ordine non si possono ridurre sempre, come nel caso di due variabili con una trasformazione di coordinate alla forma $\varrho \Delta_2 u$), al sistema di equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici, alle equazioni paraboliche di secondo ordine ecc. ecc. Ricorderò che per una maggiore estensione ci mancano ancora altri elementi essenziali della ricerca: così per le equazioni di ordine > 2 ed in più di tre variabili non è a mia conoscenza che sia stata dimostrata l'esistenza di una soluzione fondamentale.

che si considera. Infine quanto ai dati al contorno si suppose essenzialmente che esistesse una funzione di due variabili finita e continua ed avente all'interno del campo le derivate di ordine $2\mu + 1$ finite e continue che a quei dati soddisfacesse.

Tali ricerche occorrerà completare. Occorrerà intanto semplificare queste ipotesi, che, come risulta chiaro dalla loro indole medesima, debbono essere in parte sovrabbondanti, specie per ciò che riguarda il primo teorema. Ma inoltre occorrerà affrontare altri problemi: per es. si dovrà vedere se non si può ulteriormente precisare, almeno per casi particolari, quando valgano realmente i teoremi di unicità e di esistenza: noi nel corso del lavoro abbiamo visto che ciò si può fare nel caso elementare servendoci del procedimento di Dirichlet-Riemann, relativo al teorema di unicità per l'equazione di Laplace [1].

In particolare io credo che i nostri metodi siano atti ad esaminare se per una data equazione si può accertare che questi teoremi sono veri per un campo sufficientemente piccolo; e che forse, approfondendo le disuguaglianze che occorre stabilire in questo indirizzo di ricerche, si potrà passare dalle equazioni lineari alle equazioni non lineari od almeno a quelle lineari soltanto nelle derivate di ordine massimo.

APPENDICE

§ I.

Sulla costruzione di funzioni che su un contorno soddisfanno a certe condizioni date.

In questo § io mi propongo di dimostrare i teoremi che nel corso del lavoro furono usati relativi alla possibilità di costruire funzioni le quali soddisfacciano a date condizioni al contorno. Per quanto questi teoremi siano molto intuitivi pure essi hanno ufficio così essenziale nei ragionamenti che precedono, che non ho stimato opportuno esimermi dal dimostrarli minutamente.

Seguirò perciò i metodi di media usati da Levi Beppo nelle sue ricerche sul principio di Dirichlet [2]. Nei primi quattro numeri ho studiato alcune operazioni

(1) Non è forse privo di interesse l'osservare che quella da noi data è la più larga estensione di detto ragionamento: che cioè esso, almeno senza profonde modificazioni non si può estendere alle equazioni di ordine superiore al secondo in più di due variabili.

(2) Beppo Levi, *Sul principio di Dirichlet*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXII (1906). Cfr. specialmente il § 5: *Un'operazione funzionale: l'operazione di media*. In una mia Nota: *Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari in due variabili indipendenti a caratteristiche reali* (Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1908, nota II, § VI), ho già usato di formule molto analoghe alle attuali. Le considerazioni là usate si trovano qui, convenientemente modificate e completate, riprodotte al n. 4.

funzionali di media, nei nn. 5 e 6 ho risolto il problema nel caso semplice in cui il contorno sia una retta o un tratto di essa; nei successivi ho mostrato come a questo caso si possa ricondurre il caso generale.

1. Si consideri nel piano xy una striscia S limitata dall'asse delle y e da una sua parallela: eventualmente S può coincidere col semipiano. Sia data in S una funzione $\varphi(xy)$ la quale ammetta le derivate dei primi g ordini finite e continue. Consideriamo le funzioni

$$\mathrm{I}_l \varphi = \frac{1}{x^{l+1}} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \varphi(xy)\, x^l\, dx\,. \tag{1}$$

Se $\varphi(xy)$ ammette la derivata prima rapporto ad x $(g > 0)$, si ha per l'operazione $\mathrm{I}_l \varphi$ l'identità:

$$-(l+1)\,\mathrm{I}_l \varphi + \varphi(xy) - \frac{1}{2^{l+1}}\, \varphi\left(\frac{x}{2}\, y\right) = x\,\mathrm{I}_{l+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,: \tag{2}$$

identità che immediatamente si ottiene per mezzo di una integrazione per parti.

Si ha facilmente derivando (1) e tenendo conto di (2):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{I}_l \varphi}{\partial x} = -\frac{l+1}{x}\,\mathrm{I}_l \varphi + \frac{1}{x}\left[\varphi(xy) - \frac{1}{2^{l+1}}\,\varphi\left(\frac{x}{2}\, y\right)\right], \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial \mathrm{I}_l \varphi}{\partial x} = \mathrm{I}_{l+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \\ &\frac{\partial \mathrm{I}_l \varphi}{\partial y} = \mathrm{I}_l \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

La prima delle (3) vale anche se $g = 0$ e cioè se φ non ammette neppure derivate prime; la seconda e terza valgono solo se esistono le derivate di φ. Più in generale dalle espressioni precedenti segue che $\mathrm{I}_l \varphi$ ammette almeno le derivate dei primi g ordini come la φ: ed anzi dalla prima delle espressioni date sopra per la derivata rapporto ad x segue che esistono anche tutte le derivate di ordine $g+1$ fatta eccezione al più per $\dfrac{\partial^{g+1} \mathrm{I}_l \varphi}{\partial y^{g+1}}$. E precisamente si avrà in generale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^t \mathrm{I}_l \varphi}{\partial x^i\, \partial y^j} &= \mathrm{I}_{l+i} \frac{\partial^t \varphi}{\partial x^i\, \partial y^j} = \\ &= -\frac{l+i}{x}\,\mathrm{I}_{l+i-1} \frac{\partial^{t-1} \varphi}{\partial x^{i-1}\, \partial y^j} + \frac{1}{x}\left[\frac{\partial^{t-1} \varphi(xy)}{\partial x^{i-1}\, \partial y^j} - \frac{1}{2^{l+i}}\, \frac{\partial^{t-1} \varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{\partial x^{i-1}\, \partial y^j}\right]. \\ &\qquad (i + j = t) \end{aligned} \tag{4}$$

Le due espressioni di queste derivate valgono entrambe se $t \leq g$; per $t = g+1$ e $j \neq 0$ vale solo la seconda.

2. Sia ora $\varphi_1(xy)$ una funzione che in S ammetta le derivate dei primi g ordini finite e continue, ed anche le derivate di ordine $g+1$ fatta eccezione per la $\dfrac{\partial^{g+1}\varphi}{\partial y^{g+1}}$ al più, come appunto è la $I_l\varphi$ studiata nel numero precedente. E consideriamo le funzioni definite da:

$$J_l\varphi_1(xy) = \frac{1}{x^{l+1}}\int_y^{y+x}\varphi_1(x\eta)(\eta-y)^l\, d\eta. \tag{5}$$

Se $\varphi_1(xy)$ ammette le derivate prime rapporto ad y (se cioè $g>0$) si ha per J_l l'identità

$$-(l+1)\, J_l\varphi_1(xy) + \varphi_1(x\, y+x) = x J_{l+1}\frac{\partial\varphi_1(xy)}{\partial y}, \tag{6}$$

identità che facilmente si ottiene mediante un'integrazione per parti. Segue allora derivando (5) e tenendo conto di (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_l\varphi_1(xy)}{\partial x} &= \frac{1}{x}\left[-(l+1)\, J_l\varphi_1(xy) + \varphi_1(x\, y+x)\right] + J_l\frac{\partial\varphi_1(xy)}{\partial x} = \\ &= J_{l+1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + J_l\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial J_l\varphi_1(xy)}{\partial y} &= \frac{1}{x}\left[-l\, J_{l-1}\varphi_1(xy) + \varphi_1(x\, y+x)\right] \\ &= J_l\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}. \end{aligned} \tag{7}$$

Anche qui le prime due espressioni di queste derivate valgono anche se $g=0$, le due seguenti valgono se $g>0$. Più in generale segue dalle (7):

$$\frac{\partial^t J_l\varphi_1}{\partial x^i\,\partial y^j} = J_l\frac{\partial^t\varphi_1}{\partial x^i\,\partial y^j} + \binom{i}{1}J_{l+1}\frac{\partial^t\varphi_1}{\partial x^{i-1}\,\partial y^{j+1}} + \binom{i}{2}J_{l+2}\frac{\partial^t\varphi_1}{\partial x^{i-2}\,\partial y^{j+2}} + \cdots + J_{l+i}\frac{\partial^t\varphi_1}{\partial y^t} \tag{8}$$

la quale vale per $t\leq g$; mentre per $t=g+1$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{g+1} J_l\varphi_1}{\partial x^i\,\partial y^{g-i+1}} = J_l\frac{\partial^{g+1}\varphi_1}{\partial x^i\,\partial y^{g-i+1}} + \binom{i}{1}J_{l+1}\frac{\partial^{g+1}\varphi_1}{\partial x^{i-1}\,\partial y^{g-i+2}} + \cdots \\ \cdots + \binom{i}{i-1}J_{l+i-1}\frac{\partial^{g+1}\varphi_1}{\partial x\,\partial y^g} + \\ + \frac{1}{x}\left[-(l+i)\, J_{l+i-1}\frac{\partial^g\varphi_1}{\partial y^g} + \frac{\partial^g\varphi_1(x\, y+x)}{\partial y^g}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

che vale per $i \neq 0$; mentre si ha semplicemente

$$(10) \qquad \frac{\partial^{g+1} J_l \varphi_1}{\partial y^{g+1}} = \frac{1}{x}\left[-l J_l \frac{\partial^g \varphi_1}{\partial y^g} + \frac{\partial^g \varphi_1(x\, y + x)}{\partial y^g}\right].$$

Dalle quali risulta che nelle ipotesi fatte relative a $\varphi_1(xy)$ la funzione $J_l\varphi_1$ ammette tutte le derivate dei primi $g+1$ ordini.

3. Ciò posto, sia $\varphi(xy)$ una funzione finita e continua insieme colle sue derivate dei primi g ordini all'interno di S.

Consideriamo anzitutto le funzioni:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \varphi^{(1)}(xy) &= 2 J_0 I_0 \varphi &&= K\varphi(xy) \\ \varphi^{(2)}(xy) &= 2 J_0 I_0 \varphi^{(1)} &&= K\varphi^{(1)}(xy) = K^2 \varphi(xy) \\ \varphi^{(3)}(xy) &= 2 J_0 I_0 \varphi^{(2)} &&= K^3 \varphi(xy) \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$\varphi^{(1)}$ rappresenta la media dei valori di φ nel rettangolo di vertici (xy), $(x\, y+x)$, $\left(\frac{x}{2}\, y\right)$, $\left(\frac{x}{2}\, y+x\right)$; $\varphi^{(2)}$ la media dei valori di $\varphi^{(1)}$; ecc.. ..

Dagli studî dei numeri precedenti segue evidentemente che la funzione $\varphi^{(1)}(xy)$ ammette all'interno di S le derivate dei primi $g+1$ ordini, finite e continue, $\varphi^{(2)}(xy)$ quelle dei primi $g+2$, $\varphi^{(3)}(xy)$ quelle dei primi $g+3$, ecc.

Studiamo le funzioni (11) nell'intorno dei punti dell'asse delle y. Osserviamo perciò che se una funzione $\psi(xy)$ è funzione finita nell'intorno del punto $(0y_1)$ anche $I_l\psi$, e $J_l\psi$ sono funzioni finite nell'intorno del punto $(0y_1)$: e che parimenti se $\psi(xy)$ diviene nel punto $(0y_1)$ infinita di ordine $\leqq \mu$ (o logaritmicamente) [1] anche le funzioni $I_l\psi$, $J_l\psi$ non possono divenire infinite di ordine $> \mu$ (e più che logaritmicamente). Ed infine che se $\psi(xy)$ è funzione finita e continua nel punto $(0y_1)$ si ha che

$$(12) \qquad \begin{aligned} \lim_{x=0\; y=y_1} I_l \psi(xy) &= \frac{1}{l+1}\left[1 - \frac{1}{2^{l+1}}\right]\psi(0y_1) \\ \lim_{x=0\; y=y_1} J_l \psi(xy) &= \frac{1}{l+1}\, \psi(0y_1)\,. \end{aligned}$$

e quindi si possono prendere i valori scritti nei secondi membri di queste uguaglianze come valore di $I_l\psi(xy)$, $J_l\psi(xy)$ nel punto $(0y_1)$.

Segue da queste osservazioni che se $\varphi(xy)$ è continua nel punto $(0y_1)$ lo sono pure $\varphi^{(1)}(xy)$, $\varphi^{(2)}(xy)$ ... e che di più si ha:

$$(13) \qquad \varphi(0\,,y_1) = \varphi^{(1)}(0\,,y_1) = \varphi^{(2)}(0\,,y_1) = \varphi^{(3)}(0\,,y_1) = \cdots$$

E se si suppone di più che le derivate dei primi $g_1 \leqq g$ ordini di $\varphi(xy)$ siano finite e continue nei punti $(0y_1)$ dalle formule (4) e (8) segue che lo saranno pure

[1] Infinito principale essendo al solito l'inversa della distanza.

le derivate dei primi y_1 ordini di $\varphi^{(1)}(xy), \varphi^{(2)}(xy), \ldots$; ed avranno per limite delle combinazioni lineari delle derivate dello stesso ordine di $\varphi(xy)$.

E più in generale se la funzione $\varphi(xy)$ è tale che le sue derivate k^{esime} divengano in $(0y_1)$ infinite di ordine $\leq m_k$ (o logaritmicamente) le derivate k^{esime} di $\varphi^{(1)}(xy)$, $\varphi^{(2)}(xy) \ldots$ sono tutte in $(0_1 y_1)$ infinite al più di ordine m_k (o logaritmicamente).

Infine se noi supponiamo di sapere che le derivate di ordine $k \leq g$ di $\varphi(xy)$ sono finite anche nell'intorno dell'asse delle y, o che vi diventano infinite come $\dfrac{1}{x^{p_k}}$ ma non sappiamo nulla sulle derivate $(k+1)^e, (k+2)^e, \ldots$, possiamo tuttavia asserire per le (4), (9), (10) che le derivate $(k+1)^e$ di $\varphi^{(1)}(xy)$ divengono infinite al più come $\dfrac{1}{x^{p_{k+1}}}$, che le $(k+2)^e$ di $\varphi^{(2)}(xy)$ divengono infinite al più come $\dfrac{1}{x^{p_{k+2}}}, \ldots$

Affatto analoghe sono le proprietà delle funzioni:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \varphi^{(1,h)}(xy) &= \frac{(h+1)}{2^{h+1}-1}\, 2^{h+1}\, J_0 I_0 \varphi = K^{(h)}\, \varphi(xy)\,, \\ \varphi^{(2,h)}(xy) &= K^{(h)}\, \varphi^{(1,h)}(xy) = K^{(h)2}\, \varphi(xy)\,, \ldots \end{aligned} \qquad (h \leq g)$$

le quali non differiscono dalle (11) che per un fattore e si riducono a quelle per $h = 0$.

Ma dalle (4) (8) e (12) si deduce di più per quest'ultime funzioni che, se la $\varphi(xy)$ si annulla sull'asse delle y insieme colle sue derivate di ordine $\leq h-1$ (e quindi anche insieme colle sue derivate di ordine h che contengono una derivazione almeno fatta rapporto ad y) anche le $\varphi^{(1h)}, \varphi^{(2h)}, \ldots$ si annullano insieme colle loro derivate dei primi $h-1$ ordini, e che per l'unica derivata h^{esima} diversa da zero sull'asse delle y si ha:

$$(15) \qquad \left(\frac{\partial^h \varphi}{\partial x^h}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^h \varphi^{(1,h)}}{\partial x^h}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^h \varphi^{(2,h)}}{\partial x^h}\right)_{x=0} = \cdots \text{ [1]}$$

4. Analogamente consideriamo la funzione:

$$(16) \qquad \bar{\varphi}^{(1,h)}(xy) = \frac{2^{h+1}}{2^{h+1}-1}\, x\, J_0 I_0\, \varphi(xy) = H^{(h)} \varphi(xy) \quad (h \leq g)\,.$$

Potremo anche scrivere:

$$\bar{\varphi}^{(1,h)}(xy) = \frac{1}{h+1}\, x K^{(h)}\, \varphi(xy)\,.$$

Ancora quindi all'interno di S la $\varphi^{(1,h)}(xy)$ avrà le derivate dei primi $g+1$ ordini tosto che la $\varphi(xy)$ ha le derivate dei primi g ordini. Ma di più si ha evi-

[1] Le (15) si riducono alle (12) per $h = 0$.

dentemente:

$$\frac{\partial^t \bar{\varphi}^{(1,h)}(xy)}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{1}{h+1}\left[i\,\frac{\partial^{t-1} K^{(h)}\varphi(xy)}{\partial x^{i-1}\partial y^j} + x\,\frac{\partial^t K^{(h)}\varphi(xy)}{\partial x^i \partial y^j}\right]. \tag{17}$$

Onde segue immediatamente dalle proprietà trovate sopra per la $\varphi^{(1,h)}(xy)$ e dalle formule dei nn. 1 e 2, che:

1°) Se la funzione $\varphi(xy)$ ha le derivate dei primi $g_1 \leq g$ ordini finite e continue in un punto $(0y_1)$, la $\bar{\varphi}^{(1,h)}(xy)$ ammette le derivate dei primi g_1+1 ordini finite e continue nel punto $(0y_1)$. E se le derivate di ordine k di $\varphi(xy)$ divengono nell'interno del punto $(0y_1)$ infinite di ordine m_k (o logaritmicamente), le derivate di ordine $k+1$ della $\bar{\varphi}^{(1,h)}$ divengono infinite di ordine al più uguale al maggiore dei due numeri $m_k - 1$ e m_{k-1} (o restano finite).

2°) Se la funzione $\varphi(x)$ è nulla insieme colle sue derivate dei primi $h-1$ ordini sull'asse delle y, la funzione $\bar{\varphi}^{(1,h)}$ è nulla insieme colle sue derivate dei primi h ordini sull'asse delle y (e quindi anche insieme colle derivate di ordine $h+1$ che contengono almeno una derivazione rapporto ad y); ed inoltre si ha:

$$\left(\frac{\partial^{h+1}\bar{\varphi}^{(1,h)}}{\partial x^{h+1}}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^h \varphi}{\partial x^h}\right)_{x=0}. \tag{18}$$

È chiaro come di analoghe proprietà godono le:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}^{(2,h)}(xy) = H^{(h+1)}\,\bar{\varphi}^{(1,h)}(xy) = H^{(h+1)}\,H^{(h)}\,\varphi(xy)\\
(16)^{bis}\qquad &\bar{\varphi}^{(3,h)}(xy) = H^{(h+2)}\,\bar{\varphi}^{(2,h)}(xy) = H^{(h+2)}\,H^{(h+1)}\,H^{(h)}\,\varphi(xy)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

In particolare la (18) dà luogo alle:

$$(18)^{bis}\qquad \left(\frac{\partial^h \varphi}{\partial x^h}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^{h+1}\bar{\varphi}^{(1,h)}}{\partial x^{h+1}}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^{h+2}\bar{\varphi}^{(2,h)}}{\partial x^{h+2}}\right)_{x=0} = \cdots$$

5. Premesse queste considerazioni possiamo risolvere con tutta generalità il problema seguente: Siano date sull'asse delle y $t+1$ funzioni $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, ..., $\psi_t(y)$ e si supponga che esse siano generalmente finite e continue e che ψ_i ammetta le derivate generalmente finite e continue, fino all'ordine $g-i$. Colla parola *generalmente* intendiamo dire fatta eccezione per un numero finito di punti in cui la derivata $(k-i)^{esima}$ di ψ_i diviene infinita di ordine $\leq m_k$ (o logaritmicamente).

È da costruirsi una funzione $\psi(xy)$ tale che nei punti del semipiano (od in una striscia S) a destra dell'asse delle y — e non appartenenti all'asse medesimo — abbia le derivate finite e continue fino a quell'ordine G che più ci piace, e che sull'asse delle y soddisfaccia alle condizioni:

$$\psi(0y) = \psi_0(y),\ \frac{\partial\psi(0y)}{\partial x} = \psi_1(y),\ \ldots,\ \frac{\partial^t\psi(0y)}{\partial x^t} = \psi_t(y),$$

ammetta anche sull'asse delle y tutte le derivate finite e continue fino all'ordine g, fatta eccezione dei punti in cui le funzioni assegnate divengono singolari dove tutte le sue derivate di ordine k possono divenire infinite, ma di ordine $\leq m_k$ (o al più logaritmicamente).

È chiaro che per risolvere questo problema basta risolvere il caso particolare in cui sia assegnato che la funzione $\psi(xy)$ deve ridursi a zero insieme colle sue derivate dei primi $t-1$ ordini mentre la derivata $\frac{\partial^t \psi(xy)}{\partial x^t}$ deve per $x=0$ prendere valori assegnati $\psi_t(y)$. Poichè la funzione corrispondente al caso generale si può comporre per somma di parecchie di tali funzioni.

Di più, ove la funzione $\psi_t(y)$, o le sue derivate, avesse ν_t punti singolari, si potrebbe porre $\psi_t(y) = \psi_t^{(1)}(y) + \psi_t^{(2)}(y) + \cdots + \psi_t^{(\nu_t)}(y)$ colla condizione che $\psi_t^{(i)}(y)$ e le sue derivate abbiano solo singolarità nell'i^{esimo} punto, per ricondurci al caso in cui la funzione $\psi_t(y)$ ha un solo punto singolare; lo chiameremo O.

Posto il problema in questo modo, noi cominceremo col costrurre una funzione $\varphi(xy)$ la quale prenda sull'asse delle y i valori di $\psi_t(y)$, abbia in O lo stesso comportamento di $\psi_t(xy)$, ed ammetta nel semipiano le prime $g-t$ derivate. Basterà perciò procedere ad esempio nel modo seguente. Si descriva il fascio dei cerchi di centro O e su ognuno di essi si interpoli linearmente tra i valori che sono assegnati nei punti in cui esso incontra l'asse delle y: si otterrà evidentemente una funzione che gode delle proprietà volute.

Partendo da $\varphi(xy)$ si costruiranno poi le funzioni $\varphi^{(1)} = \mathrm{H}^{(1)}\varphi$, $\varphi^{(2)} = \mathrm{H}^{(2)}\mathrm{H}^{(1)}\varphi$, $\ldots, \varphi^{(t)} = \mathrm{H}^{(t)}\mathrm{H}^{(t-1)}\ldots\mathrm{H}^{(1)}\varphi$; per le proprietà degli operatori H dimostrate nel n. 4, l'ultima di queste funzioni avrà le derivate dei primi g ordini nel semipiano S, sarà nulla colle derivate dei primi $k-1$ ordini sull'asse delle y, mentre la derivata t^{esima} rapporto ad x sarà uguale alla funzione $\psi_t(y)$ assegnata (form. $(18)^{bis}$); ed è finita e continua insieme colle sue derivate anche sull'asse delle y tranne che nel punto O dove le sue derivate di ordine k divengono infinite di ordine non maggiore di m_k (o non più che logaritmicamente).

Ed infine per i risultati del n. 3 basterà poi porre:

$$\psi(xy) = \mathrm{K}^{(t)\mathrm{G}-g}\,\overline{\varphi}^{(t)}(xy) = \mathrm{K}^{(t)\mathrm{G}-g}\,\mathrm{H}^{(t)}\mathrm{H}^{(t-1)}\ldots\mathrm{H}^{(1)}\varphi(xy)$$

perchè la funzione $\psi(xy)$ così costruita, conservando le proprietà al contorno volute, abbia nei punti interni al semipiano le derivate dei primi G ordini finite e continue. Onde resta risoluto il problema proposto.

6. Completiamo quanto precede con due osservazioni.

Osservazione I. — Abbiamo fin qui supposto che i dati si riferissero a tutto l'asse delle y. È chiaro che ove invece le funzioni $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, ... fossero date solo sopra un segmento dell'asse delle y basterebbe prolungarle convenientemente per ridurci al caso precedente.

Osservazione II. — Supponiamo che le funzioni assegnate dipendano oltre che dalla y anche da un certo numero di parametri $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$: scriveremo dunque $\psi^{(t)}(y\,; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p)$, al posto di $\psi^{(t)}(y)$. E supponiamo che in un certo campo $\mathit{\Delta}$

di variabilità per le μ, queste funzioni e le loro derivate rapporto a y considerate sopra siano funzioni finite e continue delle μ, oppure ammettano le derivate dei primi d ordini rapporto alle μ, oppure siano regolari analitiche, oppure, ecc. È facile vedere che la $\psi(xy)$ da noi costruita considerata come funzione dei parametri μ gode delle stesse proprietà. Invero la cosa è evidente per la funzione $\varphi(xy)$ da noi costruita nel numero precedente. E siccome la ψ si ottiene poi da questa operando colle H, e colle K, e queste operazioni di integrazione mantengono evidentemente le proprietà di continuità, di derivabilità, di analiticità, e simili rispetto ai parametri μ, che possedeva la primitiva funzione, risulta evidente l'enunciato.

7. Però il problema che si presenta nel corso del nostro lavoro non consiste propriamente nel determinare una funzione che assuma valori assegnati, insieme con un certo gruppo di sue derivate sull'asse delle y, ma bensì sopra una curva chiusa γ limitante un campo C. Ci riporteremo facilmente da questo a quel caso con alcuni semplici artifici.

Supponiamo che le equazioni:

$$x = x(s) \qquad\qquad y = y(s)$$

le quali determinano γ, ammettano le derivate dei primi $g+1$ ordini con $g \geqq 1$ finite e continue. Si potrà allora, staccando su tutte le normali un segmento α inferiore al minimo raggio di curvatura, determinare entro C una corona C_1 aderente alla curva γ tale che in essa possano assumersi quali variabili coordinate di un punto P la lunghezza n del segmento della normale (unica) a γ passante per P ed il valore di s nel punto in cui questa normale incontra C. Le coordinate di un punto xy di C_1 saranno date in funzione di n ed s dalle

$$(19) \qquad x(n\,,s) = x(s) + ny'(s) \qquad y(n\,,s) = y(s) - nx'(s)\,.$$

Le (19) dànno così delle formule che servono a rappresentare la corona C_1 nel piano xy su un tratto della striscia S compresa fra le rette $n = 0$, $n = \alpha$ del piano $n\,,s$. E le formule di trasformazione (19) — e le loro inverse — ammettono derivate finite e continue anche sul contorno di ordine $\leqq g$.

Possiamo sostituire ancora le variabili $n\,,s$ con una coppia di variabili $n_1\,s_1$ tali che ancora risulti il campo C_1 od una sua parte rappresentata in una striscia limitata dalla retta $n_1 = 0$, e, restando i valori delle derivate di ordine $\leqq g$ di $x\,,y$ rapporto ad $n_1\,,s_1$, su $n_1 = 0$ uguali a quelli di x ed y rapporto ad $n\,,s$, all'interno del campo C_1 esistano anche le derivate dei primi $G \geqq g+1$ ordini. Infatti si costruiscano due funzioni $\xi(n\,,s)$ $\eta(n\,,s)$ che sull'asse $n = 0$ prendano insieme colle loro derivate di ordine $\leqq g$ gli stessi valori di $x(n\,,s)$, $y(n\,,s)$ e delle loro derivate rispettivamente: e che entro S ammettano le derivate dei primi G ordini. E si determinino le $n_1\,s_1$ mediante le equazioni:

$$(20) \qquad x = \xi(n_1\,,s_1) \qquad y = \eta(n_1\,,s_1)\,.$$

Queste ci dànno le variabili xy in funzione di n_1, s_1, e viceversa n_1, s_1 in funzione di x ed y in modo che quando xy è entro C, sia queste formule quanto le formule inverse ammettono le derivate dei primi G ordini; ed inoltre ai punti (xy) sulla curva γ corrisponderanno evidentemente punti dell'asse $n_1 = 0$, e in questi punti le formule di trasformazione ammetteranno le derivate di ordine $\leq g$ ed avranno gli stessi valori delle derivate delle funzioni (19).

Impiccolendo C_1 si potrà prendere in esso un campo C_1' che nel piano in cui sono variabili coordinate n_1 ed s_1 sia rappresentato in un pezzo della striscia S_1 compresa fra $n_1 = 0$ ed $n_1 = \alpha_1$.

Concludendo, noi possiamo sempre trovare in C una corona C_1' aderente a γ. la quale possa rappresentarsi su un piano $n_1 s_1$ in un tratto della striscia S_1 compresa fra $n_1 = 0$ ed $n_1 = \alpha_1$; $n_1 = 0$ rappresentando l'immagine di γ. E possiamo fare in modo che le formule di trasformazione che dànno xy come funzioni di $s_1 n_1$ (e viceversa) ammettano all'interno di C_1' (e di S_1) le derivate dei primi G ordini finite e continue, e sulla curva γ (e sull'asse $n_1 = 0$) abbiano le derivate dei primi g ordini finite e continue, ed anzi tali che $\left(\frac{\partial^t x}{\partial n_1^i \partial s_1^j}\right)_{n_1=0} = \left(\frac{\partial^t x}{\partial n^i \partial s^j}\right)_{n=0}$.

Diremo γ_1 la curva che con γ limita C_1' e cioè la curva corrispondente alla retta $n_1 = \alpha_1$; la curva γ_1 sarà data da funzioni della forma:

$$x = \pi_1(s_1) \qquad y = \pi_2(s_1)$$

le quali ammettono le derivate dei primi G ordini.

8. Ciò posto siano assegnate sulla curva γ t funzioni $\psi_0(s)$, $\psi_1(s)$, ..., $\psi_t(s)$ finite e continue, e tali che $\psi_i(s)$ ammetta derivate generalmente finite e continue dei primi $g - i$ ordini, fatta eccezione per uno o più punti singolari in cui le derivate di ordine k divengono infinite di ordine m_k. E si voglia costruire una funzione $\psi(xy)$ finita e continua insieme colle derivate dei primi G ordini entro C, e tale che esistano le derivate dei primi g ordini anche su γ e che precisamente su γ sia $\psi(xy) = \psi_0(s)$, $\frac{\partial^i \psi(xy)}{\partial n^i} = \psi_i(s)$ e che le derivate di ψ di ordine k abbiano solo dei punti singolari nei punti di γ ed ivi divengano infinite di ordine $\leq m_k$. Perciò cominciamo dal prendere una qualunque funzione $h(xy)$ finita e continua all'interno di C insieme colle sue derivate dei primi G ordini. E nel campo $C - C_1'$ poniamo $\psi(xy) = h(xy)$.

Mediante la trasformazione del numero precedente il problema è allora ridotto a costruire una funzione $\overline{\psi}(n_1 s_1)$ nella striscia S limitata dalle rette $n_1 = 0$, $n_1 = \alpha_1$, la quale ammetta entro S_1 le derivate dei primi G ordini, prenda insieme colle sue derivate di ordine $\leq g$ e $\leq$ G valori assegnati rispettivamente sulle rette $n_1 = 0$, $n_1 = \alpha_1$, ecc.

E tale problema si potrà spezzare allo stesso modo che nel n. 5 in una serie di problemi del tipo seguente: costruire una funzione $\overline{\psi}^{(h)}(n_1, s_1)$ che ammetta all'interno di S_1 e sulla $n_1 = \alpha_1$ le derivate dei primi G ordini, si annulli insieme colle sue derivate dei primi $h - 1$ ordini su $n_1 = 0$, ed $n_1 = \alpha_1$, mentre le derivate t^{esime}

rapporto ad n_1 di ordine h abbiano valori assegnati, e sulle rette $n_1 = 0$, $n_1 = \alpha_1$ abbiano il solito comportamento già più volte descritto.

Nel caso generale si costruiscano come si mostrò al n. 5 due funzioni:

$$\overline{\psi}_0^{(h)}(n_1 s_1) \qquad \overline{\psi}_1^{(h)}(n_2 s_1)$$

le quali soddisfacciano rispettivamente alle condizioni imposte sulle rette $n_1 = 0$, $n_1 = \alpha_1$ ed esistano rispettivamente a destra di $n_1 = 0$ ed a sinistra di $n_1 = \alpha_1$. La funzione

$$\psi^{(h)}(n_1 s_1) = \frac{1}{h!}\left[\frac{n_1^h}{\alpha_1}\overline{\psi}_1^{(h)}(n_1 s_1) + \frac{(n_1 - \alpha_1)^h}{\alpha_1}\overline{\psi}_0^{(h)}(n_1 s_1)\right]$$

soddisferà evidentemente a tutte le condizioni imposte.

Osservazione. — Se le funzioni assegnate al contorno γ dipendono da certi parametri, ma sono funzioni finite e continue, o derivabili od analitiche, ecc., di tali parametri, le funzioni da noi costruite in C dipenderanno da questi parametri e saranno ancora funzioni continue, o derivabili, od analitiche, ecc., di essi come evidentemente risulta dall'osservazione II del n. 6.

9. — Tutti gli sviluppi precedenti valgono pure quando si tratti di campi a più di due dimensioni, e di funzioni in più di due variabili.

§. II

Sulle derivate del termine complementare della formula di Taylor.

1. Sia $x(s)$ una funzione finita e continua insieme colle sue derivate dei primi m ordini: $\xi(\sigma)$ il valore di essa nel punto σ; si ha:

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi(\sigma) = x(s) + x'(s)(\sigma - s) + \frac{1}{2}x''(s)(\sigma - s)^2 + \cdots + \\ + \frac{1}{(h-1)!}x^{(h-1)}(s)(\sigma - s)^{h-1} + \frac{1}{h!}x_h(s;\sigma)(\sigma - s)^h, \end{aligned}$$

dove $x_h(s;\sigma)$ è uguale al valore della derivata h^{esima} di x in un conveniente punto intermedio tra s e σ. Mi propongo di dimostrare che *la funzione $x_h(s;\sigma)$ ammette le derivate le quali non contengono più di $m - h + 1$ derivazioni rapporto ad s, nè più di m rapporto a σ; e che quelle di tali derivate che sono di ordine $\leq m - h$, sono finite anche per $s = \sigma$, mentre quelle di ordine $k > m - h$ divengono infinite di ordine $k - m + h$ al più.*

Da (1) segue:

$$(2) \quad x_h(s;\sigma) = h!\,\frac{\xi(\sigma) - x(s) - x'(\sigma - s) - \frac{1}{2}x''(s)(\sigma - s)^2 \cdots - \frac{1}{(h-1)!}x^{(h-1)}(s)(\sigma - s)^{h-1}}{(\sigma - s)^h}.$$

E poichè ξ ha le derivate di ordine $\leq m$, $x, x', \ldots, x^{(h-1)}$ hanno le derivate di ordine $\leq m - h + 1$, ne segue la prima affermazione.

2. Per provare la seconda parte incominciamo dal caso in cui $m = h$.

Se $m = h = 1$ si ha da (2):

$$x_1(s\,;\sigma) = \frac{\xi - x}{\sigma - s}.$$

E quindi si ha:

$$\frac{\partial x_1(s\,;\sigma)}{\partial s} = \frac{-x'(\sigma - s) + (\xi - x)}{(\sigma - s)^2} = \frac{x_1(s\,;\sigma) - x'}{\sigma - s},$$

$$\frac{\partial x_1(s\,;\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\xi'(\sigma - s) - (\xi - x)}{(\sigma - s)^2} = \frac{\xi' - x_1(s\,;\sigma)}{\sigma - s},$$

$$\frac{\partial^2 x_1(s\,;\sigma)}{\partial s\,\partial \sigma} = \frac{1}{(\sigma - s)^2}\left[\frac{\partial x_1(s\,;\sigma)}{\partial \sigma}(\sigma - s) - (x_1(s\,;\sigma) - x')\right] =$$
$$= \frac{\xi' + x' - 2x_1(s\,;\sigma)}{(\sigma - s)^2};$$

e tali formole dimostrano l'asserto.

Supponiamo il teorema dimostrato per $m = h \leq i - 1$ e dimostriamolo per $m = h = i$.

Si ha ancora da (2):

$$\frac{\partial x_i(s\,;\sigma)}{\partial s} =$$

$$= i!\,\frac{-\dfrac{1}{(i-1)!}x^{(i)}(\sigma - s)^i + i\left[\xi - x - x'(\sigma - s)\cdots - \dfrac{1}{(i-1)!}x^{(i-1)}(\sigma - s)^{i-1}\right]}{(\sigma - s)^{i+1}} = \tag{3}$$
$$= i\,\frac{-x^{(i)}(s) + x_i(s\,;\sigma)}{\sigma - s}.$$

da cui risulta che questa derivata prima di $x_i(s\,;\sigma)$ diviene infinita di ordine < 1.

Inoltre ricordando che analogamente ad (1) è:

$$\xi'(\sigma) = x'(s) + x''(s)(\sigma - s) + \frac{1}{2}x'''(s)(\sigma - s)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{(i-2)!}x^{(i-1)}(s)(\sigma - s)^{i-2} + \frac{1}{(i-1)!}x_{1,i-1}(s\,;\sigma)(\sigma - s)^{i-1} \tag{4}$$

si avrà:

$$\frac{\partial x_i(s\,;\sigma)}{\partial \sigma} =$$

$$= i!\,\frac{\left[\xi' - x' - x''(\sigma - s) - \cdots - \dfrac{1}{(i-2)!}x^{(i-1)}(\sigma - s)^{i-2}\right](\sigma - s) - i\left[\xi - x - x'(\sigma - s)\cdots\dfrac{1}{(i-1)!}x^{(i-1)}(\sigma - s)^{i-1}\right]}{(\sigma - s)^{i+1}} = \tag{5}$$
$$= i\,\frac{x_{1,i-1}(s\,;\sigma) - x_i(s\,;\sigma)}{\sigma - s}.$$

E dalle formole (3) e (5), ricordando che per (3) $x_{1,i-1}(s\,;\sigma)$ è il termine complementare per una funzione per cui $m = h = i - 1$, segue per induzione completa l'asserto del n. 1.

3. Passiamo a studiare il caso generale. Ammettiamo ancora dimostrato il teorema per $m - h \leq j - 1$, e dimostriamolo per $m - h = j$.

Osserviamo allora che confrontando le formule di Taylor (1) e (4) con quelle che si ottengono prolungandole ancora di un termine segue, ponendo di nuovo h al posto di i:

$$x_h(s\,;\sigma) = x^{(h)}(s) + \frac{1}{h+1}\, x_{h+1}(s\,;\sigma)\,(\sigma - s)$$

$$x_{1,h-1}(s\,;\sigma) = x^{(h)}(s) + \frac{1}{h}\, x_{1,h}(s\,;\sigma)\,(\sigma - s).$$

Con ciò le (3) e (5) dànno:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x_h(s\,;\sigma)}{\partial s} &= -\frac{h}{h+1}\, x_{h+1}(s\,;\sigma) \\ \frac{\partial x_i(s\,;\sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{h}{h+1}\left[x_{1,h}(s\,;\sigma) - x_{h+1}(s\,;\sigma)\right]. \end{aligned}$$

E basta osservare che $x_{h+1}(s\,;\sigma)$, $x_{1,h}(s\,;\sigma)$ sono termini complementari in sviluppi di funzioni per cui la differenza $m - h$ vale $j - 1$, e che quindi per essi già si ammette valere il teorema da dimostrarsi, per dedurre dalle (6) che il teorema è vero sempre.

§ III.

Sulla derivabilità delle soluzioni di certe equazioni integrali omogenee.

1. Nel § IX n. 38, pag. 63, ci occorse di affermare che le soluzioni dell'equazione (9) hanno, almeno quando si costruisca convenientemente la funzione compensatrice, le derivate dei primi $2n$ ordini rapporto ad $x_1 y_1$ finite e continue in C e su γ. Tale affermazione vogliamo qui più ampiamente giustificare: essa ha la sua origine in certe proprietà di una particolar specie di integrali che comprendono come casi particolari gli ordinarî potenziali logaritmici di strato e di superficie. Nei nn. 2-7 tratteremo di queste proprietà, nel n. 8 mostreremo per qual via si connettono col teorema che vogliamo dimostrare, nei nn. 9-13 infine si mostrerà che l'integrale che compare nell'equazione (9) è del tipo studiato.

2. Diremo nel seguito che una funzione $f(s)$ o $f(xy)$ di una o due variabili è *regolare* [1] in un certo campo perfetto ad una o due dimensioni quando esistono due numeri positivi a e λ tali che si abbia, quali che siano s_1 ed s_2, od (x_1y_1), (x_2, y_2), nel campo assegnato:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &|f(s_1)-f(s_2)|<ar^{\lambda}(s_1\,;s_2)\\ &|f(x_1y_1)-f(x_2y_2)|<ar^{\lambda}(x_1y_1\,;x_2y_2)\,, \end{aligned}$$

dove $r(s_1\,;s_2)$, $r(x_1y_1\,;x_2y_2)$ indica al solito la distanza dei due punti rappresentativi di s_1, s_2 o $(x_1y_1), (x_2y_2)$. Si noti che λ sarà in generale ≤ 1; inoltre si osservi che si suppone il campo perfetto, o in altri termini, che si vuole che siano soddisfatte le (1) anche sul contorno del campo.

Similmente in quanto segue, quando diremo che $f(s)$ o $f(xy)$, ha derivate intenderemo che il contorno del campo non sia escluso; ben inteso che tali derivate nei punti del contorno non saranno le derivate nel senso ordinario, ma solo quelle ottenute confrontando i valori sul contorno coi valori nei punti interni al campo (derivate a destra od a sinistra nel caso di una sola variabile, secondo le direzioni volte verso l'interno del campo nel caso di due variabili).

I campi ed i contorni che noi consideriamo godono sempre delle proprietà supposte al § IV.

Con $a_1, a_2, \ldots$ indicheremo nel seguito delle costanti positive, e similmente con $\lambda', \lambda'', \ldots$ delle costanti positive <1.

3. Consideriamo le funzioni

$$(2)\qquad \begin{aligned} V(xy) &= \int_\gamma \log \varsigma(\sigma\,;xy)\, t(\sigma\,;xy)\, w(\sigma)\, d\sigma\\ W(xy) &= \iint_C \frac{1}{\varsigma(\xi\eta\,;xy)}\, \theta(\xi\eta\,;xy)\, w(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad [2].\\ U(xy) &= \iint_C \log|\varsigma(\xi\eta\,;xy)|\, \Theta(\xi\eta\,;xy)\, w(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta \end{aligned}$$

In questi integrali ς indica una delle solite ς_j, si è tralasciato gl'indici per semplicità di scrittura; esso soddisferà quindi alle disuguaglianze (3) di pag. 22. Le

[1] La denominazione è adottata dal Korn, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, Bd. 1, pag. 388; Bd. 2, pag. 322.

[2] Facciamo $\alpha(\xi\eta)=i$, $\Theta(\xi\eta\,;xy)=1$, $U(xy)$ è il potenziale logaritmico di superficie; facciamo ancora $\alpha(\sigma)=i$, $t(\sigma\,;xy)=1$ ed indichiamo con $\Re z$ la parte reale di z, sarà

$$\Re V(xy)=\tfrac{1}{2}\int_\gamma \log\varsigma(\sigma\,;xy)\,w(\sigma)\,d\sigma+\tfrac{1}{2}\int_\gamma \log\varsigma_0(\sigma\,;xy)\,w(\sigma)\,d\sigma$$

il potenziale logaritmico di strato dovuto alla linea γ; ed anche per $\alpha(\xi\eta)=i$, $\theta(\xi\eta\,;xy)=1$ sarà

$$\Re W(xy)=\frac{\partial}{\partial y}\iint_C \log r(\xi\eta\,;xy)\,w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta$$

la derivata di un potenziale logaritmico di superficie.

$t(\sigma ; xy)$, $\theta(\xi\eta ; xy)$, $\Theta(\xi\eta ; xy)$ rappresentano funzioni finite e continue colle loro derivate dei primi g ordini: $w(\sigma)$, $w(\xi\eta)$ sono infine funzioni finite ed integrabili su cui faremo tosto varie ipotesi. Per determinare completamente tali funzioni occorre ancora chiarire il significato dei logaritmi che vi compaiono: per $\log|\varsigma|$ che compare in $U(xy)$, intenderemo la sua determinazione reale; per $\log\varsigma(\sigma ; xy)$ che compare in $V(xy)$ intenderemo che fissata per un punto $x_0 y_0$ di C ed uno di γ ad es.: $\sigma = 0$ una determinazione del logaritmo lo si determini per continuità in tutti gli altri; talchè la funzione $\log\varsigma(\sigma ; xy)$ venga ad essere una funzione finita e continua, tranne per $\sigma = 0$ dove ha un salto.

Aggiungiamo fin d'ora l'avvertenza che tutti i ragionamenti che seguono valgono pure nell'ipotesi più limitate che le funzioni t, θ, Θ abbiano sempre le derivate dei primi g ordini per rapporto a xy, ma rapporto a σ, o $\xi\eta$ soddisfacciano alle sole condizioni che via via si faranno per le funzioni $w(\sigma)$, $w(\xi\eta)$.

4. Valgono per queste funzioni le proposizioni seguenti:

Lemma 1°. *Se $w(\sigma)$ e $w(\xi\eta)$ sono limitate e $g \geq 1$, $V(xy)$ e $W(xy)$ sono regolari in* C *(e su γ).*

Dimostriamolo ad es.: per $V(xy)$. Chiameremo $\overline{w}$ il limite superiore di $|w(\sigma)|$: $|w(\sigma)| \leq \overline{w}$. Supponiamo anzitutto $t(\sigma ; xy) = 1$.

Si determinino due costanti $\lambda' < 1$ e a tali che quali che siano i punti $(x_1 y_1)$ ed $(x_2 y_2)$ di C sia $R = a r^{\lambda'}(x_1 y_1 ; x_2 y_2) > r(x_1 y_1 ; x_2 y_2)$. Fissati poi due punti $P_1 \equiv (x_1 y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2 y_2)$, con centro il punto medio di $P_1 P_2$ si descriva il cerchio di raggio R, e si divida γ in due parti: l'una γ' formata dei punti interni al cerchio, l'altra γ'' dei punti esterni: γ' o γ'' possono eventualmente mancare. Si chiamino $V'(xy)$, $V''(xy)$ gli integrali analoghi a $V(xy)$ estesi a γ' e γ''. Sarà $V(xy) = V'(xy) + V''(xy)$.

$$(3) \qquad |V(x_1 y_1) - V(x_2 y_2)| \leq |V'(x_1 y_1)| + |V'(x_2 y_2)| + |V''(x_1 y_1) - V''(x_2 y_2)| .$$

Per valutare quest'ultimo termine si osservi che i punti di γ'' distano dai punti del segmento $P_1 P_2$ più di $R - \frac{1}{2} r(x_1 y_1 ; x_2 y_2) > \frac{1}{2} R$; quindi, ricordando che le derivate di $\log\varsigma(\sigma ; xy)$ rapporto a x ed y sono $-\dfrac{\alpha(\sigma)}{\varsigma(\sigma ; xy)}$, $-\dfrac{1}{\varsigma(\sigma ; xy)}$, e che valgono le (3) di pag. 22, si avrà che per σ appartenente a γ''

$$|\log\varsigma(\sigma ; x_1 y_1) - \log\varsigma(\sigma ; x_2 y_2)| < a_1 \frac{r(x_1 y_1 ; x_2 y_2)}{\frac{R}{2}} \leq a_2 r^{1-\lambda'}(x_1 y_1 ; x_2 y_2) .$$

Quindi se γ come al solito indica la lunghezza di γ,

$$(4) \qquad |V''(x_1 y_1) - V''(x_2 y_2)| < a_2 \overline{w} \gamma r^{1-\lambda'}(x_1 y_1 ; x_2 y_2) = a_3 r^{1-\lambda'}(x_1 y_1 ; x_2 y_2) .$$

Quanto a $V'(xy)$ osserviamo che, grazie alla (2) del n. 15 (§ VI, pag. 25), possiamo affermare che la lunghezza di γ' è inferiore a $2\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}}$ (1): onde segue:

(5) $$|\mathrm{V}'(x_1y_1)| < a_4\,\overline{w}\,\mathrm{R}\log\mathrm{R} < a_5\,r^{\lambda''}(x_1y_1\,;\,x_2y_2),$$

λ'' indicando un numero arbitrariamente fissato $< \lambda'$. Analogamente

(6) $$|\mathrm{V}'(x_2y_2)| < a_5\,r^{\lambda''}(x_1y_1\,;\,x_2y_2).$$

Da (3), (4), (5), (6) segue la regolarità di $\mathrm{V}(xy)$.

Il teorema si estende subito al caso di $t \neq 1$. Basta osservare che

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{V}(x_1y_1) - \mathrm{V}(x_2y_2)| \leq \Big|\int_\gamma \log \varsigma(\sigma\,;\,x_1y_1)\, t(\sigma\,;\,x_1y_1)\, w(\sigma)\, d\sigma\, - \\ - \int_\gamma \log \varsigma(\sigma\,;\,x_2y_2)\, t(\sigma\,;\,x_1y_1)\, w(\sigma)\, d\sigma\Big| + \\ + \Big|\int_\gamma \log \varsigma(\sigma\,;\,x_2y_2)\,[t(\sigma\,;\,x_1y_1) - t(\sigma\,;\,x_2y_2)]\, w(\sigma)\, d\sigma\Big|\,;\end{aligned}$$

la prima differenza è del tipo studiato or ora quando come $w(\sigma)$ si prenda $t(\sigma\,;x_1y_1)\,w(\sigma)$; nell'integrale residuo l'integrando è, grazie all'ipotesi che $t(\sigma\,;xy)$ abbia derivate prime finite e continue almeno rapporto a $xy (g \geq 1)$, sempre inferiore numericamente ad una quantità della forma $a_6\,r(x_1y_1\,;x_2y_2)\log r(\sigma\,;x_2y_2)$, e quindi l'integrale stesso è inferiore ad un'espressione del tipo $a_7\,r(x_1y_1\,;\,x_2y_2)$. L'analogo per $\mathrm{W}(xy)$: solo che nell'eseguire lo spezzamento del campo il raggio $\mathrm{R} = a\,r^{\lambda'}(x_1y_1\,;\,x_2y_2)$ deve prendersi con $\lambda' < \frac{1}{2}$.

Lemma 2°. *Se $w(\xi\eta)$ è limitata e $g \leq 1$, $\mathrm{U}(xy)$ ha derivate prime finite, continue in* C *e su γ, che si esprimono per mezzo di funzioni $\mathrm{W}(xy)$ e $\mathrm{U}(xy)$.*

Infatti, indicando con q_0 la quantità complessa coniugata di q, si vede subito che si ha ad es.:

(I) $$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = -\frac{1}{2}\iint_{\mathrm{C}} \frac{1}{\varsigma(\xi\eta\,;\,xy)}\,\Theta(\xi\eta\,;\,xy)\,\alpha(\xi\eta)\,w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\, - \\ -\frac{1}{2}\iint_{\mathrm{C}} \frac{1}{\varsigma_0(\xi\eta\,;\,xy)}\,\Theta(\xi\eta\,;\,xy)\,\alpha_0(\xi\eta)\,w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\, + \\ + \iint_{\mathrm{C}} \log|\varsigma(\xi\eta\,;\,xy)|\,\frac{\partial\Theta(\xi\eta\,;\,xy)}{\partial x}\,w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\,.\end{aligned}$$

I due primi integrali sono integrali W; il terzo è un integrale U. Analoga formula si ha per $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}$.

(1) γ' può eventualmente consistere di parti staccate; la somma delle lunghezze di queste parti è sempre $< 2\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}}$: però quando (x_1y_1) e (x_2y_2) sono sufficientemente vicini a γ, esso consiste di un solo pezzo.

Lemma 3. *Se $w(\sigma)$, $w(\xi\eta)$ hanno derivate prime e $g \geq 1$ $V(xy)$ e $W(xy)$ hanno derivate prime finite e continue, le quali si esprimono come somme:* 1° *una funzione che ha finite e continue le derivate il cui ordine non supera g, nè $2n$;* 2° *di funzioni del tipo $V(xy)$, $W(xy)$, $U(xy)$ in cui le funzioni che hanno l'ufficio delle funzioni t, θ, Θ, w sono composte colle t, θ, w primitive, colle loro derivate prime, colle $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$, $\alpha(\xi\eta)$ e colle loro derivate prime e seconde.*

Incominciamo dalla $V(xy)$. Si ha per (xy) interno a C:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_\gamma \log \varsigma(\sigma\,;xy)\,\frac{\partial t(\sigma\,;xy)}{\partial x}\,w(\sigma)\,d\sigma - \int_\gamma \frac{\alpha(\sigma)}{\varsigma(\sigma\,;xy)}\,t(\sigma\,;xy)\,w(\sigma)\,d\sigma. \tag{7}$$

Il primo integrale è già del tipo di $V(xy)$. Quanto al secondo si ricordi che è (formule (32) e (33), pag. 33)

$$\frac{\partial \log \varsigma(\sigma\,;xy)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\varsigma(\sigma\,;xy)}\,\frac{1}{\beta(\sigma\,;xy)} \tag{8}$$

con

$$\beta(\sigma\,;xy) = \frac{1}{\bar{\tau}(\sigma) + \alpha'(\sigma)\,(\xi(\sigma) - x)} \tag{9}$$

$$\bar{\tau}(\sigma) = \alpha(\sigma)\,\xi'(\sigma) + \eta'(\sigma) \qquad \alpha'(\sigma) = \frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\,\xi'(\sigma) + \frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\,\eta'(\sigma).$$

Quindi, portando (8) in (7) ed integrando per parti:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_\gamma \log \varsigma(\sigma\,;xy)\Big[\frac{\partial t(\sigma\,;xy)}{\partial x}\,w(\sigma) + \\ + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(t(\sigma\,;xy)\,w(\sigma)\,\alpha(\sigma)\,\beta(\sigma\,;xy)\right)\Big]\,d\sigma\,. \tag{10}$$

Occorre notare che la funzione $\beta(\sigma\,;xy)$ è, *almeno se si suppone il campo* C, *e quindi pure* γ, *sufficientemente piccolo,* sempre finita insieme colle sue derivato di ordine $\leq 2n$: poichè se indichiamo con $\overline{\alpha'}$ il massimo valore assoluto di $\alpha'(\sigma)$ il denominatore di (9) è sempre superiore a $\frac{\mu}{M+1} - \overline{\alpha'}r(\sigma\,;xy)$ e quindi diverso da zero se la massima corda di C e quindi $r(\sigma\,;xy)$ sono minori di $\frac{\mu}{(M+1)\,\overline{\alpha'}}$; in tali ipotesi quindi la derivata di $V(xy)$ si esprime mediante una funzione $V(xy)$ del tipo voluto.

La limitazione che C e γ siano sufficientemente piccoli è però inessenziale. Invero ove non fosse soddisfatta, si costruisca una funzione $\bar{\beta}(\sigma\,;xy)$ la quale quando

σ è entro il cerchio di centro (xy) e raggio $\varepsilon < \dfrac{\mu}{\overline{\alpha}'(\mathrm{M}+1)}$ coincida con $\beta(\sigma\,;xy)$ e sia del resto finita e continua insieme colle sue derivate di ordine $\leq 2n$ in tutto il campo: cosa che, secondo quanto si vide nel § I dell'Appendice, si potrà sempre fare. Potremo allora sostituire la (8) colla formula seguente:

$$\frac{1}{\varsigma(\sigma\,;xy)} = \overline{\beta}(\sigma\,;xy)\frac{\partial \log \varsigma(\sigma\,;xy)}{\partial\sigma} + \left(1 - \frac{\overline{\beta}(\sigma\,;xy)}{\beta(\sigma\,;xy)}\right)\frac{1}{\varsigma(\sigma\,;xy)} =$$
$$= \overline{\beta}(\sigma\,;xy)\frac{\partial \log \varsigma(\sigma\,;xy)}{\partial\sigma} + \delta(\sigma\,;xy)\,,$$

dove la funzione $\delta(\sigma\,;xy)$ sarà una funzione sempre finita e continua insieme con tutte le sue derivate dei primi $2n$ ordini rapporto a σ e ad xy [1].

Con ciò avremo che il secondo integrale di (7) si potrà scrivere

$$\text{(11)}\qquad \int_\gamma \log \varsigma(\sigma\,;xy)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[t(\sigma\,;xy)\,\overline{\beta}(\sigma\,;xy)\,\alpha(\sigma)\,w(\sigma)\right]d\sigma + \\ + \int_\gamma \delta(\sigma\,;xy)\,t(\sigma\,;xy)\,\alpha(\sigma)\,w(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Ed in questa formula (11) l'ultimo integrale rappresenterà una funzione la quale ammette tutte le derivate il cui ordine non è superiore nè a g nè a $2n$. Otterremo quindi infine in luogo della (10) la formula

$$\text{(II)}\qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \simeq \int_\gamma \log \varsigma(\sigma\,;xy)\left[\frac{\partial t(\sigma\,;xy)}{\partial x}\,w(\sigma) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(t(\sigma\,;xy)\,\overline{\beta}(\sigma\,;xy)\,\alpha(\sigma)\,w(\sigma)\right)\right]d\sigma\,,$$

dove il segno $\simeq$ indica che le due funzioni non differiscono che per una funzione la quale possiede tutte le derivate il cui ordine non supera g nè $2n$.

Passiamo alla $\mathrm{W}(xy)$. Dobbiamo, per calcolare le derivate, premettere una trasformazione dell'integrale che la definisce. Supponiamo anzitutto $\theta(\xi\eta\,;xy)$ indipendente da xy: scriveremo al suo posto senz'altro $\theta(\xi\eta)$. Si ha

$$\text{(12)}\qquad \frac{1}{\varsigma(\xi\eta\,;xy)} = \frac{\alpha_0(\xi\eta)\,(\xi - x) + \eta - y}{|\varsigma(\xi\eta\,;xy)|^2} = \\ = \left[\frac{\partial \log|\varsigma(\xi\eta\,;xy)|}{\partial\xi} - \alpha_0(\xi\eta)\frac{\partial \log|\varsigma(\xi\eta\,;xy)|}{\partial\eta}\right]\beta_1(\xi\eta\,;xy)$$

[1] Ed anzi tutte queste derivate sono nulle se $r(\sigma\,;xy) < \varepsilon$.

con

$$(13)\qquad \frac{1}{\beta_1(\xi\eta\,;xy)} = iq(\xi\eta) + \\ + \frac{[p(\xi-x)+(y-\eta)]\,[\xi-x]\left[\frac{\partial p}{\partial\xi}-\alpha_0\frac{\partial p}{\partial\eta}\right]+q(\xi-x)^2\left[\frac{\partial q}{\partial\xi}-\alpha_0\frac{\partial q}{\partial\eta}\right]}{\varsigma_0(\xi\eta\,;xy)}.$$

E la funzione $\beta_1(\xi\eta\,;xy)$, come la β data da (9), sarà finita e continua insieme colle sue derivate di ordine $\leq 2n$ almeno se si suppone il campo C sufficientemente piccolo. Portando la (12) nell'espressione di $W(xy)$ ed integrando per parti si avrà

$$(14)\qquad \begin{aligned} W(xy) &= \int_\gamma \log|\varsigma(\sigma\,;xy)|\,\theta(\sigma)\,\beta_1(\sigma\,;xy)\,\bar{\tau}_0(\sigma)\,w(\sigma)\,d\sigma - \\ &- \iint_C \log|\varsigma(\xi\eta\,;xy)|\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\alpha_0\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\theta(\xi\eta)\,\beta_1(\xi\eta\,;xy)\,w(\xi\eta)\right\}d\xi\,d\eta\,, \end{aligned}$$

dove per $\log|\varsigma|$ devesi prendere la determinazione reale.

Ciò posto, se noi vogliamo studiare la derivata rapporto ad xy della $W(xy)$ qualunque sia $\theta(\xi\eta\,;xy)$, basterà derivare anzitutto sotto il segno la $\theta(\xi\eta\,;xy)$, indi fare la derivata residua quasi che la $\theta(\xi\eta\,;xy)$ fosse indipendente da (xy). Applicando prima di eseguire questa seconda parte della derivazione la (14), e ricordando le formule (I) e (II), avremo:

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &\simeq \iint_C \frac{1}{\varsigma(\xi\eta\,;xy)}\,\frac{\partial\theta(\xi\eta\,;xy)}{\partial x}\,w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta + \\ &+ \frac{1}{2}\int_\gamma \log\varsigma(\sigma\,;xy)\left[\frac{\partial\beta_1(\sigma\,;xy)}{\partial x}\,\theta(\sigma\,;xy)\,\bar{\tau}_0(\sigma)\,w(\sigma) + \right. \\ &\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\beta_1(\sigma\,;xy)\,\theta(\sigma\,;xy)\,\bar{\tau}_0(\sigma)\,\bar{\beta}(\sigma\,;xy)\,\alpha(\sigma)\,w(\sigma)\right)\right]d\sigma + \\ &+ \frac{1}{2}\int_\gamma \log\varsigma_0(\sigma\,;xy)\left[\frac{\partial\beta_1(\sigma\,;xy)}{\partial x}\,\theta(\sigma\,;xy)\,\bar{\tau}(\sigma)\,w(\sigma) + \right. \\ &\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\beta_1(\sigma\,;xy)\,\theta(\sigma\,;xy)\,\bar{\tau}_0(\sigma)\,\bar{\beta}_0(\sigma\,;xy)\,\alpha_0(\sigma)\,w(x)\right)\right]d\sigma - \\ &- \iint_C \log|\varsigma(\xi\eta\,;xy)|\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\alpha_0\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\beta_1(\xi\eta\,;xy)}{\partial x}\,\theta(\xi\eta\,;xy)\,w(\xi\eta)\right\}d\xi\,d\eta + \\ &+ \frac{1}{2}\iint_C \left[\frac{\alpha(\xi\eta)}{\varsigma(\xi\eta\,;xy)} + \frac{\alpha_0(\xi\eta)}{\varsigma_0(\xi\eta\,;xy)}\right]\times \\ &\qquad \times\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\alpha_0\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\beta_1(\xi\eta\,;xy)\,\theta(\xi\eta\,;xy)\,w(\xi\eta)\right\}d\xi\,d\eta\,. \end{aligned}$$

Questa formula — come la (14) — è dedotta solo nel caso che C sia sufficientemente piccolo; ma ove ciò non fosse, un ragionamento analogo a quello fatto per riguardo a $V(xy)$ ci permette di estendere la formula stessa a questo caso più generale sostituendo $\beta_1(\xi\eta\,;xy)$ con una conveniente funzione $\bar{\beta}_1(\xi\eta\,;xy)$.

Ma se ad ottenere le formule (II) e (III) è necessario supporre che $w(\xi\eta)$ e $w(\sigma)$ abbiano le derivate prime, e sia $g \geq 2$, per dimostrare che esistono le derivate prime basta assai meno: poichè si ha il seguente

Lemma 4°. *Se $w(\sigma)$ e $w(\xi\eta)$ sono regolari e $g \geq 1$, $V(xy)$ e $W(xy)$ hanno le derivate prime finite.*

La cosa è immediata per $V(xy)$. Infatti, in queste ipotesi vale ancora la (7): ed in questa mentre il primo integrale rappresenta evidentemente una funzione finita e continua anche su γ, il secondo, se perde senso per (xy) su γ, ha tuttavia un limite determinato e finito quando (xy) tende ad un punto s di γ in virtù dei risultati del § VI (n. 19).

Meno semplice è la cosa per $W(\xi\eta)$. Ma osserviamo che, se si suppone che $\theta(\xi\eta\,;xy)$ non dipenda da (xy) e la diciamo come prima $\theta(\xi\eta)$; preso un punto x_0y_0 in cui si vuole calcolare la derivate e posto $\theta(x_0y_0)\,w(x_0y_0) = \theta_0\,w_0$ sarà per le nostre ipotesi

$$|\theta(\xi\eta)\,w(\xi\eta) - \theta_0 w_0| < a_s\, r^{\lambda}(\xi\eta\,;x_0y_0)\,.$$

D'altra parte si può scrivere

$$W(xy) = \theta_0 w_0 \int\!\!\int_C \frac{1}{\varsigma(\xi\eta\,;xy)}\,d\xi\,d\eta + \int\!\!\int_C \frac{1}{\varsigma(\xi\eta\,;xy)}\,[\theta(\xi\eta)\,w(\xi\eta) - \theta_0 w_0]\,d\xi\,d\eta.$$

Ma il primo degli integrali che qui compaiono ammette le derivate prime in virtù del lemma 3°; mentre il secondo le ammette pure, grazie al fatto che le derivate prime dell'integrando divengono infinite solo nel punto $(\xi\eta) \equiv (x_0y_0)$ ed ivi di ordine $\leq 2 - \lambda$ [1].

È chiaro come la cosa si generalizzi al caso in cui θ dipenda pure da xy col derivare prima sotto il segno integrale la θ, e poi col fare la residua parte della derivazione come se la θ non dipendesse da xy.

I ragionamenti precedenti bastano senz'altro a provare i due teoremi seguenti:

Teorema 1°. *Se $w(\sigma)$, $w(\xi\eta)$ hanno le derivate limitate ed integrabili dei primi $g-1$ ordini ed è $g \leq 2n$, le funzioni $V(xy)$ e $W(xy)$ hanno le derivate dei primi $g-1$ ordini regolari, la funzione $U(xy)$ ha le derivate di ordine g finite e continue.*

Teorema 2°. *Se $w(\sigma)$, $w(\xi\eta)$ hanno le derivate continue e regolari dei primi $g-1$ ordini ed è $g \leq 2n$, le funzioni $V(xy)$ e $W(xy)$ hanno le derivate dei primi g ordini.*

Per $g = 1$ il teorema 1° è compreso nei lemmi 1° e 2°, il teorema 2° è il lemma 4°; per $g > 1$ i teoremi si ottengono immediatamente per induzione completa in forza dei lemmi 2° e 3°, e precisamente delle formule (I) (II) (III).

[1] Cfr. per una dimostrazione analoga più ampiamente sviluppata: Dini. *Sur la méthode des approximations successives.* Acta Math., vol. 25, pag. 199 e sgg.

4. Occorre notare l'intima natura dei precedenti ragionamenti, onde averne suggerimento per le generalizzazioni ad integrali di forma analoga che si presenteranno nel seguito. Gli integrali studiati sono del tipo

$$\int_\gamma k(xy\,;\sigma)\,w(\sigma)\,d\sigma\,,\quad \int\!\!\int_C k(xy\,;\xi\eta)\,w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

1°. Per potere affermare che se $w(\xi\eta)$ e $w(\sigma)$ sono integrabili e limitate gli integrali sono regolari (lemma 1°), basterà sapere che $k(xy\,;\sigma)$ e $k(xy\,;\xi\eta)$ divengono rispettivamente in $(xy)\equiv(\sigma)$ ed in $(xy)\equiv(\xi\eta)$ al più infinite di un ordine determinato <1 e <2 e che le loro derivate prime lo divengono di un ordine <2 e <3.

2°. Perchè $\int\!\!\int_C k(xy\,;\xi\eta)\,w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta$ abbia nelle stesse ipotesi le derivate prime (lemma 2°) basterà invece che le derivate prime di $k(xy:\xi\eta)$ divengano infinite al più di un ordine <2.

3°. Per potere affermare che se $w(\sigma)$, $w(\xi\eta)$ sono regolari, gli integrali hanno derivate prime (lemma 4°) è essenziale soltanto sapere che se per $w(\sigma)$ e $w(\xi\eta)$ si pone l'unità, le derivate esistono, ed inoltre che le derivate prime di $k(xy\,;\sigma)$, $k(xy\,;\xi\eta)$ divengono infinite di un ordine $<1+\beta$ e $<2+\beta$, dove β è un numero fisso anche arbitrariamente piccolo.

4°. Infine per poter conchiudere con teoremi analoghi ai teoremi 1° e 2° occorrerà ottenere un sistema di formule come (I) (II) (III) che permettano di fare il ragionamento per induzione completa (lemma 2° e 3°).

5. Applichiamo dunque queste osservazioni ad altri integrali. Consideriamo le funzioni

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{V}_1(xy)=\int_\gamma w(\sigma)\,d\sigma\int_\gamma \log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\,\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1\,,\\
(15)\qquad &\mathrm{W}_1(xy)=\int\!\!\int_C w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i(\xi\eta\,;\sigma_1)}\,\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,\theta(\xi\eta\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1\,,\\
&\mathrm{U}_1(xy)=\int\!\!\int_C w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\int_\gamma \log|\varsigma_i(\xi\eta\,;\sigma_1)|\,\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,\Theta(\xi\eta\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1\,.
\end{aligned}
$$

Le funzioni t, θ, Θ godono delle solite proprietà. Solo per determinare pienamente $\mathrm{V}_1(xy)$ dobbiamo fissare la determinazione del logaritmo; e noi penseremo perciò che $\log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)$ si debba interpretare come il limite di $\log\varsigma_i(\sigma\,;xy)$ quando il punto xy interno a C tende al punto σ_1 di γ, essendo quest'ultimo determinato mediante la convenzione del n. 3 e cioè per modo che sia ovunque continuo tranne che in un punto fisso di $\gamma:\sigma=0$: risulterà pertanto $\log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)$ una funzione continua di σ_1 e di σ tranne che per $\sigma_1\equiv\sigma$ dove diviene infinita, e per $\sigma=0$ dove ha un salto di $(-1)^i\,2\pi i$. Per $\log|\varsigma_i|$ in $\mathrm{U}_1(xy)$ devesi intendere la determinazione reale.

Lemma 1^{bis}. *Se $w(\sigma)$ e $w(\xi\eta)$ sono limitate e $g\geq 1$, $\mathrm{V}_1(xy)$ e $\mathrm{W}_1(xy)$ sono regolari in C (e su γ).*

Si ottiene invero facilmente che la funzione

$$k(\sigma\,;xy)=\int_\gamma \log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1\,.$$

non diviene mai infinita di ordine $>\beta$, e le sue derivate di ordine $>1+\beta$, β essendo un numero positivo arbitrario anche piccolo a piacere [1] (l'infinito principale

[1] Infatti, si osservi che si ha $r(\sigma\,;xy)\leq r(\sigma\,;\sigma_1)+r(\sigma_1\,;xy)$, e quindi se β è un numero positivo piccolo a piacere ma fisso, si ha pure $r^\beta(\sigma\,;xy)=\zeta(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)[r^\beta(\sigma\,;\sigma_1)+r^\beta(\sigma_1\,;xy)]$, dove ζ indica una funzione finita e continua delle variabili da cui dipende. Avremo quindi:

$$r^\beta(\sigma\,;xy)\int_\gamma \log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1=$$

$$=\int_\gamma r^\beta(\sigma\,;\sigma_1)\log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t_1(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1+\int_\gamma \log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\frac{r^\beta(\sigma_1\,;xy)}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t_1(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1$$

con $t_1=t\zeta$. Poichè la funzione $\varphi(\sigma\,;\sigma_1)=r^\beta(\sigma\,;\sigma_1)\log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)$ è finita e continua e, detto β_1 un numero $<\beta$ soddisfa ad una disuguaglianza del tipo $|\varphi(\sigma\,;\sigma'_1)-\varphi(\sigma\,;\sigma''_1)|<\overline{\varphi}_1|\sigma'_1-\sigma''_1|^{\beta_1}$, il primo di questi integrali rappresenta per gli studî dei nn. 15 e 19 del § VI, una funzione finita e continua in C e su γ. Quanto al secondo di questi integrali è esso pure sempre finito basta osservare invero che l'integrando è sempre inferiore ad una quantità della forma $a_0\log r(\sigma\,;\sigma_1)\,r^{1-\beta}(\sigma_1\,;xy)$.

Analogamente si procede nell'esaminare le derivate della nostra funzione, le quali per xy non su γ sono espresse da

$$\frac{\partial k(\sigma\,;xy)}{\partial x}=\int_\gamma \log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\frac{\alpha_k(\sigma_1)}{\varsigma^2_k(\sigma_1\,;xy)}\,t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1+\int_\gamma \log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\frac{\partial t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)}{\partial x}\,d\sigma_1,$$

$$\frac{\partial k(\sigma\,;xy)}{\partial y}=\int_\gamma \log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\frac{1}{\varsigma^2_k(\sigma_1\,;xy)}\,t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1+\int_\gamma \log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\frac{\partial t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)}{\partial y}\,d\sigma_1,$$

$$\frac{\partial k(\sigma\,;xy)}{\partial\sigma}=(-1)^i\pi i\frac{1}{\varsigma_k(\sigma\,;xy)}\,t(\sigma\,;\sigma\,;xy)+\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)}\frac{\overline{\tau}_i(\sigma)}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1+$$

$$+\int_\gamma \alpha'_i(\sigma)\frac{\xi(\sigma)-\xi(\sigma_1)}{\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)}\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1+\int_\gamma \log\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\frac{\partial t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)}{\partial\sigma}\,d\sigma_1\,.$$

Gli ultimi termini di ognuna di queste espressioni ed anche il penultimo termine dell'ultima rappresentano funzioni che divengono infinite di ordine $<\beta$, dove β è un numero anche arbitrariamente piccolo: il primo termine di $\dfrac{\partial k(\sigma\,;xy)}{\partial\sigma}$ è una funzione che diviene infinita di primo ordine al più, onde, per dimostrare l'enunciato, basta provare che anche i primi integrali che compaiono nelle due prime derivate, e l'integrale principale di Cauchy che compare nell'ultima divengono infiniti di ordine $1+\beta$. Ora mediante un'integrazione per parti si vede facilmente che anche lo studio di quegli integrali si riduce facilmente a quello di un integrale principale di Cauchy della forma dell'ultimo. Per questo poi osservando che $r^{1+\beta}(\sigma\,;xy)=\zeta_1(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)[r^{1+\beta}(\sigma\,;\sigma_1)+r^{1+\beta}(\sigma_1\,;xy)]$; si ha:

$$r^{1+\beta}(\sigma\,;xy)\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)}\frac{\overline{\tau}_i(\sigma)}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1=\int_\gamma \frac{r^{1+\beta}(\sigma\,;\sigma_1)}{\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)}\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t_1(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1+$$

$$+\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)}\frac{r^{1+\beta}(\sigma_1\,;xy)}{\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)}\,t_2(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1\,.$$

con $t_2=\overline{\tau}_i\,.\,t\,.\,\zeta_1$. E per entrambi questi integrali ragionando coi metodi soliti del § IV, si dimostra facilmente che rappresentano funzioni finite e continue: il che dice che anche l'integrale di Cauchy primitivo diviene infinito di ordine $\leq 1+\beta$.

essendo $\frac{1}{r(\sigma\,;\,xy)}\Big)$. Ed analogamente

$$k(\xi\eta\,;\,xy)=\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i(\xi\eta\,;\,\sigma_1)}\,\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;\,xy)}\,\theta(\xi\eta\,;\,\sigma_1\,;\,xy)\,d\sigma_1$$

non diviene mai infinita di ordine $>1+\beta$ e la sua derivata di ordine $>2+\beta$ β essendo come sopra un numero positivo fisso anche arbitrariamente piccolo ([1]). Segue immediatamente il nostro lemma come si è rammentato in 1°, n. 4.

Lemma 2^{bis}. *Se $w(\xi\eta)$ è limitata e $g \geqq 1$, $U_1(xy)$ ha le derivate prime finite e continue, le quali si esprimono per mezzo di funzioni U_1 e W_1 in cui le funzioni che fungono da funzioni θ e Θ dipendono rispettivamente dalla Θ soltanto oppure dalle sue derivate prime e di funzioni che hanno tutte le derivate il cui ordine non supera g nè $2n$.*

Infatti si ha per es. che la derivata rapporto ad x di U per (xy) interno a C è data da

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}=\iint_C w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\int_\gamma \log|\varsigma_i(\xi\eta\,;\,\sigma_1)|\,\frac{\alpha_k(\sigma_1)}{\varsigma_k^2(\sigma_1\,;\,xy)}\,\Theta(\xi\eta\,;\,\sigma_1\,;\,xy)\,d\sigma_1+$$
$$+\iint_C w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\int_\gamma \log|\varsigma_i(\xi\eta\,;\,\sigma_1)|\,\frac{1}{\varsigma_k(\sigma\,;\,xy)}\,\frac{\partial\Theta(\xi\eta\,;\,\sigma_1\,;\,xy)}{\partial x}\,d\sigma_1\,.$$

E si può, colle solite integrazioni per parti, portarla nella forma:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}\simeq\iint_C w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\int_\gamma \log|\varsigma_i(\xi\eta\,;\,\sigma_1)|\,\frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1\,;\,xy)}\times$$
$$\text{(IV)}\qquad\times\left[\frac{\partial\Theta(\xi\eta\,;\,\sigma_1\,;\,xy)}{\partial x}+\frac{\partial\Theta(\xi\eta\,;\,\sigma_1\,;\,xy)\,\bar\beta_2(\sigma_1\,;\,xy)}{\partial\sigma_1}\right]d\sigma_1+$$
$$+\frac{1}{2}\iint_C w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\int_\gamma\left[\frac{\tau_i(\xi\eta\,;\,\sigma_1)}{\varsigma_i(\xi\eta\,;\,\sigma_1)}+\frac{\tau_{i0}(\xi\eta\,;\,\sigma_1)}{\varsigma_{i0}(\xi\eta\,;\,\sigma_1)}\right]\frac{\Theta(\xi\eta\,;\sigma_1\,;xy)\,\bar\beta_2(\sigma_1\,;\,xy)}{\varsigma_k(\sigma_1\,;\,xy)}\,d\sigma_1,$$

dove $\bar\beta_2$ è, analogamente alla $\bar\beta$ del n. 4, data almeno per $r(xy\,;\,\sigma)<\frac{\mu}{\bar\alpha'(M+1)}$, da

$$\bar\beta_2(\sigma_1\,;\,xy)=\frac{\alpha_k(\sigma_1)}{\tau_k(\sigma_1)+\alpha_k'(\sigma_1)\,(\xi(\sigma_1)-x)}\,.$$

Il primo dei termini di (IV)′ è un'espressione U_1, del tipo voluto, il secondo è la somma di due funzioni W_1.

Lemma 3^{bis}. *Se $w(\xi\eta)$ e $w(\sigma)$ hanno derivate prime e $g \geqq 1$, $V_1(xy)$ e $W_1(xy)$ hanno le derivate prime finite e continue le quali si esprimono come somme di*

[1] Per riguardo a $k(\xi\eta\,;\,xy)$ vedi i risultati dei nn. 20, 21 e sg. del § VI. Per quanto riguarda le sue derivate si possono imitare facilmente quei ragionamenti. In entrambi i casi è ancora più semplice ripetere ragionamenti simili a quelli della nota precedente.

una funzione che ha le derivate il cui ordine non supera g, nè $2n$, e di funzioni del tipo di V_1, W_1, U_1 in cui le funzioni che hanno l'ufficio delle funzioni t, θ, Θ sono formate con le t, θ, w primitive colle loro derivate prime e colle derivate prime e seconde di $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$, $\alpha_i(xy)$, $\alpha_k(xy)$.

Precisamente coi soliti procedimenti di integrazione per parti, la derivata di $V_1(xy)$ rapporto ad x, che quando (xy) è interno a C si può scrivere

$$(16)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x} = \int_\gamma w(\sigma)\, d\sigma \int_\gamma \log \varsigma_i(\sigma;\sigma_1) \frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1;xy)} \frac{\partial t(\sigma;\sigma_1;xy)}{\partial x} d\sigma_1 + \\ + \int_\gamma w(\sigma)\, d\sigma \int_\gamma \log \varsigma_i(\sigma;\sigma_1) \frac{\alpha_k(\sigma_1)}{\varsigma_k^2(\sigma_1;xy)} t(\sigma;\sigma_1;xy)\, d\sigma_1, \end{aligned}$$

si può trasformare giungendo alla formula seguente:

$$(\mathrm{V})\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x} \simeq \int_\gamma d\sigma \int_\gamma \log \varsigma_i(\sigma;\sigma_1) \frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1;xy)} \times \\ \times \Bigg[\frac{\partial t(\sigma;\sigma_1;xy)}{\partial x} w(\sigma) + w(\sigma) \frac{\partial(\bar\beta_3(\sigma_1;xy)\,\alpha_k(\sigma_1)\, t(\sigma;\sigma_1;xy))}{\partial \sigma_1} - \\ - \bar\beta_3(\sigma_1;xy)\,\alpha_k(\sigma_1) \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(w(\sigma)\, t(\sigma;\sigma_1;xy)\, r_i(\sigma;\sigma_1)\, \bar\beta_4(\sigma;\sigma_1)\right)\Bigg] d\sigma_1, \end{aligned}$$

essendo, almeno per $r(xy;\sigma) < \dfrac{\mu}{\alpha'(M+1)}$,

$$\bar\beta_3(\sigma_1;xy) = \frac{1}{\bar\tau_k(\sigma_1) + \alpha_k'(\sigma_1)(\xi(\sigma_1) - x)}$$

$$\bar\beta_4(\sigma;\sigma_1) = \frac{1}{\bar\tau_i(\sigma) + \alpha_i'(\sigma)(\xi(\sigma) - \xi(\sigma_1))}.$$

Analoga formula vale per $W(xy)$.

Lemma 4^{bis}. *Se $w(\xi\eta)$, $w(\sigma)$ sono funzioni regolari, esistono e sono finite e continue le derivate prime di $V_1(xy)$ e di $W_1(xy)$.*

Consideriamo ad es. $V_1(xy)$. Al solito potremo per semplicità supporre t indipendente da xy, poichè ciò non porta alcuna complicazione: chiamiamolo $t(\sigma;\sigma_1)$. Avremo allora

$$\begin{aligned} V_1(xy) = w(s) \int_\gamma d\sigma \int_\gamma \log \varsigma_i(\sigma;\sigma_1) \frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1;xy)} t(s;\sigma_1)\, d\sigma_1 + \\ \int_\gamma d\sigma \int_\gamma \log \varsigma_i(\sigma;\sigma_1) \frac{1}{\varsigma_k(\sigma_1;xy)} [t(\sigma;\sigma_1)\, w(\sigma) - t(s;\sigma_1)\, w(s)]\, d\sigma_1. \end{aligned}$$

Il primo integrale è un integrale V_1 in cui $w(\sigma) = 1$ e quindi per il lemma 3^{bis} esistono le sue derivate prime. Quanto al secondo integrale osserviamo che almeno se si suppone che (xy) tenda ad s restando sulla normale a s in γ, si avrà per (xy) sufficientemente vicino a γ [form. (3) di pag. 25] $r(xy\,;\sigma) > \frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma - s|$. Per la supposta regolarità di $w(\sigma)$ e $t(\sigma\,;\sigma_1)$ sarà quindi $|t(\sigma\,;\sigma_1)\,w(\sigma) - t(s\,;\sigma_1)\,w(s)| < a_{10}|s-\sigma|^\lambda < a_{11}\,r^\lambda(xy\,;\sigma)$. Ne segue ricordando i ragionamenti della nota del lemma 1^{bis} che la derivata rapporto ad x dell'integrando del secondo integrale scritto sopra:

$$\int_\gamma \log \varsigma_i(\sigma\,;\sigma_1)\,\frac{\alpha_k(\sigma_1)}{\varsigma_k^2(\sigma_1\,;xy)}\,[t(\sigma\,;\sigma_1)\,w(\sigma) - t(s\,;\sigma_1)\,w(s)]\,d\sigma_1$$

diviene infinita per $(s) \equiv (\sigma)$ di ordine $< 1 - \lambda'$, λ' essendo un numero positivo $< \lambda$ anche quando xy tende ad s; e quindi esiste la derivata di questo secondo integrale.

I teoremi precedenti ci dànno come al n. 3, i seguenti:

Teorema 1^{bis}. *Se $w(\sigma)$, $w(\xi\eta)$ hanno le derivate limitate ed integrabili dei primi $g-1$ ordini ed è $g \leq 2n$ le funzioni $V_1(xy)$ e $W_1(xy)$ hanno le derivate dei primi $g-1$ ordini regolari, la funzione $U_1(xy)$ ha le derivate di ordine $\leq g$ finite e continue.*

Teorema 2^{bis}. *Se $w(\sigma)$, $w(\xi\eta)$ hanno le derivate continue e regolari dei primi $g-1$ ordini ed è sempre $g \leq 2n$, le funzioni $V_1(xy)$ e $W_1(xy)$ hanno le derivate di ordine $\leq g$ finite e continue.*

6. Ed ancora qualche ulteriore estensione dei precedenti teoremi ci occorrerà in seguito. Ci occorrerà ad es. considerare integrali della forma

$$W_j(xy) = \int\!\!\int_C w(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta \times \tag{17}$$
$$\times \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i^j(\xi\eta\,;\sigma_1)}\,\varsigma_k^{j-2}(\sigma_1\,;xy)\log\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)\;\theta_j(\xi\eta\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1\,,$$

dove devesi intendere $j \geq 2$ ed il logaritmo deve pensarsi determinato secondo la solita norma in modo che risulti una funzione finita e continua tranne che per $\sigma_1 = 0$.

Aggiungeremo ancora che si supporrà sempre che θ ammetta almeno le derivate dei primi $j-1$ ordini rapporto a σ_1.

In questa ipotesi che per la funzione $W_j(xy)$ valga il lemma 1° risulterà subito ove si noti che per mezzo di $j-1$ integrazioni per parti rapporto a σ_1 la funzione

$$\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i^j(\xi\eta\,;\sigma_1)}\,\varsigma_k^{j-2}(\sigma_1\,;xy)\log\varsigma_k(\sigma_1\,;xy)\;\theta_j(\xi\eta\,;\sigma_1\,;xy)\,d\sigma_1$$

si può riportare alla forma della funzione che compare in $W_1(xy)$. E per le osservazioni generali del n. 4, questo ci proverà senz'altro che anche il lemma 4° sarà facile a stabilirsi dopo che si sia provato che nell'ipotesi che $w(\xi\eta)$ abbia le derivate prime vale il lemma 3°. Se però a stabilire quest'ultimo noi ricorressimo direttamente al metodo di integrare per parti ora richiamato, giungeremmo sì al risultato, ma dovremmo poi mantenere sempre il numero g di $j-1$ unità più elevato del numero delle derivate di cui vuolsi provare l'esistenza. Ad evitare questo inconveniente converrà invece appunto perciò ragionare direttamente in modo simile ai numeri precedenti: e si dovranno così introdurre funzioni analoghe alle funzioni U, V, per mezzo delle quali completare un sistema di formule analogo al sistema (I) (II) (III) che renda possibile dare al ragionamento forma ricorrente. Così ad es. per calcolare la derivata prima rapporto ad x si osserverà che si può scrivere:

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial W_j(xy)}{\partial x} &= \iint_C w(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta \times \\
&\times \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i^j(\xi\eta\,;\sigma_1)} \varsigma_k^{j-2}(\sigma_1\,;xy) \log \varsigma_k(\sigma\,;xy) \frac{\partial \theta_j(\xi\eta\,;\sigma_1\,;xy)}{\partial x} d\sigma_1 + \frac{\partial [W_j(xy)]}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

dove con $\dfrac{\partial [W_j(xy)]}{\partial x}$ abbiamo voluto indicare la derivata di W_j fatta pensando la θ come indipendente da x ed y. Per eseguire questa derivazione si osserverà poi che si può scrivere

$$
\begin{aligned}
W_j(xy) \simeq &- \iint_C d\xi\, d\eta \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i^{j-1}(\xi\eta\,;\sigma_1)} \varsigma_k^{j-2}(\sigma_1\,;xy) \log \varsigma_k(\sigma_1\,;xy) \times \\
&\times \frac{\partial(\theta_j(\xi\eta\,;\sigma_1\,;xy)\, w(\xi\eta)\, \bar\beta_5(\xi\eta\,;\sigma_1))}{\partial \xi} d\sigma_1 + \\
&+ \int_\gamma w(\sigma)\, d\sigma \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i^{j-1}(\sigma\,;\sigma_1)} \varsigma_k^{j-2}(\sigma_1\,;xy) \log \varsigma_k(\sigma_1\,;xy)\, \theta_j(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\, \bar\beta_5(\sigma\,;\sigma_1)\, d\sigma_1 .
\end{aligned}
$$

dove è almeno per $r(\xi\eta\,;\sigma_1) < \dfrac{\mu}{\bar\alpha'(M+1)}$

$$
\bar\beta_5(\xi\eta\,;\sigma_1) = \frac{1}{-(j-1)\left[\tau_i(\xi\eta\,;\sigma_1) + \dfrac{\partial \alpha_i(\xi\eta)}{\partial \xi}(\xi - \xi(\sigma_1)\right]}\,.
$$

E quindi se si deriva questa espressione pensando, come si disse, la θ indipendente da xy, si avrà

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial [W_j(xy)]}{\partial x} \simeq &- \iint_C d\xi\, d\eta \int_\gamma \frac{j-2}{\varsigma_i^{j-1}(\xi\eta\,;\sigma_1)} \varsigma_k^{j-3}(\sigma_1\,;xy) \log \varsigma_k(\sigma_1\,;xy)\, \alpha_k(\sigma_1) \times \\
&\times \frac{\partial(\theta_j(\xi\eta\,;\sigma_1\,;xy)\, w(\xi\eta)\, \bar\beta_5(\xi\eta\,;\sigma_1))}{\partial \xi} d\sigma_1 - \\
&- \iint_C d\xi\, d\eta \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i^{j-1}(\xi\eta\,;\sigma_1)} \varsigma_k^{j-3}(\sigma_1\,;xy)\, \alpha_k(\sigma_1) \times \\
&\times \frac{\partial(\theta_j(\xi\eta\,;\sigma_1\,;xy)\, w(\xi\eta)\, \bar\beta_5(\xi\eta\,;\sigma_1))}{\partial \xi} d\sigma_1 + \\
&+ \int_\gamma w(\sigma)\, d\sigma \int_\gamma \frac{j-2}{\varsigma_i^{j-1}(\sigma\,;\sigma_1)} \times \\
&\times \varsigma_k^{j-3}(\sigma_1\,;xy) \log \varsigma_k(\sigma_1\,;xy)\, \alpha_k(\sigma_1)\, \theta_j(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\, \bar\beta_5(\sigma\,;\sigma_1)\, d\sigma_1 + \\
&+ \int_\gamma w(\sigma)\, d\sigma \int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i^{j-1}(\sigma\,;\sigma_1)} \times \\
&\times \varsigma_k^{j-3}(\sigma_1\,;xy)\, \alpha_k(\sigma_1)\, \theta_j(\sigma\,;\sigma_1\,;xy)\, \bar\beta_5(\sigma\,;\sigma_1)\, d\sigma_1 .
\end{aligned}
$$

E queste formule (18) (19) esprimono la derivata cercata per mezzo di integrali dei tipi $W_j(xy)$, $W_{j-1}(xy)$ ed infine di integrali come gli ultimi due della (19) od il terz'ultimo della medesima formula che sono quelli che debbono qui assumersi come integrali V_j od U_j rispettivamente.

7. Ed ancora gli stessi teoremi valgono per integrali più complicati:

$$(20)^{(1)} \quad \begin{cases} W_1^{(1)}(xy) = \displaystyle\iint_C w(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta \int_\gamma \frac{d\sigma_1}{\varsigma_i(\xi\eta\,;\sigma_1)} \int_\gamma \log \varsigma_k(\sigma_1\,;\sigma_2)\, \frac{1}{\varsigma_h(\sigma_2\,;xy)}\, \theta(\xi\eta\,;\sigma_1\,;\sigma_2\,;xy)\, d\sigma_2 \\ W_j^{(1)}(xy) = \displaystyle\iint_C w(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta \int_\gamma \frac{d\sigma_1}{\varsigma_i^j(\xi\eta\,;\sigma_1)} \int_\gamma \log \varsigma_k(\sigma_1\,;\sigma_2)\, \varsigma_h^{j-2}(\sigma_2\,;xy) \log \varsigma_h(\sigma_2\,;xy) \times \\ \qquad \times\, \theta(\xi\eta\,;\sigma_1\,;\sigma_2\,;xy)\, d\sigma_2\,, \quad \text{per } j \geqq 2\,, \end{cases}$$

$$(20)^{(2)} \quad \begin{cases} W_1^{(2)}(xy) = \displaystyle\iint_C w(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta \int_\gamma \frac{d\sigma_1}{\varsigma_i(\xi\eta\,;\sigma_1)} \int_\gamma \log \varsigma_k(\sigma_1\,;\sigma_2)\, d\sigma_2 \int_\gamma \log \varsigma_h(\sigma_2\,;\sigma_3) \times \\ \qquad \times\, \dfrac{1}{\varsigma_l(\sigma_3\,;xy)}\, \theta(\xi\eta\,;\sigma_1\,;\sigma_2\,;\sigma_3\,;xy)\, d\sigma_3 \\ W_j^{(2)}(xy) = \displaystyle\iint_C w(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta \int_\gamma \frac{d\sigma_1}{\varsigma_i^j(\xi\eta\,;\sigma_1)} \int_\gamma \log \varsigma_k(\sigma_1\,;\sigma_2)\, d\sigma_2 \int_\gamma \log \varsigma_h(\sigma_2\,;\sigma_3) \times \\ \qquad \times\, \varsigma_l^{j-2}(\sigma_3\,;xy) \log \varsigma_l(\sigma_3\,;xy)\, \theta(\xi\eta\,;\sigma_1\,;\sigma_2\,;\sigma_3\,;xy)\, d\sigma_3\,, \\ \qquad \text{per } j \geqq 2\,, \end{cases}$$

. . . .

sui quali si può procedere come pur anzi. E si potrebbe anche dire di più che questi integrali (20) sono via via meno singolari: così non sarebbe difficile provare che $W_j^{(1)}(xy)$ ammette le derivate prime tosto che si suppone $w(\xi\eta)$ integrabile e limitata, e $W_j^{(2)}(xy)$ ha queste derivate prime regolari, e $W_j^{(3)}(xy)$ ammette le derivate seconde ecc. Ma questa ulteriore precisione dei risultati non ci è necessaria [1].

8. Premessi questi teoremi, esponiamo la traccia del nostro ragionamento.

Si tratta di mostrare che le soluzioni dell'equazione integrale omogenea (9) del § IX:

$$(21) \qquad \pi(x_1y_1) + \iint_C \chi(xy\,;x_1y_1)\, \pi(xy)\, dx\, dy = 0\,,$$

hanno le derivate dei primi $2n$ ordini. Supponiamo perciò che la funzione $\chi(xy\,;x_1y_1)$

[1] Esaminiamo ad es. il più semplice degl'integrali $W_j^{(1)}(xy)$ quello che corrisponde a $j=1$. Se poniamo $\displaystyle\iint_C \frac{w(\xi\eta)\,\theta(\xi\eta\,;\sigma_1\,;\sigma_2\,;xy)}{\varsigma_i(\xi\eta\,;\sigma_1)}\, d\xi\, d\eta = t(\sigma_1\,;\sigma_2\,;xy)$ la funzione t, mentre ammette le stesse derivate che θ rapporto a σ_2 ed xy, è regolare rapporto a σ_1. Si può allora scrivere

$$W_1^{(1)}(xy) = \int_\gamma d\sigma_1 \int_\gamma \log \varsigma_k(\sigma_1\,;\sigma_2)\, \frac{1}{\varsigma_h(\sigma_2\,;xy)}\, t(\sigma_1\,;\sigma_2\,;xy)\, d\sigma_1\,,$$

così $W_1^{(1)}(xy)$ resta espresso per mezzo di un integrale V del tipo $V_1(xy)$ del n. 6 con la funzione t derivabile rapporto a σ_2 ed xy, regolare rapporto a σ_1: sarà quindi funzione derivabile.

sia proprio una somma di quelle che compaiono negli integrali $W, W_1, W_j, W'_j, \ldots$ Dal fatto che $\pi(xy)$ è, come si vide al § IX, finita ed integrabile, seguirà che l'integrale di (21) è regolare (teorema 1°), e perciò per (21) che $\pi(x_1 y_1)$ è pure regolare; e quindi l'integrale di (21) avrà derivate prime (teorema 2°) e perciò per (21) le possiederà pure $\pi(xy)$; ed allora di nuovo pel teorema 1°, queste derivate saranno regolari ecc. Si potrà così conchiudere che la $\pi(xy)$ ha finite e continue tutte le derivate il cui ordine non supera nè il numero $2n$, nè il numero g che indica quante derivate possiedano i coefficienti θ degli integrali precedenti.

Nè la conclusione verrà mutata se in $\chi(xy\,;\,x_1 y_1)$ oltre ad entrare come addendi funzioni del tipo anzidetto entreranno funzioni che ammettano già le derivate dei primi $2n$ ordini finite e continue, oppure funzioni che ammettano le derivate dei primi $l-1$ ordini finite e continue e le cui derivate l^{esime} siano funzioni di quelle che compaiono negli integrali $W, W_1, \ldots$ purchè in questi casi i coefficienti θ ammettano le derivate dei primi $g-l$ ordini.

Occorre dunque esaminare la funzione $\chi(xy\,;\,x_1 y_1)$ che compare in (21).

Ora conviene osservare che essa consta di due parti, l'una $\mathfrak{C}\psi(xy\,;\,x_1 y_1)$ proveniente da $\psi(xy\,;\,x_1 y_1)$, l'altra $\mathfrak{C}g(xy\,;\,x_1 y_1)$ dalla funzione compensatrice $g(xy\,;\,x_1 y_1) = - e(xy\,;\,x_1 y_1) + e_1(xy\,;\,x_1 y_1)$. La prima è pienamente nota nella sua espressione analitica; non così la seconda che è solamente nota in parte per quanto si riferisce a $e(xy\,;\,x_1 y_1)$; la possibilità di costruire la $e_1(xy\,;\,x_1 y_1)$ risulta solo dal § I dell'Appendice, e questa non ci fornisce una espressione analitica della funzione che ci permetta di studiarne comodamente le singolarità.

Noi quindi, come già facemmo nel § VIII, particolarizzeremo ulteriormente la costruzione della funzione compensatrice; per modo che essa risulti costituita di un gruppo di termini perfettamente noti nella loro forma analitica e di una funzione costruita nel modo indicato nel § 1 dell'Appendice, finita e continua con tutte le sue derivate che non contengono più di $2n$ derivazioni rapporto ad xy, nè rapporto ad $x_1 y_1$. Indi mostreremo come realmente dopo ciò l'integrale contenuto nella equazione (21) sia del tipo degli integrali W.

9. Incominciamo da questa costruzione della funzione compensatrice.

Sia come al n. 26 (pag. 47, form. (11))

$$
\begin{aligned}
(22)\qquad \varDelta_{j,i}(s\,;\,\sigma) = \Sigma_m\, a_m^{n-i}(s)\, \mathrm{L}_{mj}(s\,;\,\sigma) + \frac{1}{(n-2)!} \times \\
\times \left\{ \Sigma_m\, p_{m,n-i\,i-1}^{(j)}(s\,;\,\sigma) \log \varsigma_m(s\,;\,\sigma) + \mathrm{P}_{m,n-i\,i-1}(s\,;\,\sigma) \right\};
\end{aligned}
$$

poniamo

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
\varDelta_{j,i}^{(1)}(s\,;\,\sigma) &= \int_\gamma \Sigma'_m\, \varDelta_{j,m}(s\,;\,\sigma_1)\, \varDelta_{m,i}(\sigma_1\,;\,\sigma)\, d\sigma_1\,, \\
\varDelta_{j,i}^{(2)}(s\,;\,\sigma) &= \int_\gamma \Sigma_m\, \varDelta_{j,m}(s\,;\,\sigma_1)\, \varDelta_{m,i}^{(1)}(\sigma_1\,;\,\sigma)\, d\sigma_1\,, \\
\varDelta_{j,i}^{(3)}(s\,;\,\sigma) &= \int_\gamma \Sigma_m\, \varDelta_{j,m}(s\,;\,\sigma_1)\, \varDelta_{m,i}^{(2)}(\sigma_1\,;\,\sigma)\, d\sigma_1\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

La funzione $\Delta_{ji}(s\,;\sigma)$ è una funzione che ha tutte le derivate che non contengono più di $n+1$ derivazioni rapporto a σ, nè rapporto ad s [1], ma per $s\equiv\sigma$ ha essa una singolarità logaritmica, e le sue derivate k^{esime} una singolarità di ordine k. Noti teoremi ci dicono che le stesse derivate possiederanno le $\Delta_{j,i}^{(1)}, \Delta_{j,i}^{(2)}, \ldots$ e che le derivate k^{esime} di $\Delta_{j,i}^{(1)}, \Delta_{j,i}^{(2)}, \ldots$ avranno una singolarità di ordine $<k$, $\leq k-1$ ecc. Onde se noi consideriamo le $\Delta_{j,i}^{(2n+3)}(s\,;\sigma)$ esse avranno le derivate che non contengono più di $n+1$ derivazioni rapporto ad s nè più di $n+1$ rapporto a σ tutte finite e continue.

10. Poniamo ancora come al n. 31 del § VIII

$$(23)\qquad \begin{cases} e_{1,i}(s\,;x_1y_1)=\left[\dfrac{\partial^{n-1}\{e(xy\,;x_1y_1)-\psi(xy\,;x_1y_1)\}}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)=s}= \\ \qquad =\displaystyle\int_\gamma \Sigma_j\Delta_{j,i}(s\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma. \end{cases}$$

E continuiamo la costruzione delle funzioni:

$$(24)^{(1)}\qquad \begin{cases} e^{(1)}(xy\,;x_1y_1)=\dfrac{1}{(n-2)!}\Sigma_j\displaystyle\int_\gamma \Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)\,e_{1,j}(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,, \\ e_{1,i}^{(1)}(s\,;x_1y_1)\ =\left[\dfrac{\partial^{n-1}e^{(1)}(xy\,;x_1y_1)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)=s}-e_{1,i}(s\,;x_1y_1)= \\ \qquad =\displaystyle\int_\gamma \Sigma_j\Delta_{j,i}^{(1)}(s\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,, \end{cases}$$

$$(24)^{(2)}\qquad \begin{cases} e^{(2)}(xy\,;x_1y_1)=\dfrac{1}{(n-2)!}\Sigma_j\displaystyle\int_\gamma \Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)\,e_{1,j}^{(1)}(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,, \\ e_{1,i}^{(2)}(s\,;x_1y_1)\ =\left[\dfrac{\partial^{n-1}e^{(2)}(xy\,;x_1y_1)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)}-e_{1,i}^{(1)}(s\,;x_1y_1)= \\ \qquad =\displaystyle\int_\gamma \Sigma_j\Delta_{j,i}^{(2)}(s\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,, \end{cases}$$

. . . .

$$(24)^{(2n+3)}\qquad \begin{cases} e^{(2n+3)}(xy\,;x_1y_1)=\dfrac{1}{(n-2)!}\Sigma_j\displaystyle\int_\gamma \Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)\,e_{1,j}^{(2n+2)}(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,, \\ e_{1,i}^{(2n+3)}(s\,;x_1y_1)\ =\left[\dfrac{\partial^{n-1}e^{(2n+3)}(xy\,;x_1y_1)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)}-e_{1,i}^{(2n+2)}(s\,;x_1y_1)= \\ \qquad =\displaystyle\int_\gamma \Sigma_j\Delta_{j,i}^{(2n+3)}(s\,;\sigma)\,\psi_j(\sigma\,;x_1y_1)\,d\sigma\,. \end{cases}$$

[1] Anzi ha tutte le derivate che non hanno più di $n+1$ derivazioni rapporto ad s nè più di $2n$ rapporto a σ.

Le funzioni $e_{1,i}^{(2n+3)}(s\,;x_1y_1)$ ammetteranno, come risulta evidente dalle osservazioni che procedono sulle $A_{j,i}^{(2n+3)}(s\,;\sigma)$ e dagli studî del § V, le derivate che non contengono più di $n+1$ derivazioni rapporto ad s, nè più di $2n$ rapporto ad x_1y_1 e quindi potremo secondo il § I dell'Appendice costruire una funzione $e_1(xy\,;x_1y_1)$ che abbia le derivate che non contengono più di $2n$ derivazioni rapporto a xy, nè rapporto a x_1y_1 finite e continue e tali $\left[\dfrac{\partial^{n-1} e_1(xy\,;x_1y_1)}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-1}}\right]_{(xy)\equiv(s)} = e_{1,i}^{(2n+3)}(s\,;x_1y_1)$. *Prenderemo come funzione compensatrice la*

$$(25)\qquad \begin{aligned} g(xy\,;x_1y_1) = &- e(xy\,;x_1y_1) + e^{(1)}(xy\,;x_1y_1) - e^{(2)}(xy\,;x_1y_1) + \\ &+ \cdots - e^{(2n+3)}(xy\,;x_1y_1) + e_1(xy\,;x_1y_1). \end{aligned}$$

11. Corrispondentemente a questa scelta della funzione compensatrice avremo che la funzione $\chi(\xi\eta\,;xy)$ dell'equazione (21) è data da

$$\begin{aligned} \chi(xy\,;x_1y_1) = \mathfrak{E}\,\psi(xy\,;x_1y_1) - \mathfrak{E}\,e(xy\,;x_1y_1) + \mathfrak{E}\,e^{(1)}(xy\,;x_1y_1) + \\ + \cdots - \mathfrak{E}\,e^{(2n+3)}(xy\,;x_1y_1) + \mathfrak{E}\,e_1(xy\,;x_1y_1). \end{aligned}$$

Dunque per le osservazioni del n. 8 basterà mostrare che tutti gli integrali

$$(26)\qquad \iint_C \mathfrak{E}\,\psi(xy\,;x_1y_1)\,\pi(xy)\,dx\,dy$$

$$(27)\qquad \iint_C \mathfrak{E}\,e(xy\,;x_1y_1)\,\pi(xy)\,dx\,dy$$

$$(28)\qquad \iint_C \mathfrak{E}\,e^{(i)}(xy\,;x_1y_1)\,\pi(xy)\,dx\,dy \qquad (i = 1\ldots 2n+3)$$

$$(29)\qquad \iint_C \mathfrak{E}\,e_1(xy\,;x_1y_1)\,\pi(xy)\,dx\,dy,$$

o dànno funzioni $2n$ volte derivabili rapporto ad x_1y_1 oppure funzioni cui si può applicare i teoremi 1° e 2° dei nn. 3 e sgg. nel modo indicato al n. 8 con $g \geq 2n$, od infine funzioni le cui derivate k^{esime} sono tali che si può loro applicare i teoremi 1° e 2° dei nn. 3 e sgg. con $g \geq 2n - k$. Intanto l'integrale (29) ammette tutte le derivate dei primi $2n$ ordini tosto che si suppone $\pi(xy)$ integrabile, poichè tali derivate ammette $e_1(xy\,;x_1y_1)$. Esaminiamo dunque gli altri integrali (26), (27), (28). Cominciamo coll'integrale (26). Si può scrivere

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}\,\psi(xy\,;x_1y_1) = \sum_1^{2n}{}_j \Big\{ \frac{p_j(xy\,;x_1y_1)}{\varsigma_j(xy\,;x_1y_1)} + \\ + \sum_0^{2n-2}{}_l\, p_{j,l}(xy\,;x_1y_1)\,\varsigma_j^l(xy\,;x_1y_1)\log \varsigma_j(xy\,;x_1y_1) \Big\} + \mathrm{P}(xy\,;x_1y_1), \end{aligned}$$

dove le $p_j(xy\,;x_1y_1)$ hanno tutte le derivate che non contengono più di $2n$ derivazioni rapporto ad x e rapporto ad y, e $p_{j,l}(xy\,;x_1y_1)$ ammettono tutte le derivate che non contengono più di $2n-l-1$ derivazioni rapporto a xy, mentre $\mathrm{P}(xy\,;x_1y_1)$ è una funzione finita e continua con tutte le sue derivate rapporto a x_1y_1 (¹).

Quindi l'integrale (26) sarà una somma di integrali dei tre tipi:

$$\int\!\!\int_{\mathrm{C}} \frac{p_j(xy\,;x_1y_1)}{\varsigma_j(xy\,;x_1y_1)}\,\pi(xy)\,dx\,dy\,,$$

$$(30)\qquad \int\!\!\int_{\mathrm{C}} p_{j,l}(xy\,;x_1y_1)\,\varsigma_j^l(xy\,;x_1y_1)\log\varsigma_j(xy\,;x_1y_1)\,\pi(xy)\,dx\,dy\,,$$

$$\int\!\!\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}(xy\,;x_1y_1)\,\pi(xy)\,dx\,dy\,.$$

I primi di questi integrali (30) sono proprio integrali del tipo delle $\mathrm{W}(xy)$ del n. 3 con $g=2n$ e quindi valgono per essi i teoremi 1° e 2° e la loro applicazione successiva è permessa $2n$ volte, onde per quanto li riguarda si può provare che $\pi(xy)$ è $2n$ volte derivabile.

I secondi integrali (30) si possono derivare $l+1$ volta sotto il segno: le derivate $l+1^{esime}$ sono date da

$$(31)\qquad \int\!\!\int_{\mathrm{C}} p'_{jl}(xy\,;x_1y_1)\,\frac{1}{\varsigma_j(xy\,;x_1y_1)}\,\pi(xy)\,dx\,dy,$$

dove $p'_{jl}(xy\,;x_1y_1)$ ammette ancora le derivate dei primi $2n-l-1$ ordini finite e continue rapporto a x, y. Quindi queste derivate $(l+1)^{esime}$ sono proprio integrali del tipo $\mathrm{W}(xy)$ del n. 3 con $g=2n-l-1$, e quindi ad essi si può applicare i teoremi 1° e 2° $2n-l-1$ volte; quindi anche per quanto dipende dai secondi degli integrali (30) si può provare che la $\pi(xy)$ è $2n$ volte derivabile.

I terzi integrali (30) sono senz'altro funzioni $2n$ volte derivabili.

(¹) Queste proprietà dei coefficienti p che compaiono in $\mathfrak{C}\psi(xy\,;x_1y_1)$ risultano assai facilmente ove si osservi anzitutto che termini in $\dfrac{1}{\varsigma_j(xy\,;x_1y_1)}$, od in $\varsigma_j{}^l(xy\,;x_1y_1)\log\varsigma_j(xy\,;x_1y_1)$ compaiono solo nelle derivate di $\psi(xy\,;x_1y_1)$ di ordine $\geq 2n-1$, e $\geq 2n-2-l$ respettivamente e quindi intanto in derivate i cui coefficienti nell'espressione di $\mathfrak{C}$ hanno le derivate rapporto ad x e y di ordine $\leq 2n$ o $\leq 2n-1-l$ appunto. Quanto poi ai coefficienti con cui essi compaiono in ciascuna di queste derivate occorre notare che essi si ottengono considerando nella derivazione della $\psi(xy\,;x_1y_1)$ $2n-1$ o $2n-2-l$ volte le α_i come costanti, e le residue volte derivando rapporto ad x od y in quanto la ψ contiene queste variabili nelle $\alpha_j(xy)$; e quindi contengono al più le derivate prime o di ordine $\leq l+2$ di queste funzioni α, onde anche per questo riguardo tali coefficienti hanno almeno le derivate di ordine $2n$ o $2n-l-1$ rispettivamente.

12. Passiamo ad esaminare gli integrali (27). Si osservi che si ha:

$$(32)\quad \begin{aligned} \mathfrak{S}\Omega^{(j)}(xy;\sigma) &= \sum_1^{2n}{}_i\Big[\sum_0^n{}_l \frac{1}{\varsigma_i^{n-l+1}(xy;\sigma)}\, p_{i,l}^{(j)}(xy;\sigma) + \\ &\quad + \sum_0^{n-2}{}_l\, \varsigma_i^l(xy;\sigma)\log\varsigma_i(xy;\sigma)\, p_{i,n+l+1}^{(j)}(xy;\sigma)\Big] + \mathrm{P}^{(j)}(xy;\sigma)\,, \\ \psi_j(\sigma;x_1y_1) &= \sum_1^{2n}{}_k \sum_0^{n-1}{}_l\, \varsigma_k^{n-1+l}(\sigma;x_1y_1)\log\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)\,\overline{p}_{k,l}^{(j)}(\sigma;x_1y_1) + \overline{\mathrm{P}}^{(j)}(\sigma;x_1y_1)\,, \end{aligned}$$

dove delle derivate delle funzioni p, P che qui compaiono sono finite e continue quelle

di $p_{i,l}^{(j)}(xy;\sigma)$ che non hanno più di $2n$ derivazioni rapporto a σ, nè più di $2n-l$ rapporto a xy;

di $\mathrm{P}^{(j)}(xy;\sigma)$ che non hanno più di $2n$ derivazioni rapporto a σ, nessuna rapporto a xy;

di $\overline{p}_{k,l}^{(j)}(\sigma;x_1y_1)$ che non hanno più di $2n-l+1$ derivazioni rapporto a σ, e quante si vogliano rapporto a x_1y_1;

di $\overline{\mathrm{P}}^{(j)}(\sigma;x_1y_1)$ che non hanno più di $n+1$ derivazioni rapporto a σ e quante si vogliano rapporto a x_1y_1 (¹).

Segue che si avrà

$$(33)\quad \begin{aligned} \mathfrak{S}\, e(xy;x_1y_1) &= \sum_1^{2n}{}_{i,k}\Big\{\sum_0^n{}_l\sum_0^{n-1}{}_{l_1}\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i^{n-l+1}(xy;\sigma)}\,\varsigma_k^{n-1+l_1}(\sigma;x_1y_1)\,\times \\ &\qquad \times\log\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)\, p_{ik,ll_1}(xy;\sigma;x_1y_1)\,d\sigma + \\ &\quad + \sum_0^{n-2}{}_l\sum_0^{n-1}{}_{l_1}\int_\gamma \varsigma_i^l(xy;\sigma)\log\varsigma_i(xy;\sigma)\,\varsigma_k^{n-1+l_1}(\sigma;x_1y_1)\,\times \\ &\qquad \times\log\varsigma_k(\sigma;x_1y_1)\, p_{ik,n+l+1l_1}(xy;\sigma;x_1y_1)\,d\sigma\Big\} + \\ &+ \sum_1^{2n}{}_i\Big\{\sum_0^{n-1}{}_l\int_\gamma \varsigma_i^{n-1+l}(\sigma;x_1y_1)\log\varsigma_i(\sigma;x_1y_1)\,\overline{\mathrm{P}}_{i,l}(xy;\sigma;x_1y_1)\,d\sigma + \\ &\quad + \sum_0^n{}_l\int_\gamma \frac{1}{\varsigma_i^{n-l+1}(xy;\sigma)}\,\mathrm{P}_{i,l}(xy;\sigma;x_1y_1)\,d\sigma + \\ &+ \sum_0^{n-2}{}_l\int_\gamma \varsigma_i^l(xy;\sigma)\log\varsigma_i(xy;\sigma)\,\mathrm{P}_{i,n+l+1}(xy;\sigma;x_1y_1)\,d\sigma\Big\} + \mathrm{P}(xy;\sigma;x_1y_1), \end{aligned}$$

dove le funzioni che qui compaiono hanno certe derivate finite e continue, e precisamente

$p_{ik,ll_1}(xy;\sigma;x_1y_1) = \Sigma_j\, p_{i,l}^{(j)}(xy;\sigma)\,\overline{p}_{k,l_1}^{(j)}(\sigma;x_1y_1)$ quelle che non contengono più di $2n-l_1+1$ derivazioni rapporto a σ, nè più di $2n-l$ rapporto a xy;

(¹) La dimostrazione è analoga a quella della nota precedente.

$\bar{P}_{i,l}(xy\,;\sigma\,;x_1y_1) = \Sigma_j\, P^{(j)}(xy\,;\sigma)\,\bar{p}_{i,l}^{(j)}(\sigma\,;x_1y_1)$ quelle che non contengono più di $2n - l + 1$ derivazioni rapporto a σ e nessuna rapporto a xy;

$P_{i,l}(xy\,;\sigma\,;x_1y_1) = \Sigma_j\, p_{i,l}^{(j)}(xy\,;\sigma)\,\bar{P}^{(j)}(\sigma\,;x_1y_1)$ quelle che non contengono più di $n+1$ derivazioni rapporto a σ nè più di $2n - l$ rapporto a xy;

$P(xy\,;\sigma\,;x_1y_1) = \Sigma_j\, P^{(j)}(xy\,;\sigma)\,\bar{P}^{(j)}(\sigma\,;x_1y_1)$ quelle che non contengono più di $n+1$ derivazioni rapporto a σ e nessuna rapporto ad xy;

mentre tutte ammettono quante si vogliano derivazioni rapporto a x_1y_1.

Se noi consideriamo ora l'integrale (28) avremo che il contributo degli ultimi tre gruppi di termini di (33) ci dànno senz'altro funzioni che ammettono quante si vogliano derivate rapporto ad x_1y_1.

Consideriamo invece un termine proveniente dal primo gruppo. Per $l = l_1 = 0$ avremo proprio un integrale del tipo di $W_{n+1}(xy)$ del n. 6 per cui $g = 2n$ e quindi ad essi si potranno applicare i teoremi 1° e 2° fino a mostrare che $\pi(xy)$ abbia effettivamente le derivate di ordine $2n$.

Se invece l od l_1 sono diversi da zero, noi potremo prima eseguire $l + l_1$ derivazioni sotto il segno integrale e le derivate $(l + l_1)^{esime}$ saranno espresse per un integrale del tipo di $W_{n-l+1}(xy)$ del n. 6 per cui g sarà il minore dei due numeri $2n - l_1 + 1$, e $2n - l$, ma ad ogni modo $> 2n - l - l_1$; e quindi ancora per questi integrali si possono applicare i teoremi 1° e 2° fino a provare che esistono le derivate di ordine $2n$.

Analogamente per gli integrali del secondo e terzo gruppo. Per es., questi ultimi si riducono dopo $n + l$ derivazioni ad integrali del tipo di $W(xy)$; mentre quelli del secondo gruppo portano dopo $n + l + l_1 + 1$ derivazioni alla considerazione di integrali del tipo di $W_1(xy)$ con $g = n - l - 1$ e quindi permettono essi pure di dimostrare l'esistenza delle derivate di ordine $2n$.

13. Infine restano gli integrali (28). Essi sono via via sempre più regolari, se pure molto più complicati nella loro espressione; esamineremo per fissare le idee il primo di essi.

La funzione $e^{(1)}(xy\,;x_1y_1)$ è data dalla $(24)^{(1)}$: possiamo scrivere

$$(34)\qquad e^{(1)}(xy\,;x_1y_1) = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{1}^{n}{}_{i,i}\int_\gamma \Omega^{(j)}(xy\,;\sigma)\,d\sigma \int_\gamma \varDelta_{i,j}(\sigma\,;\sigma_1)\,\psi_i(\sigma_1\,;x_1y_1)\,d\sigma_1.$$

Ora per $\varDelta_{ij}(s\,;\sigma)$ si hanno formule perfettamente analoghe alle (32). Invero basta ricordare che $\varDelta_{i,j}(s\,;\sigma)$ non differisce da $\dfrac{\partial^{n-1}\,\Omega^{(i)}}{\partial x^{n-j}\,\partial y^{j-1}}$ altro che per essere sostituita l'espressione $\Sigma\,\alpha_m^{n-j}(s)\,L_{mi}(s\,;\sigma)$ a $(n-2)!\,\Sigma_m\,\dfrac{\lambda_m^{(i)}(\sigma)\,\alpha_m^{n-j}(s)}{\varsigma_m(s\,;\sigma)}$; quindi si avrà

$$(35)\qquad \varDelta_{ij}(s\,;\sigma) = \sum_{n}^{2n}{}_m\left\{\sum_{0}^{n-2}\varsigma_m^{l}(s\,;\sigma)\log\varsigma_m(s\,;\sigma)\,p_{m,l}^{(i,j)}(s\,;\sigma)\right\} + P^{(ij)}(s\,;\sigma)\,,$$

dove le $p^{(j)}_{m,l}(s\,;\sigma)$ sono funzioni che ammettono $2n$ derivazioni rapporto a σ e rispettivamente $2n-l$ e $2n-1$ rapporto ad s.

Se quindi vogliamo calcolare la $\mathfrak{C}\, e^{(1)}(xy\,;x_1y_1)$ e poi l'integrale (28) ci imbatteremo in integrali della natura dei $W^{(1)}_l(xy)$ del n. 7; od in integrali che hanno una conveniente loro derivata di quella forma appunto.

Ed analogamente $\int\!\!\int \mathfrak{C}\, e^{(2)}(xy\,;x_1y_1)\, \pi(xy)\, dx\, dy$ dà luogo a considerare integrali della natura dei $W^{(2)}_l(xy)$, e così di seguito.

Cosicchè restano provate le affermazioni del n. 8 e quindi pure per il ragionamento là indicato la derivabilità delle funzioni $\pi(xy)$ soluzioni di (21).

ERRATA CORRIGE.

Pag. 21	riga	1	« *richiediamo soltanto* » leggi « *richiediamo generalmente soltanto* ».
» 21	»	3	aggiungere dopo la parola « continue » quanto segue: « a volte sostituiremo questa ipotesi che non basterebbe neppure ad assicurarci dell'esistenza dell'aggiunta con quella che in C le $b_{ik}(xy)$ abbiano le derivate di ordine $i+k+1$ finite e continue ».
» 22	»		ultima del testo form. (4) « ς_j^{2n-2} » leggi « ς_j^{2n-1} »
» 26	»	3	dopo « $\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2$ » aggiungi « $=1$ ».
» 33	»	3	form. (30) « $(-1)^{\nu}2\pi i$ » leggi « $(-1)^{\nu}\pi i$ ».
» 33	»	10	form. (32) aggiungere all'ultimo termine « $\frac{d\alpha_j(\sigma)}{d\sigma}\,\frac{\xi(\sigma)-x}{\varsigma(\sigma\,;xy)}$ » il fattore « $\frac{1}{\overline{r}_j(\sigma)}$ ».
» 38	»	17	« ω_j » leggi « ω_{ik} ».
» 40	»	8	dal basso « *assertazione* » leggi « *asserzione* ».

INDICE